СИСТЕМА АСТРОНОМІИ.

ДОКТОРА

МИТРОФАНА ХАНДРИКОВА

ПРОФЕССОРА УНИВЕРСИТЕТА СВ. ВЛАДИМІРА.

КІЕВЪ.

Типографія М. П. Фрица, Большая Владим. ул., возлѣ памятн. св. Ирины, собств.,

1875.

Печатано по опредѣленію Совѣта Университета св. Владиміра.
Ректоръ **Н. Бунге.**

Хотя предметъ Астрономіи не имѣетъ тѣсной связи съ повседневными заботами человѣческой жизни, хотя звѣздный міръ при дневномъ свѣтѣ, въ обычное время бодрствованія и трудовъ, скрытъ отъ глазъ нашихъ, но не смотря на все это, небо непрестанно привлекаетъ любознательный человѣческій умъ къ изученію загадочнаго существованія отдаленныхъ міровъ. Какъ бы не былъ человѣкъ сосредоточенъ въ себѣ, какъ бы не угнетался онъ всечасно житейскими попеченіями, въ жизни его непремѣнно найдутся минуты, въ которыя для каждаго болѣе или менѣе ясно возникаютъ вопросы, постоянно предлагаемые намъ небомъ на рѣшеніе. Трудно представить себѣ человѣка, который хотя бы одинъ разъ въ жизни сознательно не посмотрѣлъ на небо и не спросилъ себя о загадочной цѣли существованія разсѣянныхъ въ пространствѣ свѣтилъ; но если въ настоящей, временной жизни намъ не суждено найти разгадку этого вопроса, то все таки мы не должны оставаться равнодушными къ тому, что происходитъ передъ нашими глазами въ неизмѣрныхъ пространствахъ вселенной. Если для рѣшенія вопроса о цѣли существованія свѣтилъ нѣтъ данныхъ и, обращаясь къ нему, мы должны ограничиваться только шаткими гипотезами, то небомъ предлагаются намъ другіе вопросы, которые хотя и касаются болѣе внѣшней стороны существованія свѣтилъ, но все таки вполнѣ достойны того, чтобы всѣ силы самаго возвышеннаго ума были направлены къ ихъ рѣшенію. Такихъ вопросовъ главнымъ образомъ представляется два: одинъ изъ нихъ касается законовъ равновѣсія и движенія свѣтилъ, другой—ихъ физическаго строенія. Рѣшеніе этихъ двухъ вопросовъ составляетъ предметъ обширной вѣтви прикладной математики извѣстной подъ общимъ именемъ *Астрономіи.*

Если содержаніе современной астрономіи исчерпывается рѣшеніемъ двухъ названныхъ вопросовъ, то нельзя не согласиться, что при раздѣленіи этой науки на части можно установить только два естественныхъ отдѣла: къ одному слѣдуетъ отнести ученіе о равновѣсіи и движеніи свѣтилъ, къ другому—ученіе о физическомъ ихъ строеніи. Первый изъ этихъ отдѣловъ можно назвать астрономіей математической, второй—астрономіей физической. Въ настоящее время названные два отдѣла, даже въ ихъ примѣненіи къ изученію солнечной системы, не одинаковы ни по объему ни по степени разработки. Рѣшеніе всѣхъ частныхъ вопросовъ, входящихъ въ область астрономіи математической, по крайней мѣрѣ касательно изслѣдованія солнечной системы, на столько закончено и приведено въ такую ясность, что мы едвали встрѣтимъ какія нибудь затрудненія, если захотимъ прослѣдить непрерывную нить тѣхъ размышленій, которыми добыты нынѣ извѣстные результаты изслѣдованій движенія и фигуры свѣтилъ, составляющихъ солнечную систему. Далеко не то можно сказать про второй отдѣлъ астрономіи. Астрономія физическая, чрезъ примѣненіе спектральнаго анализа къ изученію строенія свѣтилъ, въ послѣднее время обогатилась многими фактами; но

матеріалъ добытый этимъ путемъ еще слишкомъ малъ, слишкомъ недостаточенъ для того, чтобы привести эти факты въ систему и твердо высказать хотя не много основныхъ положеній ученія о физическомъ строеніи свѣтилъ. Даже бѣглый обзоръ современнаго состоянія физической астрономіи показываетъ, что въ ней недостаетъ еще многаго и при томъ того, что едвали можетъ быть замѣнено обиліемъ фактовъ. Въ истинахъ раскрытыхъ этимъ отдѣломъ астрономіи постоянно видны какія-то недомолвки; обзоръ каждаго изслѣдованія, входящаго въ область физической астрономіи, приводитъ къ тяжелому сознанію, что мы еще очень далеки отъ полнаго рѣшенія даже основныхъ и самыхъ существенныхъ вопросовъ, касающихся физико-химическихъ свойствъ свѣтилъ.

Дальнѣйшія подраздѣленія астрономіи устанавливаются нашей личной волей,— они обусловливаются не свойствами изучаемаго предмета, а характеромъ и особенностями нашихъ методовъ изслѣдованія.

Чтобы изучить движеніе свѣтилъ, найти законы этого движенія, необходимо научиться опредѣлять положенія свѣтилъ, соотвѣтствующія извѣстнымъ моментамъ времени. Эти положенія находятся посредствомъ наблюденій, производимыхъ съ подвижнаго въ пространствѣ мѣста наблюденія—земли, поверхность которой окружена газообразной оболочкой перемѣнной температуры и плотности. Подвижность мѣста наблюденія и газообразная среда, находящаяся между глазомъ наблюдателя и наблюдаемымъ предметомъ, служатъ причиною того, что положенія свѣтила, выводимыя изъ наблюденій, разнятся отъ мѣстъ дѣйствительно имъ занимаемыхъ въ пространствѣ. Кромѣ того размѣры земли во многихъ случаяхъ нельзя считать величинами исчезающими въ сравненіи съ разстояніями отдѣляющими насъ отъ свѣтилъ, а потому нерѣдко одновременное опредѣленіе положенія одного и того же свѣтила, производимое въ различныхъ мѣстахъ земной поверхности, приводитъ къ результатамъ между собою несогласнымъ. Чтобы устранить это разногласіе, необходимо наблюденія, произведенныя въ различныхъ мѣстахъ земной поверхности, редуцировать къ одной опредѣленной точкѣ, за которую обыкновенно принимается центръ земли. Итакъ разности видимыхъ и истинныхъ положеній свѣтилъ зависятъ отъ положенія самаго наблюдателя на поверхности земли; далѣе они обусловливаются подвижностію земли въ пространствѣ и существованіемъ атмосферы. Мы наблюдаемъ съ поверхности земли и геоцентрическое положеніе свѣтила измѣняется для насъ параллаксомъ; наблюдаемъ съ мѣста подвижнаго въ пространствѣ и положеніе свѣтила измѣняется аберраціей, прецессіей и нутаціей; наблюдаемъ чрезъ слои атмосферы не одинаково плотные, не одинаково нагрѣтые и видимое нами положеніе свѣтила зависитъ отъ рефракціи. Правила, по которымъ освобождаются координаты наблюдаемыхъ положеній свѣтилъ отъ вліянія параллакса, аберраціи, прецессіи, нутаціи и рефракціи, излагаются въ первой части математической астрономіи, называемой *астрономіей сферической.*

Данныя, на которыхъ основывается большая часть выводовъ сферической астрономіи, суть координаты видимыхъ положеній свѣтилъ. Методы опредѣленія какъ этихъ координатъ, такъ равно и положеній тѣхъ системъ осей и плоскостей, къ которымъ они относятся излагаются въ *астрономіи практической.* Чтобы показать чѣмъ опредѣляется содержаніе этой послѣдней, замѣтимъ, что положеніе свѣтилъ на сферѣ небесной мы относимъ къ тремъ системамъ осей координатъ. За основныя плоскости одной системы считаемъ эклиптику и кругъ широты, за основныя плоскости

другой принимаемъ экваторъ и кругъ склоненій, наконецъ основными плоскостями третей системы выбираемъ горизонтъ и кругъ высоты. Координаты, отнесенныя къ такимъ системамъ суть: долгота и широта, прямое восхожденіе или часовой уголъ и склоненіе и наконецъ высота и азимутъ. Для непосредственнаго опредѣленія широты и долготы свѣтила нынѣ употребляемые астрономическіе инструменты не приспособлены; для опредѣленія прямаго восхожденія или часоваго угла вмѣстѣ съ склоненіемъ служатъ меридіанные инструменты, каковы меридіанный кругъ и пассаженый инструментъ; для той же цѣли, хотя въ настоящее время въ весьма рѣдкихъ случаяхъ, служатъ еще экваторіалы. Для опредѣленія высоты и азимута астрономы пользуются универсальнымъ инструментомъ или астрономическимъ теодолитомъ и вертикальнымъ кругомъ. Такимъ образомъ практическая астрономія, заключающая въ себѣ теорію инструментовъ и ученіе о методахъ наблюденій при помощи ихъ, должна вмѣщать въ себѣ главнымъ образомъ теорію пассажнаго инструмента въ связи съ теоріей меридіаннаго круга, теорію универсальнаго инструмента или астрономическаго теодолита и вертикальнаго круга, теорію экваторіала и наконецъ теорію инструментовъ служащихъ для опредѣленія координатъ по дифференціальному методу, т. е. теорію микрометровъ и геліометра. Такъ какъ свѣтила, равно какъ и нѣкоторыя изъ координатныхъ плоскостей измѣняютъ со временемъ свое положеніе въ пространствѣ, то для полнаго представленія о мѣстѣ свѣтила на сферѣ небесной, необходимо еще знать время, которому соотвѣтствуютъ опредѣленныя извѣстнымъ образомъ изъ наблюденій координаты свѣтила. Кромѣ того одна изъ координатъ, именно склоненіе, получается по большей части чрезъ измѣреніе зенитныхъ разстояній свѣтила въ меридіанѣ и при этомъ вводится въ вычисленіе склоненіе зенита мѣста наблюденія или его астрономическая широта. Принимая это во вниманіе, за одинъ изъ существенныхъ вопросовъ практической астрономіи слѣдуетъ признавать опредѣленіе времени, считаемаго въ данномъ мѣстѣ земной поверхности въ моментъ наблюденія, и астрономической широты этого мѣста. Такъ какъ разность долготъ мѣстъ земной поверхности въ точности равна разности временъ считаемыхъ въ одинъ и тотъ же моментъ въ обоихъ этихъ мѣстахъ, то къ рѣшенію сказаннаго вопроса приводится также и опредѣленіе координатъ мѣста наблюденія.

Научившись опредѣлять изъ наблюденій видимыя мѣста свѣтилъ и вычислять на основаніи ихъ по правиламъ сферической астрономіи истинныя положенія, мы можемъ пользоваться координатами этихъ послѣднихъ какъ необходимыми данными для изслѣдованія дѣйствительныхъ перемѣщеній свѣтилъ въ пространствѣ, или, что все равно, для изслѣдованія орбитъ свѣтилъ и законовъ движенія въ этихъ орбитахъ. Такъ какъ въ эту часть астрономіи само собою включается изученіе возмущеній, то трудность изслѣдованія заставляетъ искать рѣшенія вопроса путемъ послѣдовательныхъ приближеній и раздѣлить ученіе о движеніи свѣтилъ въ орбитахъ на двѣ части. Одну изъ этихъ частей принято называть *теоретической астрономіей*, другую, слѣдуя Лапласу,—*небесной механикой;* къ этой послѣдней относится также теоріи вращательнаго движенія и фигуры свѣтилъ, составляющихъ нашу солнечную систему.

Въ первомъ приближеніи рѣшенія вопроса о движеніи въ орбитахъ мы предполагаемъ, что свѣтило, планета или комета находится подъ дѣйствіемъ одного только центральнаго тѣла системы, притягивающаго по закону Ньютона. Въ этомъ предположеніи, только приближенномъ къ истинѣ, вычисляется на основаніи наблюденій:

видъ, размѣры и положеніе въ пространствѣ описаннаго свѣтиломъ коническаго сѣченія. Такъ какъ все это опредѣляется шестью постоянными, называемыми элементами изслѣдуемой орбиты, то можно сказать, что предметъ теоретической астрономіи заключается въ опредѣленіи изъ наблюденій шести постоянныхъ, входящихъ въ интегралы уравненій, часто называемыхъ дифференціальными уравненіями эллиптическаго движенія.

Второе приближеніе вопроса о дѣйствительномъ движеніи свѣтилъ трактуетъ тѣ отступленія отъ коническаго сѣченія, которыя дѣлаетъ свѣтило, находясь подъ возмущающимъ вліяніемъ другихъ, составляющихъ систему и движущихся около того же центральнаго тѣла. Теоретическое рѣшеніе вопроса о возмущеніяхъ зависитъ отъ интегрированія шести совмѣстныхъ дифференціальныхъ уравненій втораго порядка и первой степени, но такъ какъ средства математическаго анализа въ настоящее время недостаточны для выполненія упомянутаго интегрированія въ конечномъ видѣ, то для рѣшенія вопроса о возмущеніяхъ приходится прибѣгать къ различнымъ искуственнымъ пріемамъ весьма разнообразнымъ въ частныхъ случаяхъ. Недостатокъ общаго рѣшенія вопроса становится причиною такихъ трудностей анализа возмущеній, какихъ мы не встрѣчаемъ ни въ какомъ другомъ отдѣлѣ астрономіи.

Мы указали теперь на всѣ главнѣйшие вопросы, рѣшеніемъ которыхъ занимается математическая астрономія и назвали при этомъ тѣ рубрики, на которыя принято въ настоящее время дѣлить эту науку. Если отдѣленіе астрономіи сферической отъ теоріи астрономическихъ инструментовъ имѣетъ свое оправданіе въ различіи свойствъ рѣшаемыхъ вопросовъ, то во всякомъ случаѣ не легко признать вполнѣ естественнымъ и вызваннымъ самымъ существомъ предмета отдѣленіе теоретической астрономіи отъ небесной механики. Если общая задача теоретической астрономіи заключается въ опредѣленіи орбитъ свѣтилъ, въ вычисленіи элементовъ этихъ орбитъ, то при рѣшеніи этаго вопроса необходимо имѣть въ виду не коническія сѣченія, а дѣйствительно описываемыя кривыя, необходимо имѣть въ виду опредѣленіе элементовъ какъ функцій времени, но неумѣніе интегрировать извѣстныя уравненія въ конечномъ видѣ заставляетъ прибѣгать къ способу послѣдовательныхъ приближеній и выдѣлить ученіе о возмущеніяхъ изъ теоретической астрономіи. Въ такомъ раздѣленіи нельзя не замѣтить поспѣшности, съ которою астрономы, по винѣ математиковъ, хотятъ предупредить вопросы, отвѣты на которые еще не готовы.

За исключеніемъ отдѣла небесной механики, содержащаго въ себѣ теорію возмущеній, всѣ части математической астрономіи какъ по изяществу обработки, такъ и по простотѣ рѣшенія заключающихся въ нихъ вопросовъ, приведены въ такую форму, при которой могутъ удовлетворять самымъ строгимъ требованіямъ астрономической практики. Такимъ блестящимъ своимъ состояніемъ астрономія почти исключительно обязана трудамъ К. Ф. Гаусса, Ф. В. Весселя и П. А. Гансена, имена которыхъ постоянно повторяются по этому на страницахъ всѣхъ астрономическихъ трактатовъ. Несмотря на законченность обработки астрономіи, мы до настоящаго времени не имѣемъ такихъ астрономическихъ трактатовъ и руководствъ, которые съ полнотою соотвѣтствующею современному состоянію науки соединяли бы необходимую и достаточную ясность изложенія. Къ наиболѣе извѣстнымъ теперь астрономическимъ трактатамъ по отдѣламъ сферической и практической астрономіи относятся сочиненія Шовене, Врюнаова и Савича. Отдѣлъ теоретической астрономіи, основаніемъ которому

служитъ безсмертное творенie Гаусса Theoria motus corporum coelestium, представляется сочиненiями Ватсона, Клинкерфуса, Оппольцера и Фринигауфа. Что касается до систематическаго изложенiя небесной механики, то за исключенiемъ крайне односторонняго и совершенно устарѣвшаго сочиненiя Понтекулана *) вмѣстѣ съ неудовлетворительнымъ трактатомъ Резали (Traité elementair de mecanique celeste), мы не имѣемъ ничего и безошибочно можемъ сказать, что наиболѣе существенная часть небесной механики—теорiя возмущенiй еще не вышла до сихъ поръ изъ области мемуаровъ и монографiй доступныхъ весьма немногимъ.

Книга Брюннова (F. Brünnow. Lehrbuch der Sphärischen Astronomie), выдержавшая три изданiя, какъ видно изъ заглавiя, имѣетъ назначенiе учебника, но въ этомъ смыслѣ авторъ едвали достигъ своей цѣли. По отношенiю къ степени ясности изложенiя сочиненiе Брюннова оставляетъ желать многаго, а потому успѣхъ чтенiя книги обусловливается предварительнымъ и довольно близкимъ знакомствомъ читателя съ изучаемымъ предметомъ, но это едвали слѣдовало имѣть въ виду при составленiи учебника. Прежде всего замѣтимъ, что въ сочиненiи Брюннова не всѣ части сферической астрономiи одинаково развиты. Послѣ длиннаго и едвали необходимаго изложенiя сферической тригонометрiи, нѣкоторыхъ теоремъ изъ теорiи перiодическихъ рядовъ и различныхъ методовъ интерполированiя, авторъ переходитъ къ рѣшенiю собственно астрономическихъ вопросовъ. За главой о преобразованiи координатъ и о явленiяхъ суточнаго движенiя свода небеснаго прямо слѣдуетъ трактатъ о влiянiи прецессiи и нутацiи на координаты свѣтилъ; но статья о нутацiи болѣе похожа на простой сборникъ извѣстныхъ формулъ, чѣмъ на главу учебника, въ которой авторъ долженъ бы, хотя и не касаясь чисто механическихъ соображенiй о колебанiи земной оси, познакомить своихъ читателей со многими подробностями явленiя нутацiи. Въ главѣ о параллаксѣ также нельзя не замѣтить одного весьма существеннаго упущенiя. Рѣшенiя вопроса объ освобожденiи положенiя свѣтила отъ параллакса въ томъ случаѣ, когда неизвѣстна постоянная величина параллакса, а слѣдовательно и разстоянiе свѣтила отъ земли, мы вовсе не встрѣчаемъ въ книгѣ Брюннова, хотя весьма остроумное рѣшенiе этого вопроса давно уже предложено Гауссомъ и развито имъ въ Theoria motus corp. coelestium. Въ статьѣ о рефракцiи изложены между прочимъ выводы мало употребительныхъ формулъ Симпсона и Брадлея и въ тоже время, даже въ послѣднемъ изданiи книги, ничего не упоминается о новыхъ изслѣдованiяхъ закона измѣненiя температуры и плотности атмосферы съ высотою и о новыхъ прiемахъ вычисленiя рефракцiи вблизи горизонта. Въ главѣ объ аберрацiи неясность основныхъ положенiй слишкомъ чувствительна, и начинающiй изученiе астрономiи по книгѣ Брюннова едвали можетъ составить себѣ ясное и опредѣленное представленiе о явленiя аберрацiи. Собственно сферическая астрономiя въ сочиненiи Брюннова заключается главой, въ которой не совсѣмъ умѣстно излагаются между прочимъ методы опредѣленiя положенiя равноденственныхъ точекъ и наклоненiя эклиптики къ экватору. Мы сомнѣваемся чтобы было возможно съ достаточною ясностiю представить читателю еще не знакомому съ теорiей инструментовъ способы абсолютныхъ опредѣленiй координатъ.

Переходнымъ отдѣломъ отъ сферической къ практической астрономiи въ книгѣ Брюннова представляются главы объ астрономическомъ опредѣленiи координатъ мѣстъ

*) G. De-Pontécoulant. Theorie analytique du Systeme du Monde. Paris, 1834.

земной поверхности и здѣсь между прочимъ по поводу опредѣленія долготъ въ весьма сжатомъ и неполномъ видѣ излагается теорія затмѣній, которая должна бы быть предметомъ отдѣльной и обширной главы. Въ настоящее время, не считая неточнаго способа приписываемаго Урзиномъ Гауссу, мы имѣемъ два метода предвычисленія затмѣній. Одинъ изъ нихъ чисто аналитическій предложенъ Бесселемъ въ его мемуарѣ Analyse der Finsternisse. При всей изящности аналитической формы, способъ Весселя не можетъ считаться вполнѣ удовлетворительнымъ въ практическомъ отношеніи, ибо по большей части зависитъ отъ интерполированія линейныхъ координатъ, быстро и неправильно измѣняющихся. Въ недавнее время вопросъ о предвычисленіи затмѣній, зависящихъ отъ параллакса, съ большимъ успѣхомъ былъ рѣшенъ Гансеномъ въ сочиненіи Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen, и это рѣшеніе въ практическомъ отношеніи имѣетъ несомнѣнныя преимущества передъ способомъ Весселя; не смотря на ето, въ книгѣ Брюннова вовсе не упоминается о прекрасномъ сечиненіи Гансена.

Недостатки сочиненія Брюннова едвали еще не болѣе ощутительны во второй его части, посвященной теоріи астрономическихъ инструментовъ. По причинѣ большой неясности и неполноты изложенія, эта часть еще менѣе можетъ считаться учебникомъ чѣмъ первая, заключающая въ себѣ сферическую астрономію. Подробное указаніе всѣхъ недостатковъ завело бы насъ слишкомъ далеко, а потому ограничимся перечисленіемъ только немногихъ.

Изслѣдованіе ошибокъ дѣленій на кругахъ астрономичвскихъ инструментовъ составляетъ одинъ изъ существенныхъ и трудныхъ вопросовъ практической астрономіи. Въ книгѣ Брюннова этому вопросу посвящено весьма немного словъ и вовсѣ не упоминается объ остроумныхъ изслѣдованіяхъ, сдѣланныхъ по этому предмету директоромъ Лейденской обсерваторіи Кейзеромъ. Въ статьѣ объ изслѣдованіи гнутія, при развитіи методы Гансена, форма ряда, выражающаго величину гнутія, совершенно отлична отъ той, которою представляется основное положеніе Гансеновой теоріи. Такое произвольное отступленіе отъ оригинальнаго мемуара не влечетъ за собою однако никакихъ упрощеній. Въ теоріи наиболѣе употребительнаго изъ астрономическихъ инструментовъ, именно въ теоріи пассажнаго инструмента, есть также весьма существенные недостатки; такъ въ параграфѣ о приведеніи наблюденій съ боковой нити на среднюю, мы вовсѣ не встрѣчаемъ той формулы, которая совершенно необходима для редукцій наблюденій полярныхъ звѣздъ; въ параграфѣ объ опредѣленіи времени изъ наблюденій, произведенныхъ въ вертикалѣ полярной звѣзды, изящная теорія Гансена измѣнена далеко не къ лучшему.

Говоря объ этихъ недостаткахъ сочиненія Брюннова по содержанію, нельзя не упомянуть о тѣхъ безчисленныхъ мелкихъ недосмотрахъ и небрежностяхъ изданія выражающихся опечатками, которыя систематически переходятъ изъ одного изданія въ другое.

Сочиненіе Шовене (A Manual of spherical and practical astronomie by William Chauvenet) по содержанію нѣсколько отличается отъ книги Брюннова; изложеніе его также представляетъ свои особенности, которыя однако едвали могутъ быть отнесены къ достоинствамъ сочиненія. Трактатъ Шовене состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ томовъ, первый обнимаетъ сферическую, а второй практическую астрономію. Въ первомъ томѣ послѣ главы о параллаксѣ и рефракціи слѣдуетъ въ видѣ длинной дигрессіи изложеніе различныхъ методовъ астрономическаго опредѣленія координатъ то-

чекъ земной поверхности, и въ концѣ этого отдѣла гораздо болѣе основательно чѣмъ у Брюннова, хотя и съ значительными измѣненіями и отступленіями отъ оригинала, изложена Бесселева теорія затмѣній, зависящихъ отъ параллакса. Послѣ этого авторъ снова возвращается къ вопросамъ собственно сферической астрономіи, и въ одной обширной главѣ совмѣщаетъ теорію аберраціи, годичнаго параллакса, прецессіи и нутаціи. Но все это за исключеніемъ теоріи затмѣній имѣетъ тѣ же недостатки, на которые мы указывали, говоря о книгѣ Брюннова. Здѣсь мы встрѣчаемъ ту же сжатость изложенія въ ученіи объ аберраціи и нутаціи, тотъ же пробѣлъ въ главѣ о параллаксѣ и т. д. Что касается до второй части сочиненія Шовене, то нельзя не замѣтить, что въ ней многіе вопросы практической астрономіи разработаны несравненно основательнѣе чѣмъ въ книгѣ Брюннова; хотя впрочемъ и здѣсь есть свои недостатки. Такъ напримѣръ, за исключеніемъ двухъ, трехъ малыхъ замѣтокъ, сдѣланныхъ, какъ говорится, мимоходомъ, мы не встрѣчаемъ основательныхъ указаній на способы изслѣдованія гнутія, весьма необходимаго при извѣстныхъ опредѣленіяхъ, производимыхъ съ помощію большихъ астрономическихъ инструментовъ; далѣе обобщеніе способа, предложеннаго Бесселемъ для редукціи меридіанныхъ наблюденій свѣтилъ имѣющихъ дискъ, параллаксъ и собственное движеніе едвали прибавляетъ что либо существенное къ тому вполнѣ удовлетворительному въ практикѣ пріему, который мы находимъ на страницахъ Бесселевыхъ Tabulae Regiomontanae. Вообще трактатъ Шовене нельзя считать вполнѣ вѣрнымъ представленіемъ того состоянія, въ которомъ находятся въ настоящее время два большіе отдѣла математической астрономіи.

Книга профессора Савича Приложеніе практической астрономіи къ географическому опредѣленію мѣстъ касается, какъ мы видимъ изъ заглавія, одного только вопроса практической астрономіи, а потому и заключаетъ въ себѣ главнымъ образомъ теорію тѣхъ малыхъ переносныхъ инструментовъ, которые наиболѣе приспособлены къ рѣшенію этого вопроса. Хотя Гётце, переводчикъ сочиненія Савича и назвалъ свой переводъ очеркомъ практической астрономіи (Abris der practischen Astronomie), но такое заглавіе едвали оправдывается содержаніемъ книги, ибо въ сочиненіи Савича главные вопросы практической астрономіи, касающіеся опредѣленія изъ наблюденій координатъ свѣтилъ, вовсѣ не затрогиваются. Въ книгѣ Савича мы находимъ много любопытныхъ и полезныхъ въ практическомъ отношеніи замѣчаній, но при этомъ сочиненіе имѣетъ тотъ существенный недостатокъ, что доказательства многихъ основныхъ положеній недостаточно строги и часто не имѣютъ аналитическаго характера, хотя впрочемъ мѣстами нельзя не замѣтить другой крайности. Такъ, въ теоріи пассажнаго инструмента авторъ въ началѣ стремится къ такимъ обобщеніямъ, которыя много затѣмняютъ выводъ основныхъ формулъ Мейера, Бесселя и Гансена, но этотъ выводъ составляетъ однако существенную часть теоріи одного изъ главныхъ астрономическихъ инструментовъ.

Говоря о трактатахъ вмѣщающихъ въ себѣ сферическую и практическую астрономію, нельзя не упомянуть о вышедшемъ въ послѣднее время французскомъ переводѣ сочиненія Брюннова, сдѣланномъ астрономами парижской обсерваторіи (Traité d'astronomie spherique et d'astronomie pratique par Brünnow. Edition française publiée par È. Lucas et C. André). Первый томъ есть простой переводъ книги Брюннова, во второмъ же, какъ заявляетъ переводчикъ André, сдѣланы многія добавленія, состоящія изъ астрономическихъ таблицъ, многихъ подробностей касающихся какъ устройства и упо-

требленія инструментовъ, такъ и методовъ наблюденій, принятыхъ на парижской обсерваторіи и т. д. (edition française augmentée de tables astronomique, de nombreux developpements sur la construction et l'emploi des instruments, sur les methodes adoptées à l'Observatoire de Paris, sur l'equation personnelle, sur la parallaxe du Soleil etc.). Но добавленія въ описаніи инструментовъ главнымъ образомъ состоятъ въ забавныхъ картинкахъ, представляющихъ инструменты парижской обсерваторіи. Что же касается описанія методовъ наблюденій принятыхъ на парижской обсерваторіи, то оно едвали поучительно, ибо до настоящаго времени парижская обсерваторія не много содѣйствовала успѣхамъ практической астрономіи и вовсѣ не пользуется репутаціой образцоваго астрономическаго учрежденія, вполнѣ соотвѣтствующаго современному состоянію науки.

Обращаясь къ учебной литературѣ теоретической астрономіи, замѣтимъ, что до К. Ф. Гаусса, астрономы не располагали аналитическими способами для опредѣленіи орбитъ свѣтилъ, а пользовались болѣе или менѣе искуственными пріемами. Если вспомнимъ при этомъ, что Ольберсова метода вычисленія параболическихъ орбитъ изъ трехъ наблюденій имѣетъ довольно ограниченный кругъ примѣненія, то согласимся, что начало теоретической астрономіи положено Гауссомъ и что за основаніе этой части астрономіи слѣдуетъ считать сочиненіе: Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium. Прошло уже болѣе полустолѣтія послѣ изданія этого сочиненія, но въ теченіи этого времени усилія многихъ астрономовъ и геометровъ упростить методу Гаусса не увѣнчались успѣхомъ. Всю современную литературу теоретической астрономіи можно считать только простыми комментаріями безсмертнаго творенія Гаусса. Благодаря однако этимъ комментаріямъ, пріемы Гаусса начали переходить въ учебники и руководства. Въ настоящее время такихъ руководствъ, какъ мы уже упомянули, можно указать четыре. Преимущество изъ всѣхъ нихъ, не колеблясь, слѣдуетъ отдать сочиненію Ватсона *), въ которомъ едвали не въ первый разъ, хотя и не совсѣмъ удачно, сдѣлана попытка представить полный обзоръ всей задачи теоретической астрономіи, задачи объ интегрированіи уравненій движенія тѣлъ составляющихъ свободную систему и находящихся во взаимнодѣйствіи по закону Ньютона. Изложеніе теоретической астрономіи Ватсонъ начинаетъ съ вывода уравненій возмущеннаго движенія, но къ сожалѣнію не даетъ ему надлежащаго развитія, но показываетъ тѣхъ формъ, при которыхъ наиболѣе просто получаются четыре извѣстные до сихъ поръ конечные интеграла. Послѣ такого вступленіи первыя главы своей книги Ватсонъ располагаетъ въ томъ порядкѣ, который мы видимъ въ Theoria motus corporum coelestium, сначала показываетъ соотношенія для различныхъ положеній свѣтила въ орбитѣ, потомъ даетъ извѣстныя соотношенія для разныхъ положеній въ пространствѣ и наконецъ переходитъ къ рѣшенію главнаго вопроса теоретической астрономіи, къ вычисленіе орбитъ по тремъ наблюденіямъ. Но здѣсь авторъ перестаетъ быть послѣдовательнымъ. Удерживая Гауссову систему расположенія сочиненія, Ватсонъ предпочитаетъ Гауссовой, изящной и едвали не самой простой формѣ рѣшенія вопроса тѣ выводы, которые мы находимъ въ одномъ изъ мемуаровъ Энке, помѣщенныхъ въ прибавленіяхъ къ извѣстному календарю Berliner astronomisches Jahrbuch **). Такимъ образомъ въ книгѣ Ватсона рѣшеніе главнаго вопроса теоре-

*) James C. Watson. Theortical Astronomy relating to the Motions of the Heavenly Bodies Philadelphia. 1869.

**) I. F. Encke. Ueber die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei volständigen Beobachtungen. Ber. Astr. Jahrbuch für 1854.

тической астрономіи излагается не по оригинальному сочиненію, а по комментаріямъ на него едвали не слабѣйшимъ изъ тѣхъ, которыя мы знаемъ въ настоящее время. Это тѣмъ болѣе странно, что Ватсону въ 1869 году не могла быть неизвѣстна прекрасная работа Гансона, помѣщенная въ Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Geselschaft der Wissenschaften zu Leipzig für 1863 *). Въ этомъ мемуарѣ Гансена, кромѣ основательнаго разбора различныхъ случаевъ, встрѣчающихся при опредѣленіи планетныхъ орбитъ изъ трехъ наблюденій, мы находимъ дѣйствительное упрощеніе одной части методы Гаусса. Но указаній на все это мы вовсѣ не видимъ въ трактатѣ теоретической астрономіи Ватсона.

Главу о возмущеніяхъ составляетъ изложеніе способовъ Энке, Брюннова и Гансена опредѣленія возмущеній по методѣ механической квадратуры. Но къ сожалѣнію это изложеніе не имѣетъ достаточной ясности и мѣстами значительно отступаетъ отъ оригинальныхъ мемуаровъ. Такія отступленія наиболѣе замѣтны въ способѣ Гансена, и если они сдѣланы съ цѣлію упрощенія тѣхъ выводовъ, которые мы читаемъ въ мемуарѣ Гансена Ueber die Berechnung der Störungen durch mechanische Quadraturen. Astr. Nach. № 799, то авторъ разсматриваемаго астрономическаго трактата едвали достигъ своей цѣли. Сочиненіе Ватсона оканчивается ученіемъ о возмущеніяхъ, происходящихъ отъ сопротивленія среды; но мы не можемъ не замѣтить, что эта глава не увеличиваетъ собою достоинствъ сочиненія и не пополняетъ тѣхъ недостатковъ, которые видны въ болѣе существенныхъ частяхъ трактата и безъ ущерба для полноты сочиненія могла бы быть вовсѣ опущена, тѣмъ болѣе, что необходимость гипотезы о сопротивленіяхъ среды въ настоящее время далеко не доказана.

Сочиненіе Оппольцера Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten есть неоконченный учебникъ теоретической астрономіи. Въ первой главѣ этой книги вопросы сферической астрономіи страннымъ образомъ перемѣшаны съ интегрированіемъ уравненій эллиптическаго движенія, даннымъ въ формѣ вывода Кеплеровыхъ законовъ совершенно независимо отъ общей постановки вопроса. Если авторъ, включая въ свой учебникъ теоретической астрономіи статьи о параллаксѣ, аберраціи, прецессіи и нутаціи, имѣлъ въ виду дать своему читателю возможность познакомиться съ этими предметами, не прибѣгая къ курсамъ сферической астрономіи, то онъ недостигъ своей цѣли, ибо крайне необстоятельное и сжатое изложеніе главныхъ частей сферической астрономіи, встрѣчаемое нами на страницахъ приготовительной части (Präparatorischer Theil) книги Оппольцера, не можетъ замѣнить собою даже неудовлетворительнаго руководства Брюннова. По отношенію къ развитію главнаго вопроса теоретической астрономіи, заключающагося въ опредѣленіи планетной или кометной орбиты изъ трехъ наблюденій, сочиненіе Оппольцера имѣетъ то преимущество передъ трактатомъ Ватсона, что въ немъ мы находимъ форму вывода Гауссовой теоріи, данную Гансеномъ.

Сочиненіе Клинкерфуса (W. Klinkerfues. Threoretische Astronomie) мало похоже на астрономическій трактатъ или учебникъ, но болѣе имѣетъ видъ сборника формулъ, употребляемыхъ при вычисленіи орбитъ по извѣстному числу наблюденій, и въ этомъ сборникѣ, между прочимъ, мы встрѣчаемъ многое, не имѣющее никакого примѣненія къ практикѣ. Система изложенія, принятая авторомъ, также имѣетъ свои особенности. Первая глава сочиненія посвящена такому вопросу, надобность въ рѣшеніи котораго встрѣчается

*) P. A. Hansen. Ueber die Bestimmung der Bahn eines Himmelkörpers aus drei Beobachtungen.

едвали не послѣ всего, ибо вычисленіе эфемериды становится возможнымъ только тогда, когда извѣстна покрайней мѣрѣ приближенная система элементовъ. Во второй главѣ читатель находитъ вовсѣ вышедшіе изъ употребленія пріомы вычисленіи круговыхъ орбитъ. При развитіи различныхъ способовъ вычисленія эллиптическихъ путей планетъ мы встрѣчаемъ многое вовсѣ не примѣнимое въ практикѣ. Въ этомъ смыслѣ особенно интересны 70 и 71 уроки. Въ первомъ изъ нихъ авторъ, желая увеличить точность опредѣленія радіуса вектора средняго положенія, значительно осложняетъ извѣстное Гауссово трансцендентное уравненіе 4-й степени и вводитъ въ него члены высшихъ порядковъ, но чтобы удержать при этомъ осложненіи одно только перемѣнное, онъ пользуется такой формой отношенія разстояній свѣтила отъ земли, въ которой члены высшихъ порядковъ опущены и такимъ образомъ получается весьма сложное уравненіе, но точность результата отъ этого нисколько не увеличивается. Гораздо болѣе удачную попытку сокращенія числа гипотезъ въ способѣ Гаусса сдѣлалъ неаполитанскій астрономъ А. Гаспарисъ, который въ своемъ мемуарѣ Elementi ellittici dell'orbita del pianeta Silvia (nota terza), измѣняетъ видъ Гауссова уравненія, вводя въ него члены третьяго порядка. Это преобразованіе при опредѣленіи планетныхъ орбитъ доставляетъ несомнѣнныя выгоды, заключающіяся въ значительномъ сокращеніи работы вычисленія. Но изслѣдованія Гаспариса вѣроятно остались неизвѣстными Клинкерфусу, по крайней мѣрѣ указаній на нихъ мы не встрѣчаемъ въ его теоретической Астрономіи. Въ урокѣ 71 авторъ дѣлаетъ попытку примѣнить теорему Эйлера къ вычисленію тѣхъ функцій, которыя Гауссъ означилъ чрезъ P и Q; но вводя при этомъ разложеніе въ рядъ, онъ получаетъ такое уравненіе, отъ примѣненія котораго нельзя ожидать практической пользы. Клинкерфусъ, вѣроятно, самъ сознавалъ это, а потому и не примѣнилъ своихъ теоретическихъ соображеній къ вычисленіе какой либо орбиты.

Сочиненіе Фришгауфа (J. Frischauf. Grundriss der theoretischen Astronomie und der Geschichte der Planetentheorie) также не можетъ служить руководствомъ при изученіи теоретической астрономіи, ибо въ немъ рѣшеніе главныхъ вопросовъ этой части астрономіи представлено едвали не въ болѣе сжатомъ видѣ, чѣмъ въ сочиненіи Клинкерфуса. Въ главѣ о возмущеніяхъ изложенъ способъ Энке вычисленія возмущеній прямолинейныхъ координатъ при помощи механической квадратуры, но желающій ознакомиться съ этимъ способомъ никакъ не можетъ ограничиться чтеніемъ книги Фришгауфа, не обращаясь къ оригинальнымъ мемуарамъ Энке, ибо въ главѣ о возмущеніяхъ совершенно опущена такая существенная часть способа Энке, какъ вычисленіе новой системы оскулирующихъ элементовъ по измѣненіямъ координатъ въ теченіи извѣстнаго промежутка времени.

Если обратимся теперь къ учебной литературѣ небесной механики и по преимуществу къ литературѣ теоріи возмущеній, то едвали будемъ въ состояніи указать хотя одинъ трактатъ или учебникъ, который представлялъ бы современное состояніе вопроса о возмущеніяхъ. Причина этого впрочемъ понятна и заключается въ томъ, что рѣшеніе вопроса о возмущеніяхъ въ настоящее время далеко еще не имѣетъ той законченности, которую мы привыкли видѣть въ рѣшеніи другихъ астрономическихъ вопросовъ. Тотъ пріемъ вычисленія возмущеній, которымъ мы располагаемъ теперь, представляетъ два большіе недостатка: онъ не имѣетъ простоты соотвѣтствующей потребностямъ практики и едвали даетъ возможность при самомъ вычисленіи убѣдиться

въ достаточной точности получаемыхъ результатовъ. Вычисленіе возмущеній приводится теперь къ вычисленію коэффиціэнтовъ въ членахъ періодическихъ рядовъ, но сходимость этихъ рядовъ не изслѣдована и, останавливаясь на извѣстномъ членѣ ряда, мы не всегда можемъ быть увѣрены, что вычислили всѣ болѣе или менѣе примѣтныя части возмущеній той или другой координаты или элемента.

Во всякомъ случаѣ, благодаря многочисленнымъ изслѣдованіямъ Ганссна, мы имѣемъ возможность, хотя весьма сложнымъ пріемомъ, опредѣлять неравенства даже для орбитъ, имѣющихъ значительные эксцентриситеты и наклоненія къ эклиптикѣ.

Трудами первокласныхъ геометровъ и астрономовъ каковы Гауссъ, Бессель, Гансенъ и др., математическая астрономія доведена до высокой степени развитія. Результатами этихъ трудовъ являются многочисленные мемуары, разсѣяные въ періодическихъ изданіяхъ и многіе отдѣльно изданные трактаты. Для большинства, по многимъ причинамъ, все это мало доступно, а между тѣмъ существующая крайне бѣдная и, какъ мы видѣли, неудовлетворительная учебная астрономическая литература, не исключаетъ собою необходимости для изучающихъ астрономію обращаться къ рѣдкимъ и часто труднымъ для чтенія мемуарамъ и монографіямъ.

Имѣя это въ виду и желая по мѣрѣ силъ нашихъ содѣйствовать распространенію между соотечественниками познаній изъ области совершеннѣйшей изъ наукъ, мы послѣ долгихъ колебаній рѣшились приступить къ изданію этого сочиненія. Мы сознаемъ трудность и обширность задачи, которую себѣ поставили, но надежда хотя на малый успѣхъ первой попытки представить связный очеркъ аналитическаго процесса, послужившаго орудіемъ къ достиженію великихъ результатовъ въ области человѣческихъ знаній, пусть сглаживаетъ тотъ неровный путь, на который мы рѣшаемся теперь вступить....

Въ заключеніе считаемъ долгомъ выразить нашу глубокую признательность совѣту университета св. Владиміра за живое сочувствіе дѣлу и щедрое матеріальное пособіе, назначенное имъ для изданія этого сочиненія.

М. Хандриковъ.

Кіевская
астрономическая обсерваторія.
Въ Февралѣ 1874 года.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

Астрономія сферическая.

I.

Различныя системы координатъ, служащія для опредѣленія положенія точки на сферѣ небесной. Преобразованіе однихъ координатъ въ другія.

1. Если представимъ себя на возвышенномъ и открытомъ мѣстѣ, или лучше, на поверхности открытаго моря, гдѣ никакой земной предметъ не препятствуетъ зрѣнію простираться до его предѣловъ, то мы увидимъ себя въ центрѣ окружности, которая служитъ основаніемъ обширному своду, называемому обыкновенно сферой небесной. Плоскость, въ которой расположена упомянутая окружность, называется обыкновенно видимымъ горизонтомъ. Когда солнце скроется подъ нимъ на западѣ, то на сферѣ небесной, начиная съ восточной ея части, появляются одна за другой блестящія точки, изъ которыхъ одни мы называемъ условно неподвижными звѣздами, а другія планетами, основывая это названіе на томъ, что онѣ блуждаютъ между неподвижными звѣздами и болѣе или менѣе быстро измѣняютъ свое положеніе между ними. Иногда между неподвижными звѣздами являются внезапно свѣтила разнообразныхъ формъ и нерѣдко громадныхъ размѣровъ, которыя мы называемъ кометами. Первое ихъ появленіе никакое знаніе человѣческое предсказать не можетъ. Всѣ эти свѣтила: неподвижныя звѣзды, кометы, планеты съ ихъ спутниками, къ числу которыхъ относится и луна, находятся далеко за предѣлами земной атмосферы и размѣщены въ пространствѣ на громадныхъ и разнообразныхъ по величинѣ разстояніяхъ какъ одно отъ другаго, такъ и отъ земли, на которой мы живемъ. Всестороннее изученіе этихъ свѣтилъ составляетъ предметъ астрономіи. Одинъ изъ вопросовъ этой науки касается законовъ перемѣщенія свѣтилъ въ пространствѣ. Легко замѣтить передвиженія нѣкоторыхъ изъ этихъ свѣтилъ на сферѣ небесной, но для того, чтобы отличить кажущіяся перемѣщенія отъ дѣйствительныхъ и изучить законы тѣхъ и другихъ, потребовалось много времени, труда и находчивости.

Для опредѣленія положенія точки въ пространствѣ необходимы три координаты или три кратчайшія разстоянія этой точки отъ трехъ взаимно пересѣкающихся плос-

костей. Для опредѣленія положенія точки на сферѣ, достаточно знать кратчайшія разстоянія этой точки, считаемыя по сферѣ отъ двухъ большихъ круговъ этой сферы. Имѣя въ виду опредѣленіе положенія свѣтила на сферѣ небесной, мы будемъ разсматривать три системы такихъ круговъ и три системы имъ соотвѣтствующихъ координатъ.

Если проведемъ чрезъ мѣсто наблюденія касательную плоскость къ поверхности сфероида, на которомъ находимся, то эта плоскость пересѣчется съ видимой сферой небесной по кругу, называемому *видимымъ горизонтомъ* мѣста наблюденія. Плоскость параллельная этой касательной и проходящая чрезъ центръ земли пересѣчется со сферой небесной по большому кругу, называемому *истиннымъ* горизонтомъ мѣста наблюденія. Плоскость горизонта мы примемъ за одну изъ основныхъ плоскостей первой системы координатъ. Если нормаль, проведенную черезъ мѣсто наблюденія къ поверхности земли, продолжимъ мысленно до пересѣченія съ видимой сферой небесной, то въ пересѣченіяхъ получимъ двѣ точки, одну надглавную называемъ *зенитомъ мѣста наблюденія*, другую діаметрально противуположную первой—*надиромъ*. Большой кругъ сферы небесной, проходящій черезъ зенитъ мѣста наблюденія и произвольную точку сферы небесной, называется *кругомъ высоты* этой точки. Извѣстно, что система точекъ земнаго сфероида, остающаяся въ покоѣ при суточномъ вращательномъ движеніи этого сфероида, называется *осью вращенія* земли. Двѣ точки, въ которыхъ пересѣкается съ видимой сферой небесной, эта, мысленно продолженная ось, называются *полюсами міра*, одинъ—сѣвернымъ, другой—южнымъ. Большой кругъ сферы небесной, проведенный черезъ зенитъ мѣста наблюденія и полюсъ міра, называется *меридіаномъ мѣста* наблюденія. Мы примемъ меридіанъ мѣста за вторую координатную плоскость первой системы. Разстояніе свѣтила до горизонта, считаемое по кругу высоты, называется *высотою свѣтила.* Дополненіе высоты свѣтила до 90° называется *зенитнымъ разстояніемъ* этого свѣтила. Высота свѣтила, измѣняется отъ 0° до 90° и счетъ ея начинается отъ горизонта, такъ что свѣтило, находящееся въ плоскости горизонта, имѣетъ высоту равную нулю. Разстояніе отъ меридіана мѣста до круга высоты, проведеннаго черезъ опредѣляемую точку, считаемое по горизонту, называется *азимутомъ* этой опредѣляемой точки. По большей части азимуты считаются отъ южной части меридіана къ западу, отъ 0 до 360°. Если свѣтило находится въ южной части самаго меридіана, то азимутъ его равенъ нулю, когда же свѣтило проходитъ черезъ сѣверную часть меридіана, тогда азимутъ его равенъ 180°. Замѣтимъ еще, что плоскость, проведенная черезъ линію указывающую направленіе къ зениту или отвѣсъ и перпендикулярно къ плоскости меридіана мѣста, называется плоскостію *перваго вертикала.*

Если кругъ $SWNO$ (фиг. 1) представляетъ собою горизонтъ, кругъ ZPQ—меридіанъ мѣста, точки $P, Z, S,$—полюсъ, зенитъ и разсматриваемое свѣтило, то дуга S_1M есть высота свѣтила, дуга SM—западный азимутъ его и дуга S_1Z зенитное разстояніе свѣтила.

Итакъ, за координатныя плоскости первой системы мы принимаемъ горизонтъ и меридіанъ мѣста наблюденія, а координаты отнесенныя къ этимъ плоскостямъ называемъ высотою и азимутомъ. Полюсами горизонту служатъ точки зенита и надира, а полюсы меридіана мѣста суть точки востока и запада, т. е. тѣ точки, въ которыхъ первый вертикалъ пересѣкается съ горизонтомъ. На нашемъ чертежѣ точка W представляетъ точку запада.

Если вообразимъ плоскость, проведенную черезъ центръ земли перпендикулярно къ оси вращенія земнаго сфероида, то эта плоскость пересѣчется съ видимой сферой небесной по окружности большаго круга, называемаго *экваторомъ.* Плоскость экватора мы примемъ за основную плоскость второй системы координатъ. Большой кругъ, пропроведенный черезъ полюсъ міра и разсматриваемое свѣтило называется *кругомъ склоненія* этого свѣтила, а разстояніе отъ свѣтила до экватора считаемаго по этому кругу — *склоненіемъ свѣтила.* Склоненія считаются отъ 0° до +90° и —90°. Склоненія свѣтилъ, расположенныхъ въ сѣверномъ полушаріи относительно экватора, мы считаемъ положительными, а въ южномъ — отрицательными.

Въ теченіи года центръ солнца перемѣщается на сферѣ небесной по окружности большаго круга, пересѣкающагося съ экваторомъ подъ угломъ приблизительно въ 23° 27′. Этотъ кругъ называется *эклиптикой,* а уголъ, который она составляетъ съ экваторомъ—*наклоненіемъ* эклиптики къ экватору. Та точка пересѣченія эклиптики съ экваторомъ, черезъ которую проходитъ солнце, вступая изъ южной полусферы небесной въ сѣверную, называется точкой *весенняго равноденствія.* Разстояніе, считаемое по экватору, отъ точки весенняго равноденствія до круга склоненія, проведеннаго черезъ свѣтило, называется *прямымъ восхожденіемъ* этого свѣтила и принимается за другую координату разсматриваемой нами теперь второй системы. Прямыя восхожденія считаются, начиная отъ равноденственной точки, по направленію противуположному видимому суточному движенію свода небеснаго, т. е. отъ запада къ востоку и отъ 0° до 360°. Итакъ за координаты, отнесенныя къ экватору и кругу склоненій, мы принимаемъ склоненіе и прямое восхожденіе свѣтила. Впрочемъ вмѣсто прямаго восхожденія за другую координату въ этой системѣ можно принять уголъ при полюсѣ міра, заключающійся между кругомъ склоненія, проведеннымъ чрезъ разсматриваемое свѣтило и меридіаномъ мѣста. Этотъ уголъ называется *часовымъ угломъ свѣтила.* Часовые углы считаются обыкновенно отъ южной части меридіана по направленію къ западу отъ 0° до 360°. Часовой уголъ иногда получаетъ особое названіе,—такъ часовой уголъ, заключающійся между кругомъ склоненія проведеннымъ черезъ точку весенняго равноденствія и меридіаномъ мѣста или, какъ говорятъ, часовой уголъ точки весенняго равноденствія, называется въ астрономіи *звѣзднымъ временемъ,* часовой уголъ центра истиннаго, видимаго нами солнца, называется истиннымъ солнечнымъ временемъ и т. д.

Положимъ, что кругъ PZN (фиг. 2) представляетъ меридіанъ мѣста, въ P пусть будетъ сѣверный полюсъ экватора; кругъ $EQ\nu$ пусть будетъ экваторъ, точка весенняго равноденствія пусть будетъ въ ν, разсматриваемое свѣтило въ S. Дуга SM представитъ собою склоненіе свѣтила, а дуга νM, выраженная въ градусахъ или часахъ, принимая каждый часъ равнымъ 15 градусамъ, представитъ собою прямое восхожденіе свѣтила. Уголъ SPZ есть часовой уголъ свѣтила.

За основную плоскость третей системы координатъ мы принимаемъ эклиптику. Большой кругъ, проведенный черезъ свѣтило и полюсъ эклиптики, называется *кругомъ широты* свѣтила. Разстояніе, считаемое по кругу широты отъ эклиптики до свѣтила, принимается за одну изъ координатъ отнесенныхъ къ эклиптикѣ и называется *широтою свѣтила.* Широты считаются по обѣимъ сторонамъ эклиптики отъ нуля до +90° и—90°. Сѣверныя широты принимаются положительными и южныя—отрицательными. Широта свѣтила, находящагося въ эклиптикѣ, равна нулю. Такъ какъ центръ

солнца постоянно остается въ эклиптикѣ, то широта его постоянно равна нулю. За другую координату разсматриваемой системы принимается разстояніе, считаемое по эклиптикѣ отъ точки весенняго равноденствія, до круга широты, проведеннаго черезъ свѣтило. Эта координата называется *долготою свѣтила.* Долготы считаются по эклиптикѣ отъ точки весенняго равноденствія, также как и прямыя восхожденія, въ направленіи противуположномъ суточному движенію свода небеснаго, т. е. отъ запада къ востоку, отъ 0° до 360°. Пусть $PPQE$ (фиг. 3) представляетъ собою большой кругъ сферы небесной, проведенный черезъ полюсы экватора и эклиптики. Пусть кругъ QE♈ будетъ эклиптика, P ея полюсъ и ♈ точка весенняго равноденствія. Пусть наконецъ разсматриваемое свѣтило находится въ S. Тогда дуга SM представитъ широту, а дуга ♈M, при извѣстномъ условіи, долготу этого свѣтила.

И такъ, положенія свѣтилъ на сферѣ небесной мы относимъ къ тремъ системамъ координатныхъ плоскостей. За основную плоскость одной системы считаемъ горизонтъ, за основную плоскость другой—принимаемъ экваторъ и наконецъ за основную плоскость третей—выбираемъ эклиптику; координаты этихъ системъ суть: высота и азимутъ, склоненіе и часовой уголъ или прямое восхожденіе и наконецъ широта и долгота. Координаты высота и азимутъ, а также часовой уголъ измѣняютъ свою величину отъ суточнаго движенія свода небеснаго. Остальныя координаты, отнесенныя къ плоскостямъ участвующимъ въ суточномъ движеніи, отъ него не измѣняются.

2. Посмотримъ теперь какимъ образомъ по даннымъ координатамъ одной системы могутъ быть вычисляемы координаты другой системы. Рѣшеніе этого вопроса приводится къ рѣшенію сферическаго треугольника. Если назовемъ стороны какаго либо сферическаго треугольника чрезъ a, b, c и углы имъ противуположные чрезъ $A, B, C,$ то соотношенія между частями этого треугольника, которыми мы почти исключительно будемъ пользоваться при нашемъ изложеніи системы Астрономіи, имѣютъ видъ:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \cos C &= \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A \qquad (1) \\ \sin a \sin C &= \sin c \sin A \end{aligned}$$

Посмотримъ, какимъ образомъ, основываясь на этихъ выраженіяхъ, могутъ быть вычислены склоненіе и часовой уголъ или прямое восхожденіе свѣтила по даннымъ азимуту и высотѣ или зенитному разстоянію этого свѣтила.

Проведемъ, на фиг. 2, черезъ положеніе S разсматриваемаго свѣтила кругъ склоненія PS и кругъ высоты ZS, тогда составится треугольникъ ZPS, заключающійся между полюсомъ міра, зенитомъ и свѣтиломъ. Этотъ треугольникъ извѣстенъ подъ именемъ *параллактическаго.* Означимъ чрезъ z зенитное разстояніе свѣтила, чрезъ h его высоту, чрезъ δ склоненіе, чрезъ A азимутъ, чрезъ t часовой уголъ свѣтила, чрезъ φ астрономическую широту мѣста. При такомъ означеніи стороны параллактическаго треугольника будутъ:

$$ZS = z = 90^\circ - h; \qquad PS = 90^\circ - \delta; \qquad PZ = 90^\circ - \varphi$$

углы противуположные двумъ первымъ сторонамъ суть

$$ZPS = t; \qquad PZS = 180^\circ - A$$

ибо азимутъ свѣтила на фиг. 2 представляется угломъ SZR. Противъ стороны PZ въ разсматриваемомъ треугольникѣ лежитъ уголъ ZSP, называемый параллактическимъ

угломъ. Наша задача заключается въ томъ, чтобы по даннымъ z и A или h и A найти t и δ; для этого, примѣняя къ треугольнику ZPS соотношенія (1), имѣемъ:

$$\cos PS = \cos PZ \cos ZS + \sin PZ \sin ZS \cos PZS$$
$$\sin PS \cos ZPS = \sin PZ \cos ZS - \sin ZS \cos PZ \cos PZS$$
$$\sin PS \sin ZPS = \sin PZS \sin ZS$$

или, вводя сюда сдѣланныя означенія, получимъ:

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos z - \cos \varphi \sin z \cos A$$
$$\cos \delta \cos t = \cos \varphi \cos z + \sin \varphi \sin z \cos A$$
$$\cos \delta \sin t = \sin z \sin A.$$

Такъ какъ широта мѣста φ предполагается данною, то вторыя части этихъ уравненій содержатъ только извѣстныя величины. Чтобы сдѣлать эти уравненія удобными для логариѳмическихъ вычисленій, положимъ въ нихъ:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \cos z &= m \cos M \\ \sin z \cos A &= m \sin M \end{aligned}$$

тогда предыдущія уравненія обратятся въ

$$(3)\qquad \begin{aligned} \sin \delta &= m \sin (\varphi - M) \\ \cos \delta \cos t &= m \cos (\varphi - M) \\ \cos \delta \sin t &= \sin z \sin A. \end{aligned}$$

Совокупностью уравненій (2) и (3) вполнѣ рѣшается нашъ вопросъ объ опредѣленіи склоненія и часоваго угла свѣтила по даннымъ его зенитному разстоянію и азимуту. При всѣхъ положеніяхъ подобныхъ тѣмъ, которыя мы сдѣлали вводя вспомогательныя величины m и M, мы будемъ принимать m за величину существенно положительную и тогда по знакамъ первыхъ частей уравненій (2) будемъ судить о той четверти окружности, въ которой лежитъ уголъ M. Если m и M вычислены по уравненіямъ (2), то δ опредѣлимъ по первому изъ уравненій (3), а для опредѣленія t будемъ пользоваться двумя послѣдними изъ уравненій (3) или выраженіемъ, которое изъ нихъ получается чрезъ раздѣленіе одно на другое и имѣетъ видъ

$$(4)\qquad \operatorname{tang} t = \frac{\sin z \sin A}{m \cos (\varphi - M)}$$

Хотя при помощи этого уравненія величина t опредѣляется по тангенсу, но сомнѣнія при выборѣ четверти окружности, въ которой лежитъ уголъ t быть не можетъ. Эта четверть вполнѣ опредѣляется знаками вторыхъ частей послѣднихъ двухъ изъ уравненій (3). Такъ какъ $\cos \delta$ есть всегда величина существенно положительная, ибо δ измѣняется въ предѣлахъ $-90°$ и $+90°$, то знакъ вторыхъ частей уравненій (3) долженъ быть приписанъ $\sin t$ и $\cos t$.

Раздѣливъ второе изъ уравненій (2) на второе изъ уравненій (3), получимъ

$$(5)\qquad \frac{\sin z \cos A}{\cos \delta \cos t} = \frac{\sin M}{\cos (\varphi - M)}$$

уравненіе, которое можетъ служить для повѣрки вычисленія. Чтобы сдѣлать эту повѣрку, стоитъ только вычисленныя величины t, δ и M вмѣстѣ съ данными z, A и φ внести въ это уравненіе и если оно при этомъ тождественно удовлетворится, то вы-

численіе произведено вѣрно. Если мы этимъ способомъ вычислили часовой уголъ свѣтила, то по немъ не трудно опредѣлить и прямое восхожденіе, но для этого нужно имѣть еще одно данное, надо знать то звѣздное время, которому соотвѣтствуютъ данныя z и A.

Мы сказали, что звѣзднымъ временемъ называется часовой уголъ точки весенняго равноденствія, прямое же восхожденіе свѣтила есть дуга экватора, считаемая по направленію отъ запада къ востоку, начиная отъ точки весенняго равноденствія до пересѣченія съ экваторомъ круга склоненія проведеннаго черезъ свѣтило; наконецъ часовой уголъ свѣтила измѣряется также дугою экватора, считаемою по направленію суточнаго движенія свода небеснаго отъ точки пересѣченія южной части меридіана мѣста съ экваторомъ до круга склоненія проведеннаго черезъ свѣтило. И такъ, если M (фиг. 4) есть пересѣченіе южной части меридіана мѣста съ экваторомъ, S пересѣченіе круга склоненія проведеннаго черезъ свѣтило съ экваторомъ и ν точка весенняго равноденствія, то принявъ, что суточное движеніе происходитъ по направленію стрѣлки, т. е. отъ O къ M и къ W, по нашему чертежу имѣемъ

$$M\nu = MS + \nu S$$

называя звѣздное время чрезъ θ, прямое восхожденіе свѣтила чрезъ α и часовой уголъ какъ прежде, чрезъ t, представляемъ предыдущее соотношеніе въ видѣ

$$\theta = t + \alpha \tag{6}$$

и такъ: *звѣздное время всегда равно прямому восхожденію свѣтила сложенному съ его часовымъ угломъ.* Такъ какъ часовые углы свѣтила считаются отъ южной части меридіана, то въ моментъ прохожденія свѣтила черезъ ту часть меридіана, которая заключается между южной точкой горизонта и сѣвернымъ полюсомъ экватора или, какъ говорятъ, въ моментъ верхней кульминаціи свѣтила часовой уголъ его равенъ нулю и предыдущее уравненіе показываетъ, что *прямое восхожденіе свѣтила всегда равняется звѣздному времени прохожденія свѣтила черезъ меридіанъ или звѣздному времени верхней кульминаціи свѣтила.* Итакъ по даннымъ θ и t изъ соотношенія (6) опредѣляется прямое восхожденіе свѣтила.

Легко показать геометрическое значеніе вспомогательныхъ величинъ m и M введенныхъ въ уравненія (4). Проведемъ для этого черезъ свѣтило S (фиг. 2) большой кругъ Sp перпендикулярный къ меридіану мѣста. Тогда составится сферическій треугольникъ ZpS; назовемъ сторону Sp чрезъ a и сторону Zp чрезъ b. Примѣняя къ этому треугольнику уравненія (1) и помня, что уголъ противулежащій сторонѣ Sz есть прямой, имѣемъ

$$\cos z = \cos a \cos b$$
$$\sin z \cos A = \cos a \sin b$$

откуда

$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} z \cos A$$

уравненія же (2) даютъ

$$\operatorname{tang} M = \operatorname{tang} z \cos A$$

откуда заключаемъ, что

$$M = b = Zp \quad \text{и} \quad m = \cos a.$$

Рѣшеніе обратнаго вопроса, т. е. опредѣленіе высоты и азимута свѣтила по данному склоненію и прямому восхожденію или часовому углу можетъ быть выполнено также чрезъ примѣненіе уравненій (1) къ параллактическому треугольнику. Изъ этого треугольника для разсматриваемаго случая, удерживая предыдущія означенія, имѣемъ

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$
$$\sin z \cos A = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t$$
$$\sin z \sin A = \cos\delta \sin t$$

вводя сюда вспомогательныя величины подъ условіемъ

(7) $$\sin\delta = m \sin M \qquad \cos\delta \cos t = m \cos M$$

имѣемъ

(8) $$\cos z = m \cos(\varphi - M) \qquad \sin z \cos A = m \sin(\varphi - M) \qquad \sin z \sin A = \cos\delta \sin t$$

раздѣливъ два послѣднія изъ этихъ уравненій одно на другое, находимъ

(9) $$\operatorname{tang} A = \frac{\sin t \cos\delta}{m \sin(\varphi - M)}$$

Такъ какъ $\sin z$ есть всегда величина существенно положительная, то знаки произведеній $\sin z \cos A$ и $\sin z \sin A$ зависятъ исключительно отъ знаковъ тригонометрическихъ линій $\sin A$ и $\cos A$, а слѣдовательно знаками этихъ произведеній вполнѣ опредѣляется четверть окружности, въ которой находится искомый азимутъ A. Если азимутъ свѣтила найденъ, то зенитное разстояніе или высота можетъ быть опредѣлена или по первому изъ уравненій (8), или по одному изъ двухъ послѣднихъ уравненій той же системы. Раздѣливъ второе изъ уравненій (7) на второе, изъ уравненій (8) получимъ

(10) $$\frac{\cos\delta \cos t}{\sin z \cos A} = \frac{\cos M}{\sin(\varphi - M)}$$

уравненіе, которое можетъ служить для контроля вычисленія.

Чтобы видѣть геометрическое значеніе введенныхъ вспомогательныхъ величинъ, обратимся къ треугольнику Psp (фиг. 2). Удерживая сдѣланныя означенія, видимъ, что сторона $Pp = 90^\circ - (\varphi - b)$, а потому изъ этого треугольника прямоугольнаго при p, чрезъ примѣненіе къ нему уравненій (1) имѣемъ

$$\sin\delta = \cos a \sin(\varphi - b)$$
$$\cos\delta \cos t = \cos a \cos(\varphi - b)$$

откуда

$$\operatorname{tang}(\varphi - b) = \operatorname{tang}\delta . \sec t$$

уравненія же (7) даютъ

$$\operatorname{tang} M = \operatorname{tang}\delta . \sec t$$

поэтому заключаемъ, что

$$M = (\varphi - b); \qquad m = \cos a$$

Такъ какъ разстояніе отъ зенита до экватора равно широтѣ мѣста, то заключаемъ,

что M есть дуга меридіана мѣста, заключающаяся между экваторомъ и точкой пересѣченія съ меридіаномъ большаго круга проведеннаго черезъ свѣтило перпендикулярно къ меридіану.

Если требуется опредѣлить для даннаго момента звѣздпаго времени считаемаго въ данномъ мѣстѣ высоту и азимутъ свѣтила по даннымъ его склоненію и прямому восхожденіе, то прежде всего по соотношенію (6) вычислимъ часовой уголъ свѣтила соотвѣтствующій данному моменту, а затѣмъ рѣшимъ вопросъ по изложенному сейчасъ способу.

Поясним эти соображенія на частномъ примѣрѣ. Рѣшимъ для этого слѣдующую задачу. Звѣзда α Leonis 27 февраля 1877 года имѣетъ склоненіе $+12^\circ\,33'\,55''.9$ и прямое восхожденіе $10^h\,1^m\,51^s.51$, требуется по этимъ даннымъ вычислить азимутъ и высоту этой звѣзды надъ Кіевскимъ горизонтомъ для $5^h\,30^m$ Кіевскаго звѣзднаго времени того же 27 февраля 1877 года. Прежде всего по соотношенію (6) опредѣляемъ часовой уголъ звѣзды соотвѣтствующій $5^h\,30^m$ звѣзднаго времени и находимъ

$$t = -\,4^h\,31^m\,51^s.51$$

знакъ минусъ показываетъ, что эта величина часоваго угла должна считаться отъ южной части меридіана къ востоку. Если хотимъ имѣть часовой уголъ считаемый отъ южной части меридіана къ западу, то взявъ дополненіе до 24^h, получимъ

$$t = 19^h\,28^m\,8^s.49$$

имѣя это, будемъ вычислять m и M изъ уравненій (7). Для этого находимъ

$$\lg\sin\delta = 9.3375711;\quad \lg\cos\delta = 9.9894712$$

обращая въ градусы часовой уголъ выраженный во времени, имѣемъ

$$t = 292^\circ\,2'\,6''.06$$

а потому

$$\lg\cos t = 9.5742371$$

имѣя все это, по уравненіямъ (7) находимъ

$$\lg m\sin M = 9.3375711$$
$$\lg m\cos M = 9.5637083$$

вычитая второе изъ перваго, получаемъ

$$\lg\operatorname{tang} M = 9.7738628$$

такъ какъ произведенія $m\sin M$ и $m\cos M$ оба въ разсматриваемомъ случаѣ положительны, то положительны также $\sin M$ и $\cos M$, а потому M находится въ первой четверти окружности и, находя эту дугу по тангенсу, имѣемъ

$$M = 30^\circ\,42'\,53''.05$$

такъ какъ M менѣе 45°, то множителя m удобнѣе опредѣлить по произведенію $m\cos M$. Для этого находимъ

$$\lg\cos M = 9.9343576$$

вычитая это изъ найденнаго уже $\lg m\cos M$, получимъ

$$\lg m = 9.6293507$$

Послѣ этого переходимъ къ рѣшенію самой задачи,—къ вычисленіе зенитнаго разстоянія z и азимута A изъ уравненій (8). Замѣтимъ, что широта Кіевской обсерваторіи есть $50^\circ 27' 10''.26$ слѣдовательно

$$\varphi - M = 19^\circ 44' 17''.21$$
$$\lg \sin (\varphi - M) = 9.5285585$$
$$\lg \cos (\varphi - M) = 9.9737033$$
$$\lg \sin t = 9.9670586_n$$

имѣя это, по уравненіямъ (8) получаемъ

$$\lg \cos z = 9.6030540$$
$$\lg \sin z \cos A = 9.1579092$$
$$\lg \sin z \sin A = 9.9565298_n$$

вычитая второе изъ третьяго, имѣемъ

$$\lg \operatorname{tang} A = 0.7986206_n$$

уголъ соотвѣтствующій этому тангенсу есть

$$-80^\circ 57' 57''.44$$

но такъ какъ $\sin A$ отрицателенъ и $\cos A$ положителенъ, то A лежитъ въ четвертой четверти окружности, а потому получимъ искомый азимутъ, вычитая сейчасъ найденный уголъ изъ 360°. И такъ искомый азимутъ свѣтила, считаемый отъ южной части меридіана къ западу, есть

$$A = 279^\circ 2' 2''.56$$

Такъ какъ при опредѣленіи z не можетъ быть сомнѣнія въ выборѣ четверти окружности, то эту величину найдемъ по косинусу. Отыскивая дугу соотвѣтствующую $\lg \cos z = 9.6030540$, имѣемъ

$$z = 66^\circ 21' 52''.24$$

Вносл найденныя величины въ уравненіе (10), получимъ

$$\lg \frac{\cos \delta \cos t}{\sin z \cos A} = 0.4057996$$

$$\lg \frac{\cos M}{\sin (\varphi - M)} = 0.4057991$$

такое согласіе двухъ частей повѣрительнаго уравненія указываетъ на вѣрность найденныхъ результатовъ. Чтобы знать высоту надъ горизонтомъ α Leonis въ разсматриваемый моментъ, стоитъ только взять дополненіе найденной величины z до 90° и тогда имѣемъ

$$h = 23^\circ 38' 7''.76.$$

Перейдемъ теперь къ рѣшенію другаго вопроса и посмотримъ какимъ образомъ по даннымъ склоненію и прямому восхожденію свѣтила могутъ быть вычислены его широта и долгота. Проведемъ черезъ положеніе свѣтила въ S (фиг. 3) круги широты PS и склоненія $P'S$, тогда составится сферическій треугольникъ $PP'S$. Если склоненіе и прямое восхожденіе свѣтила означимъ по прежнему чрезъ δ и α, широту и долготу

чрезъ β и λ и наклоненіе эклиптики къ экватору чрезъ ε, то въ упомянутомъ сейчасъ сферическомъ треугольникѣ сторонами будутъ $PP' = \varepsilon$; $PS = 90 - \beta$ и $P'S = 90 - \delta$. Такъ какъ полюсомъ большому кругу $EP'PQ$ служитъ точка весенняго равноденствія, то соединивъ эту точку съ полюсами экватора и эклиптики, получимъ при этихъ послѣднихъ прямые углы $\nu P'P$ и $\dot{P}'P\nu$. Въ разсматриваемомъ треугольникѣ уголъ $SP'P = \nu P'P - \nu P'S = 90 - \alpha$; $P'PS = P'P\nu + \nu PS = 90^0 + \lambda$. Примѣняя къ этому треугольнику соотношенія (1), имѣемъ

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \sin\delta\cos\varepsilon + \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha \\ \cos\beta\sin\lambda &= -\sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha \\ \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha \end{aligned}$$

полагая здѣсь

$$\begin{aligned} \sin\delta &= n\sin N \\ \sin\alpha\cos\delta &= n\cos N \end{aligned} \tag{11}$$

находимъ

$$\begin{aligned} \sin\beta &= n\sin(N+\varepsilon) \\ \sin\lambda\cos\beta &= n\cos(N+\varepsilon) \\ \cos\lambda\cos\beta &= \cos\delta\cos\alpha \end{aligned} \tag{12}$$

уравненія, которыхъ вполнѣ достаточно для опредѣленія искомыхъ λ и β. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ сомнѣнія въ выборѣ четверти окружности для β быть не можетъ, то эта координата прямо можетъ быть опредѣлена по синусу изъ перваго уравненія, а для опредѣленія λ два другія уравненія даютъ

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{n\cos(N+\varepsilon)}{\cos\delta\cos\alpha}$$

Чтобы имѣть повѣрительное уравненіе, раздѣлимъ второе изъ уравненій (12) на второе изъ уравненій (11), что даетъ

$$\frac{\cos\beta\sin\lambda}{\cos\delta\sin\alpha} = \frac{\cos.(N+\varepsilon)}{\cos N} \tag{13}$$

Остается показать геометрическое значеніе введенныхъ вспомогательныхъ величинъ; соединимъ для этого большимъ кругомъ положеніе свѣтила съ точкой весенняго равноденствія. Назовемъ въ треугольникѣ νSm (фиг. 3) сторону νS чрезъ a и уголъ $S\nu m$ чрезъ b, изъ этого треугольника имѣемъ

$$\begin{aligned} \sin a\cos b &= \cos\delta\sin\alpha \\ \sin a\sin b &= \sin\delta \end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{tang} b = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\sin\alpha},$$

а изъ уравненій (11) имѣемъ

$$\operatorname{tang} N = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\sin\alpha},$$

поэтому заключаемъ, что $b = N$ и $\sin a = n$.

Чтобы пояснить это преобразованіе примѣромъ, найдемъ широту и долготу звѣзды α Leonis для 27 февраля 1877 года. Мы видѣли, что для этого времени прямое восхожденіе и склоненіе разсматриваемой звѣзды суть:

$$\alpha = 10^h\ 1^m \cdot 51^s.51$$
$$\delta = +12^\circ\ 33'\ 55''.9$$

Наклоненіе эклиптики къ экватору въ упомянутый день есть

$$\varepsilon = 23^\circ\ 27'\ 27''.94.$$

Прежде всего вычисляемъ вспомогательныя величины n и N по уравненіямъ (11) и для этого находимъ

$$\alpha = 150^\circ\ 27'\ 52''.65$$
$$\lg \sin\delta = 9.3375711$$
$$\lg \cos\delta = 9.9894712$$
$$\lg \sin\alpha = 9.6928126$$

послѣ чего изъ уравненій (11) находимъ

$$\lg n \sin N = 9.3375711; \quad \lg n \operatorname{sos} N = 9.6822838,$$

вычитая второе изъ этихъ равенствъ изъ перваго, получимъ

$$\lg \operatorname{tang} N = 9.6552873,$$

принимая въ соображеніе знаки произведеній $n \sin N$ и $n \cos N$, отсюда заключаемъ, что

$$N = 24^\circ\ 19'\ 49''.21.$$

такъ какъ $N < 45^\circ$, то n слѣдуетъ опредѣлить по произведенію $n \cos N$, для этого имѣемъ

$$\lg \cos N = 9.9596068,$$

вычитая это изъ $\lg n \cos N$, получаемъ

$$\lg n = 9.7226770.$$

Имѣя это, перейдемъ къ опредѣленію β и λ изъ уравненій (12). Для этого находимъ

$$N + \varepsilon = 47^\circ\ 47'\ 17''.15$$
$$\lg \sin(N + \varepsilon) = 9.8696218$$
$$\lg \operatorname{ces}(N + \varepsilon) = 9.8272883$$
$$\lg \cos\alpha = 9.9395443_n$$

слѣдовательно по уравненіямъ (12)

$$\lg \cos\beta \sin\lambda = 9.5499653$$
$$\lg \cos\beta \cos\lambda = 9.9290155_n$$

откуда

$$\lg \operatorname{tang}\lambda = 9.6209498_n.$$

Принимая во вниманіе знаки произведеній $\cos\beta \sin\lambda$ и $\cos\beta \cos\lambda$, заключаемъ, что

$$\lambda = 157^\circ\ 19'\ 32''.51.$$

Что касается до широты β, то ее опредѣлимъ по синусу. Замѣтивъ, что по первому изъ выраженій (12)

$$\lg \sin\beta = 9.5922988$$

находимъ

$$\beta = 23^\circ\,1'\,24''.88$$

Чтобы повѣрить вычисленіе, обратимся къ уравненію (13); внося въ него найденныя величины, имѣемъ

$$\lg\frac{\cos\beta\sin\lambda}{\cos\delta\sin\alpha} = 9.8676821$$

$$\lg\frac{\cos(N+\varepsilon)}{\cos N} = 9.8676817$$

такое согласіе можно признать удовлетворительнымъ и все вычисленіе считать вѣрнымъ. Такимъ образомъ искомыя широта и долгота звѣзды α Leonis суть

$$\beta = 23^\circ\,1'\,24''.88; \qquad \lambda = 157^\circ\,19'\,32''.51$$

Для рѣшенія обратнаго вопроса, т. е. для опредѣленія склоненія и прямаго восхожденія свѣтила по даннымъ его широтѣ и долготѣ изъ треугольника $PP'S$, (фиг. 3), имѣемъ

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \cos\varepsilon\sin\beta - \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda \\ \cos\delta\sin\alpha &= \sin\varepsilon\sin\beta + \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda \\ \cos\delta\cos\alpha &= \cos\lambda\cos\beta \end{aligned} \qquad (14)$$

полагая здѣсь

$$\begin{aligned} \sin\beta &= n\sin N \\ \cos\beta\sin\lambda &= n\cos N \end{aligned} \qquad (15)$$

находимъ

$$\begin{aligned} \sin\delta &= n\sin(N-\varepsilon) \\ \cos\delta\sin\alpha &= n\cos(N-\varepsilon) \\ \cos\delta\cos\alpha &= \cos\beta\cos\lambda \end{aligned} \qquad (16)$$

уравненія, изъ которыхъ первое служитъ для опредѣленія δ и два другія для опредѣленія α. Чтобы имѣть повѣрительное уравненіе, раздѣлимъ второе изъ уравненій (16) на второе изъ уравненій (15) и тогда получимъ

$$\frac{\cos\delta\sin\alpha}{\cos\beta\sin\lambda} = \frac{\cos(N-\varepsilon)}{\cos N} \qquad (17)$$

если внесемъ въ это уравненіе найденныя величины, α, δ, N вмѣстѣ съ данными β, λ и ε, то при вѣрности вычисленія оно должно тождественно удовлетвориться.

Для опредѣленія геометрическаго значенія введенныхъ вспомогательныхъ величинъ n и N обратимся къ треугольнику νSM. Если назовемъ, какъ прежде, сторону νS чрезъ a и уголъ $S\nu M$ чрезъ B, то получимъ

$$\begin{aligned} \sin a\cos B &= \cos\beta\sin\lambda \\ \sin a\sin B &= \sin\beta \end{aligned}$$

откуда

$$\tang B = \frac{\tang\beta}{\sin\lambda}$$

изъ уравненій же (15) имѣемъ

$$\tang N = \frac{\tang \beta}{\sin \lambda}$$

откуда заключаемъ, что

$$N = D; \qquad n = \sin a.$$

Уравненія (14) для солнца принимаютъ весьма простой видъ. Центръ солнца всегда находится въ эклиптикѣ и широта его равна нулю. Если назовемъ склоненіе и прямое восхожденіе центра солнца чрезъ D и A, а его долготу чрезъ L, то принимая въ уравненіяхъ (14) $\beta = o$, приведемъ ихъ для центра солнца къ виду

$$\sin D = \sin \varepsilon \sin L$$
$$\cos D \sin A = \cos \varepsilon \sin L$$
$$\cos D \cos A = \cos L$$

откуда

$$\tang A = \cos \varepsilon \tang L$$
$$\tang D = \tang \varepsilon \sin A.$$

Этими уравненіями и можемъ пользоваться для вычисленія склоненія и прямаго восхожденія солнца по данному наклоненію эклиптики къ экватору и долготѣ центра солнца. Хотя прямое восхожденіе опредѣляется по тангенсу, но сомнѣнія въ выборѣ четверти окружности здѣсь быть не можетъ, ибо A находится въ одной четверти окружности съ L. Что касается до знака D, то онъ вполнѣ зависитъ отъ знака $\sin A$, ибо $\tang \varepsilon$ есть величина существенно положительная. Когда $\sin A$ положителенъ, то и D положительно, слѣдовательно центръ солнца находится въ сѣверномъ полушаріи относительно экватора въ то время, когда прямое восхожденіе солнца заключается между 0° и 180°. Если долгота солнца равна 90°, то въ этомъ случаѣ, какъ показываетъ первое изъ предыдущихъ уравненій

$$\tang A = +\infty$$

а слѣдовательно $A = 90^\circ$, тогда по второму изъ предыдущихъ уравненій

$$\tang D = \tang \varepsilon$$

слѣдовательно при долготѣ солнца равной 90° склоненіе этого свѣтила равно наклоненію эклиптики къ экватору.

Теперь слѣдовало бы показать способъ вычисленія широты и долготы свѣтила по даннымъ высотѣ и азимуту, но въ такомъ преобразованіи на практикѣ мы почти никогда не имѣемъ надобности, а потому не будемъ останавливаться на этомъ.

II.

Время и его измѣреніе. Различныя явленія зависящія отъ суточнаго движенія свода небеснаго.

3. Одни изъ координатныхъ плоскостей, относительно которыхъ мы опредѣляемъ мѣста свѣтилъ, вслѣдствіе суточнаго движенія свода небеснаго непрерывно измѣняютъ свое положеніе въ пространствѣ, другія въ суточномъ движеніи сферы небесной не участвуютъ; относительно этихъ послѣднихъ положенія свѣтилъ измѣняются непрерывно, а потому чтобы составить совершенно опредѣленное понятіе о мѣстѣ свѣтила на сферѣ небесной не всегда достаточно опредѣлить только координаты свѣтила относительно извѣстной системы плоскостей, но нерѣдко для упомянутой цѣли необходимо знать еще время, которому соотвѣтствуютъ опредѣленныя координаты. Подъ временемъ въ астрономіи мы разумѣемъ часовые углы опредѣленныхъ точекъ; такъ звѣзднымъ временемъ называемъ часовой уголъ точки весенняго равноденствія и т. д. Средства для измѣренія времени мы находимъ во вращательномъ движеніи земли около оси и въ видимомъ движеніи солнца. Время идетъ равномѣрно, а потому и должно измѣряться только такими движеніями, которыя сами происходятъ равномѣрно; какъ вполнѣ удовлетворяющее этому условію мы можемъ разсматривать кажущееся суточное движеніе звѣздъ обусловливающееся дѣйствительнымъ движеніемъ земли около оси. Наблюденія показываютъ, что вращательное движеніе земли около оси происходитъ равномѣрно и со временъ Гиппарха не измѣнило своей продолжительности. Время одного полнаго обращенія земли около оси мы назовемъ *звѣздными сутками.* Величина звѣздныхъ сутокъ равна промежутку времени протекающему между двумя послѣдовательными прохожденіями одной и той же звѣзды через одну и туже часть меридіана даннаго мѣста. За начало такихъ сутокъ считается моментъ прохожденія черезъ меридіанъ точки весенняго равноденствія. Сутки раздѣляются на 24 части или часа и звѣздное время протекшее отъ начала сутокъ до даннаго момента всегда равно часовому углу точки весенняго равноденствія выраженному во времени. Хотя точка весенняго равноденствія постоянно на небѣ ни чѣмъ не означается, но время ея вступленія на меридіанъ всегда будетъ извѣстно, если мы знаемъ прямыя восхожденія хотя нѣкоторыхъ звѣздъ. Очевидно, что точка весенняго равноденствія пройдетъ черезъ меридіанъ за столько часовъ, минутъ и секундъ прежде нежели какая нибудь звѣзда, сколько часовъ, минутъ и секундъ заключается въ прямомъ восхожденіи этой звѣзды, или въ дугѣ экватора показывающей разстояніе по извѣстному направленію

точки весенняго равноденствія отъ круга склоненія звѣзды. Измѣреніе времени звѣздными единицами въ гражданской жизни представляетъ однако одно очень важное неудобство, заключающееся въ томъ, что начало звѣздныхъ сутокъ не совпадаетъ каждый день съ однимъ и тѣмъ же опредѣленнымъ моментомъ сутокъ, но измѣняется со временемъ года и приходится то днемъ, то ночью. Такое неудобство, заставляетъ искать другихъ единицъ для измѣренія времени. Имѣя это въ виду естественно прежде всего обратиться къ солнцу, — суточною смѣняемостью свѣта и тьмы оно образуетъ день и ночь; періодическимъ возвращеніемъ къ точкѣ весенняго равноденствія солнце обусловливаетъ смѣняемость временъ года. Подобно предыдущему, солнечными сутками мы будемъ называть періодъ времени, заключающійся между двумя послѣдовательными прохожденіями центра солнца черезъ меридіанъ мѣста въ верхней кульминаціи. За начало солнечныхъ сутокъ принимается вступленіе центра солнца на меридіанъ. Сутки, такимъ образомъ опредѣленныя, называются *истинными солнечными сутками* и время протекшее отъ начала ихъ до даннаго момента равное часовому углу центра истиннаго солнца въ разсматриваемый моментъ, называется истиннымъ временемъ. Но прямое восхожденіе солнца не измѣняется равномѣрно, а потому истинныя солнечныя сутки не равны между собою и это неудобство заставляетъ искать какой либо искуственный пріемъ для измѣренія времени въ общежитіи.

Неравномѣрность измѣненія прямаго восхожденія солнца зависитъ отъ двухъ причинъ: отъ того, что солнце видимо движется въ плоскости не совпадающей съ экваторомъ, а наклоненной къ нему подъ извѣстнымъ угломъ и отъ того, что перемѣщенія солнца по эклиптикѣ неравномѣрны, ибо по одному изъ законовъ Кеплера не дуги, описываемыя центромъ солнца въ эклиптикѣ, а площади секторовъ, описанныхъ радіусомъ векторомъ солнца, пропорціональны временамъ. Конечно, сказанное здѣсь нами о законѣ Кеплера относится не къ кажущемуся движенію солнца, а къ дѣйствительному движенію земли въ эллиптической орбитѣ около солнца; но мы замѣняемъ дѣйствительное движеніе земли кажущимся движеніемъ солнца и вмѣсто долготы земли видимой изъ центра солнца всегда представляемъ себѣ разнящуюся отъ нея на 180° долготу солнца видимую изъ центра земли. Чтобы избѣжать неудобствъ, происходящихъ отъ неравномѣрнаго измѣненія прямыхъ восхожденій истиннаго солнца, мы представляемъ себѣ два другихъ воображаемыхъ солнца и движеніемъ ихъ измѣряемъ время. Одно такое воображаемое солнце мы представляемъ себѣ равномѣрно движущимся по эклиптикѣ, а другое также равномѣрно движущимся по экватору, при томъ допускаемъ, что между движеніями этихъ двухъ воображаемыхъ точекъ существуетъ извѣстное соотношеніе, — допускаемъ, что прямое восхожденіе солнца движущагося по экватору всегда равно долготѣ другаго воображаемаго солнца равномѣрно движущагося по эклиптикѣ. Воображаемое солнце равномѣрно движущееся по экватору мы называемъ *среднимъ солнцемъ*. Періодъ времени заключающійся между двумя послѣдовательными верхними кульминаціями средняго солнца, мы называемъ *средними сутками*. За начало среднихъ сутокъ мы принимаемъ моментъ вступленія средняго солнца на меридіанъ мѣста въ верхней кульминаціи. Время протекшее отъ начала среднихъ сутокъ до даннаго момента, равно часовому углу средняго солнца, выраженному во времени. И такъ средній полдень наступаетъ въ тотъ моментъ, когда среднее солнце проходитъ черезъ меридіанъ, т. е. когда звѣздное время равно прямому восхожденію средняго солнца. Астрономическія среднія сутки считаются отъ од-

наго полудня до другаго, гражданскія же среднія сутки начинаются 12 часами раньше. Такимъ образомъ 9^h утра 1-го февраля по гражданскому счету будутъ соотвѣтствовать 21 часу 31-го января по счету астрономическому. Въ теоретической астрономіи мы представимъ выраженія, посредствомъ которыхъ, зная законы движенія солнца, можно опредѣлить какъ долготу воображаемаго солнца равномѣрно движущагося по эклиптикѣ, такъ и прямое восхожденіе средняго солнца. На основаніи этихъ выраженій можно составить таблицы, въ которыхъ для каждаго дня года давались бы прямыя восхожденія истиннаго и средняго солнца. Чтобы найти соотношеніе между истиннымъ солнечнымъ и среднимъ временемъ, означимъ чрезъ θ звѣздное время, соотвѣтстоующее данному моменту, чрезъ α и α' прямыя восхожденія истиннаго и средняго солнца для того же момента, чрезъ t и t' часовые углы истиннаго и средняго солнца, другими словами, истинное и среднее время, считаемыя въ разсматриваемый моментъ и соотвѣтствующія звѣздному времени θ. Сдѣлавъ такія положенія, имѣемъ:

$$\theta = t + \alpha; \qquad \theta = t' + \alpha'$$

вычитая одно изъ этихъ выраженій изъ другаго, находимъ

$$t + \alpha - t' - \alpha' = 0$$

откуда

$$t - t' = \alpha' - \alpha$$

а потому заключаемъ, что разность между истиннымъ и среднимъ временемъ въ данный моментъ равна разности прямыхъ восхожденій истиннаго и средняго солнца взятой съ обратнымъ знакомъ. Эта послѣдняя разность навывается *уравненіемъ времени* и дается для полудня каждаго дня въ астрономическихъ эфемеридахъ. За лучшія астрономическія эфемериды въ настоящее время слѣдуетъ считать англійскій морской мѣсяцесловъ Nautical Almanac, въ немъ дано уравненіе времени (Equation of Time) на I-й или лѣвой страницѣ каждаго мѣсяца, въ предпослѣднемъ столбцѣ этой страницы, на всѣ дни мѣсяца для истиннаго гринвичскаго полудня (Apparent Noon) и смотря по указанію поставленному въ заголовкѣ этого столбца: to be added to или to be substrected from Apparent Time, должно уравненіе времени придавать къ истинному времени или вычитать изъ него для того, чтобы получить среднее время. Въ слѣдующемъ за этимъ столбцѣ на той же страницѣ показаны измѣненія уравненія времени въ теченія одного часа. На второй или на правой страницѣ каждаго мѣсяца, въ предпослѣднемъ стелбцѣ, дано уравненіе времени для каждаго гринвичскаго средняго полудня (Mean Noon), здѣсь также словами: to be added to или to be substrected from Meam Time указано, что для полученія истиннаго времени слѣдуетъ придавать къ данному среднему или вычитать изъ него уравненіе временим. Что касается до перевода истиннаго времени въ среднее и обратно, то правило для этого вытекаетъ само собою изъ того, что мы сказали о соотношеніи между истиннымъ и среднимъ временемъ. Если дано истинное время и требуется найти соотвѣтствующее ему среднее, то стоитъ только взять изъ таблицъ уравненіе времени въ истинный полдень даннаго дня, придать къ этому уравненію его часовое измѣненіе, умноженное на число данныхъ часовъ истиннаго времени и такимъ образомъ приведенное къ данному моменту уравненіе времени придать съ надлежащимъ знакомъ къ данному истинному времени. Для рѣшенія обратнаго вопроса, изъ Nautical Almanac или другихъ таблицъ должно быть взято уравненіе времени соотвѣтствующее среднему полудню. Замѣтимъ еще, что

въ томъ и другомъ случаѣ уравненіе времени должно быть вычислено, по данному непосредственно въ таблицахъ, для полудня того мѣста, для котораго рѣшается вопросъ.

Чтобы пояснить все сказанное примѣромъ, найдемъ среднее кіевское время, соотвѣтствующее $4^h\ 17^m\ 25^s$ истиннаго кіевскаго времени 14 марта 1877 года. Изъ Nautical Almanac 1877 года находимъ, что уравненіе времени истиннаго гринвичскаго полудня 14 марта 1877 года есть $9^m\ 17^s.94$. Кромѣ того изъ тѣхъ же таблицъ видимъ, что въ данный день уравненіе времени въ каждый часъ уменьшается на $0^s.704$, но такъ какъ Кіевъ (обсерваторія) находится по долготѣ къ востоку отъ Гринвича на $2^h\ 2^m\ 1^s.10$, то истинному полудню кіевскаго времени соотвѣтствуетъ уравненіе времени $9^m\ 19^s.37$. Данный моментъ отъ истиннаго полудня отстоитъ на $4^h\ 17^m\ 25^s$, измѣненіе уравненія времени въ теченіи этого промежутка есть $3^s.02$, а потому уравненіе времени соотвѣтствующее данному моменту будетъ $9^m\ 16^s.35$. Въ заголовкѣ столбца, въ которомъ дано уравненіе времени для истиннаго полудня дней марта мѣсяца, читаемъ, что уравненіе времени слѣдуетъ придавать къ истинному для полученія средняго времени, а потому придавъ уравненіе времени $9^m\ 16^s.35$ къ данному истинному времени, находимъ, что этому послѣднему соотвѣтствуетъ $4^h\ 26^m\ 41^s.35$ кіевскаго средняго времени.

Посмотримъ теперь, какое соотношеніе существуетъ между среднимъ и звѣзднымъ временемъ и при этомъ рѣшимъ вопросъ о приведеніи звѣзднаго времени въ среднее и обратно. Пусть окружность $TT'T''$.... (фиг. 5) представляетъ годичный путь центра земли около солнца. Предположимъ, что движеніе центра земли по этой окружности происходитъ равномѣрно. Если представимъ себѣ, что въ центрѣ этой окружности O находится среднее солнце и что сама окружность расположена въ плоскости экватора, то будемъ разсматривать случай годичнаго движенія средняго солнца. Положимъ, что въ то время, какъ центръ земли находится въ положеніи T, меридіанъ мѣста наблюденія направленъ по прямой OT и наблюдателю изъ точки a будетъ казаться, что среднее солнце проходитъ чрезъ его меридіанъ. Пусть въ этомъ положеніи земли одновременно съ среднимъ солнцемъ проходитъ черезъ меридіанъ безконечно удаленная звѣзда s, находящаяся на одномъ кругѣ склоненій съ точкой весенняго равноденствія или просто сама точка весенняго равноденствія. Когда земля черезъ извѣстный промежутокъ времени пройдетъ извѣстную часть, напр., одну осьмую долю своего годичнаго пути и центръ земли будетъ находиться въ точкѣ T_1, то когда меридіанъ наблюдателя приметъ положеніе bT_1 параллельное направленію aT_1 звѣзда s или точка весенняго равноденствія снова вступитъ на меридіанъ наблюдателя, ибо звѣзда удалена отъ земли на безконечно большое разстояніе и изъ всѣхъ точекъ земнаго пути будетъ видна по направленіямъ между собою параллельнымъ. Но чтобы для наблюдателя въ положеніи земли T_1 наступило время кульминаціи солнца, необходимо, чтобы меридіанъ наблюдателя принялъ направленіе OT_1, т. е. необходимо, чтобы земля сдѣлала еще одну осьмую часть оборота около оси. Такъ какъ полное вращеніе земли около оси происходитъ въ 24^h, то въ положеніи земли T_1 солнце пройдетъ черезъ меридіанъ позже точки весенняго равноденствія тремя часами. Если въ положеніи земли T_1 меридіанъ мѣста наблюденія во время кульминаціи средняго солнца имѣетъ направленіе cT_1, а въ моментъ той же кульминаціи точка весенняго равноденствія видна по направленію cs'', то уголъ Ocs'' есть часовой уголъ точки весенняго равноденствія соотвѣтствующій моменту кульминаціи средняго солнца или сред-

нему полудню, а потому этотъ уголъ называется *звѣзднымъ временемъ въ средній полдень*. Если земля, пройдя четверть своего пути около солнца, достигнетъ точки T', то какъ скоро при вращеніи земли около оси меридіанъ наблюдателя приметъ направленіе $T'd$, параллельное направленіямъ OT и bT_1, наблюдатель замѣтитъ кульминацію точки весенняго равноденствія, но среднее солнце въ этотъ моментъ на меридіанъ еще не вступитъ; оно будетъ кульминировать только тогда, когда земля повернется около оси на уголъ $dT'e$, т. е. ровно на четверть оборота. Легко видѣть, что въ положеніи земли T'' солнце опоздаетъ противъ звѣзды прохожденіемъ черезъ меридіанъ на 12 часовъ; въ положенія T''' оно опоздаетъ кульминаціей на три четверти оборота или на 18^h; наконецъ когда земля возвратится въ положеніе T, точка весенняго равноденствія и среднее солнце снова будутъ кульминировать вмѣстѣ, но въ теченіи полнаго обращенія земли около солнца точка весенняго равноденствія будетъ кульминировать однимъ разомъ болѣе противъ солнца. Слѣдовательно если въ одномъ обращеніи земли около солнца заключается 365,24 среднихъ сутокъ, то звѣздныхъ сутокъ въ томъ же періодѣ будетъ 366,24. Поэтому если означимъ продолжительность звѣздныхъ сутокъ чрезъ S, а среднихъ чрезъ M, то получимъ соотношеніе

$$366{,}24 \,.\, S = 365{,}24 \,.\, M$$

откуда продолжительность звѣздныхъ сутокъ

$$S = \frac{365{,}24}{366{,}24} \,.\, M$$

придавая и вычитая во второй части этого уравненія единицу, имѣемъ:

$$S = \left\{ 1 - \frac{1}{366{,}24} \right\} M$$

или

$$S = M - \frac{M}{366{,}24}$$

или наконецъ помня, что $M = 24^h$ имѣемъ:

$$S = M - 8^m\, 55^s.\, 91$$

гдѣ послѣднее число представляетъ собою доли средняго часа. И такъ каждые звѣздные сутки короче среднихъ на $3^m\, 55^s.\, 91$ средняго времени. Подобнымъ же образомъ найдется, что каждыя среднія сутки длиннѣе звѣздныхъ на $3^m\, 56^s.\, 56$ звѣзднаго времени. Зная это соотношеніе между длиною звѣздныхъ и среднихъ сутокъ, не трудно показать правило для обращенія звѣзднаго времени въ среднее и на оборотъ. Рѣшимъ сначала вопросъ объ обращеніи средняго времени въ звѣздное.

Если данное среднее время есть n часовъ и если звѣздное время соотвѣтствующее предшествующему полудню есть θ, то это значитъ, что послѣ того какъ звѣздное время было θ прошло n среднихъ часовъ, но каждыя среднія сутки болѣе звѣздныхъ на $3^m\, 56^s.\, 56$, а слѣдовательно въ каждомъ среднемъ часѣ будетъ заключаться одинъ звѣздный часъ и еще 0,002738 долей звѣзднаго часа, а потому въ n среднихъ часахъ будетъ заключаться $n\,(1 + 0{,}002738)$ звѣздныхъ часовъ. Зная это, означимъ искомое звѣздное время чрезъ S и тогда получимъ уравненіе

$$S = \theta + n\,(1 + 0{,}002738)$$

отсюда заключаемъ, что для обращенія даннаго средняго времени въ звѣздное слѣдуетъ выразить данное среднее время въ звѣздныхъ единицахъ и къ полученному результату придать звѣздное время предшествующаго средняго полудня. Предыдущее выраженіе можно представить еще въ видѣ

$$S = \theta + n + n.\,0{,}002738 = \theta + n + n.\,9^s,8565$$

количество $n.\,9^s.8565$ называется упрежденіемъ звѣзднаго времени противъ средняго.

Въ Nautical Almanac дается для всѣхъ дней года звѣздное время въ средній гринвичскій полдень, т. е. дается прямое восхожденіе средняго солнца для каждаго гринвичскаго полудня (ибо прямое восхожденіе каждаго свѣтила равняется, какъ мы видѣли, звѣздному времени кульминаціи этого свѣтила). Мы видѣли также, что это прямое восхожденіе или звѣздное время въ средній полдень возрастаетъ въ теченіи каждыхъ среднихъ сутокъ на $3^m\,56^s.56$, слѣдовательно въ одинъ часъ оно измѣняется на $9^s,8565$, и такъ, если въ Гринвичѣ звѣздное время въ средній полдень опредѣленнаго дня было θ, то подъ меридіаномъ, лежащимъ восточнѣе Гринвича на l часовъ по долготѣ, полдень наступитъ на l часовъ ранѣе, а потому звѣздное время въ моментъ кульминаціи средняго солнца подъ этимъ меридіаномъ не достигнетъ еще величины θ, но будетъ меньше ея на $l.\,9^s,8565$ и эту величину слѣдуетъ вычесть изъ звѣзднаго времени гринвичскаго полудня для полученія звѣзднаго времени въ средній полдень мѣста отстоящаго по долготѣ на l часовъ отъ Гринвича. Если мѣсто лежитъ къ западу отъ Гринвича на l часовъ, то ту же величину $l.\,9^s,8565$ слѣдуетъ придать, ибо въ этомъ мѣстѣ среднее солнце будетъ кульминировать на l часовъ позже нежели въ Гринвичѣ. И такъ, если требуется найти звѣздное время S_1 соотвѣтствующее данному среднему времени n_1 считаемому подъ меридіаномъ лежащимъ на l часовъ къ востоку отъ Гринвича, то означивъ, какъ прежде, звѣздное время въ средній гринвичскій полдень чрезъ θ, получимъ:

$$S_1 = (\theta - l.\,9^s,8565) + n_1 + n_1\,9^s,8565$$

Поясимъ эти соображенія на частномъ примѣрѣ: найдемъ звѣздное время соотвѣтствующее $8^h\,15^m\,37^s.2$ марта 18-го 1877 года кіевскаго средняго времени. По упомянутому выше правилу выражаемъ данное среднее время въ звѣздныхъ единицахъ и изъ таблицы данной въ Nautical Almanac 1877 года на страницѣ 494-й находимъ, что

8^h	средняго	времени	соотвѣтствуютъ	8^h	1^m	$18^s.85$	звѣзднаго	времени
15^m	„	„	„		15	2 .46	„	„
37^s	„	„	„			37 .10	„	„
$0^s.2$	„	„	„			0 .20	„	„

а потому заключаемъ, что $8^h\,15^m\,37^s.2$ средняго времени соотвѣтствуютъ $8^h\,16^m\,58^s.61$ звѣзднаго времени. Это число представляетъ собою сумму $n_1 + n_1\,9^s.8565$. Далѣе изъ Nautical Almanac находимъ, что звѣздное время въ средній гринвичскій полдень 18 марта 1877 года есть $23^h\,44^m\,35^s.97$, но такъ какъ Кіевъ лежитъ къ востоку отъ гринвича на $2^h\,2^m\,1^s.10$, то звѣздное время въ средній кіевскій полдень будетъ менѣе гринвичскаго на $20^s.04$ и составитъ $23^h\,44^m\,15^s.93$; придавая это къ полученнымъ выше $8^h\,16^m\,58^s.61$ найдемъ, что искомое звѣздное время есть $8^h\,1^m\,14^s.56$.

Легко составить правило и для рѣшенія обратнаго вопроса, т. е. для обращенія звѣзднаго времени въ среднее. Если дано звѣздное время соотвѣтствующее опредѣленному моменту, то это значитъ, что данъ выраженный въ звѣздныхъ единицахъ промежутокъ времени протекшій отъ момента кульминаціи точки весенняго равноденствія до разсматриваемаго момента. Вычитая изъ этого промежутка то время, которое прошло отъ начала звѣздныхъ сутокъ до начала среднихъ или, что все равно, вычитая изъ даннаго звѣзднаго времени звѣздное время въ средній полдень, получимъ остатокъ, который будетъ представлять собою промежутокъ времени протекшій отъ средняго полдня до разсматриваемаго даннаго момента. Но этотъ остатокъ выраженъ еще въ звѣздныхъ единицахъ; понятно, что если представимъ его въ среднихъ единицахъ, то и получимъ промежутокъ времени протекшій отъ средняго полудня до разсматриваемаго момента, выраженный въ среднихъ единицахъ, или, другими словами,— искомое среднее время. И такъ для обращенія звѣзднаго времени въ среднее слѣдуетъ изъ даннаго звѣзднаго времени вычесть звѣздное время предшествующаго средняго полудня и полученную разность выразить въ единицахъ средняго времени. Если дано звѣздное время s считаемое подъ меридіаномъ лежащимъ къ востоку отъ Гринвича на l часовъ и требуется найти соотвѣтствующее ему среднее время n_1, то назвавъ, какъ прежде, звѣздное время въ средній гринвичскій полдень чрезъ θ, по сказанному сейчасъ правилу получимъ

$$n_1 = \left[s - (\theta - l.\, 9^s,8565) \right] \left[1 - \frac{3^m\, 55^s.91}{24} \right]$$

ибо каждый звѣздный часъ короче средняго на $\dfrac{3^m\, 59^s.91}{24}$. Предыдущее выраженіе можно представить еще въ видѣ

$$n_1 = s - (\theta - l.\, 9^s,8565) - \left[s - (\theta - l.\, 9^s,8565) \right] \frac{3^m\, 55^s.91}{24}$$

послѣдній членъ выражаетъ собою отставаніе средняго времени въ теченіи $s - (\theta - l.\, 9^s,8565)$ звѣздныхъ часовъ. Для поясненія предыдущаго примѣромъ найдемъ среднее кіевское время соотвѣтствующее $5^h\, 27^m\, 13^s.4$, марта 26-го 1877 года кіевскаго звѣзднаго времени. Изъ Nautical Almanac находимъ, что для 26 марта 1877 года $\theta = 0^h\, 16^m\, 8^s.40$ слѣдовательно

$$\theta - l.\, 9^s.8565 = 0^h\, 15^m\, 48^s,38$$

а потому для разсматриваемаго случая

$$s - (\theta - l.\, 9^s,8565) = 5^h\, 11^m\, 25^s.02$$

Это и есть промежутокъ времени, протекшій отъ средняго полудня до разсматриваемаго момента и выраженный въ единицахъ звѣзднаго времени. Чтобы представить его въ среднихъ единицахъ, слѣдуетъ вычесть изъ него величину

$$\left[s - (\theta - l.\, 9^s,8565) \right] \frac{3^m\, 55^s.91}{24}$$

для той же цѣли удобно пользоваться таблицей, данной въ Nautical Almanac на стр. 496 и слѣдующей. Изъ этой таблицы находимъ, что

5^h	звѣзднаго	времени	соотвѣтствуютъ	$4^h\,59^m\,10^s.85$	средняго	времени
11^m	„	„	„	$10\;\;58.20$	„	„
25^s	„	„	„	24.93	„	„
$0^s.02$	„	„	„	0.02	„	„

а потому заключаемъ, что искомое среднее время есть $5^h\,10^m\,34^s.00$.

Для обращенія истиннаго времени въ звѣздное, можно поступать двояко. Мы знаемъ, что звѣздное время равно часовому углу какого бы то ни было свѣтила, сложенному съ прямымъ восхожденіемъ этого свѣтила, а потому, если назовемъ звѣздное время чрезъ θ, часовой уголъ центра истиннаго солнца, соотвѣтствующій этому звѣздному времени, чрезъ t и прямое восхожденіе центра истиннаго солнца чрезъ α, то будемъ имѣть $\theta = t + \alpha$; но t есть вмѣстѣ съ тѣмъ истинное время, а потому заключаемъ, что для обращенія t въ θ стоитъ только вычислить изъ эфемеридъ величину α соотвѣтствующую данному истинному времени t и, придавъ эту найденную величину α къ данному t, получимъ искомое звѣздное время. Другой путь рѣшенія вопроса состоитъ въ томъ, что сначала данное истинное время обращаемъ въ среднее и за тѣмъ, по извѣстному правилу, опредѣляемъ звѣздное время соотвѣтствующее этому среднему.

Для рѣшенія обратнаго вопроса, т. е. для превращенія звѣзднаго времени въ истинное, всегда слѣдуетъ сначала данное звѣздное время обратить въ среднее и уже отъ этого послѣдняго перейти къ истинному.

4. Приступимъ теперь къ обзору различныхъ явленій зависящихъ отъ суточнаго движенія свѣтилъ съ востока на западъ. Всматриваясь въ суточное движеніе свода небеснаго, мы скоро убѣждаемся, что одни изъ свѣтилъ постоянно остаются надъ горизонтомъ мѣста наблюденія,—не восходятъ и не заходятъ; другія только часть сутокъ остаются надъ горизонтомъ мѣста и при этомъ восходятъ на востокѣ и заходятъ на западѣ; наконецъ есть и такія свѣтила, которыя для даннаго мѣста наблюденія всегда остаются подъ его горизонтомъ. Посмотримъ, какъ могутъ быть вычислены времена восхожденія и захожденія свѣтилъ и опредѣлены тѣ точки горизонта, въ которыхъ они восходятъ и заходятъ. Рѣшимъ эти вопросы прежде всего для неподвижныхъ звѣздъ.

Одно изъ соотношеній между частями параллактическаго треугольника, какъ мы видѣли, имѣетъ видъ

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

здѣсь удержаны тѣ же означенія какъ прежде. Свѣтило въ моментъ восхожденія и захожденія находится на горизонтѣ, слѣдовательно для времени восхожденія или захожденія зенитное разстояніе свѣтила $z = 90^0$ и для этого случая предыдущее уравненіе обращается въ

$$0 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

откуда

$$\cos t = -\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta \tag{18}$$

Если часовой уголъ точки захожденія или восхожденія будетъ вычисленъ по этому выраженію, то, зная еще прямое восхожденіе свѣтила α, изъ уравненія $\theta = \alpha + t$

найдемъ звѣздное время θ восхожденія или захожденія свѣтила, послѣ чего, по извѣстнымъ правиламъ, можемъ опредѣлить и среднее время этихъ явленій. Если вторая часть уравненія (18) имѣетъ числовую величину меньшую единицы, тогда для нея или, что все равно, для такой величины $\cos t$ найдутся два значенія t. Положимъ, что $\cos t$, вычисленный изъ уравненія (18), имѣетъ положительную величину; тогда одно значеніе t, соотвѣтствующее этому косинусу, будетъ заключаться въ первой четверти окружности и другое въ четвертой. По нашему условію, которое мы приняли для счета часовыхъ угловъ, первое изъ этихъ значеній t будетъ соотвѣтствовать точкѣ захожденія свѣтила, а второе точкѣ восхода. Такъ какъ φ есть всегда величина положительная (для сѣвернаго полушарія земли), то $\cos t$ или, что все равно, произведеніе $-\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta$ можетъ сдѣлаться положительною величиною только тогда, когда $\operatorname{tang}\delta$ или, что все равно, δ будетъ величиною отрицательною. Изъ этого заключаемъ, что всѣ свѣтила имѣющія южное склоненіе или расположенныя относительно экватора въ южномъ полушаріи, будутъ восходить между восточною частію перваго вертикала и южною частію меридіана мѣста и заходить между тою же южною частію меридіана и западною частію перваго вертикала.

Если напротивъ склоненіе свѣтила положительно, т. е. если свѣтило расположено въ сѣверномъ полушаріи относительно экватора, то величина $\cos t$ для точекъ восхода и захода будетъ всегда отрицательною и для нея найдутся два значенія t, изъ которыхъ одно будетъ лежать во второй четверти окружности, а другое въ третьей. Слѣдовательно свѣтило съ положительнымъ склоненіемъ будетъ восходить между восточною частію перваго вертикала и сѣверною частію меридіана мѣста и заходить между тою же частію меридіана и западною частію перваго вертикала.

Въ выраженіе (18) косинуса часоваго угла точекъ восхожденія и захожденія свѣтила входятъ два тангенса; φ для опредѣленнаго мѣста есть величина постоянная, но $\operatorname{tang}\delta$ для различныхъ свѣтилъ измѣняется въ предѣлахъ $\pm\infty$, слѣдовательно $\cos t$ не всегда будетъ величиною возможною, ибо онъ измѣняется въ предѣлахъ ± 1; $\cos t$ будетъ имѣть дѣйствительную величину только до тѣхъ поръ, пока произведеніе $\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta$ не сдѣлается болѣе единицы. Если же $\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta > 1$, то опредѣленіе t изъ выраженія (18) въ этомъ случаѣ дѣлается невозможнымъ и это показываетъ, что свѣтило, склоненіе котораго при данномъ φ удовлетворяетъ условію $\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta > 1$ не восходитъ и не заходитъ. Это условіе представляется еще въ видѣ

$$\operatorname{tang}\delta > \operatorname{cotg}\varphi \qquad \text{или} \qquad \delta > 90 - \varphi$$

если склоненіе свѣтила положительно и болѣе $90 - \varphi$, то для мѣстъ лежащихъ въ сѣверной половинѣ земнаго сфероида такое свѣтило будетъ представляться не заходящимъ и не восходящимъ, оно въ теченіи сутокъ постоянно будетъ оставаться надъ горизонтомъ этихъ мѣстъ. Если же числовая величина отрицательнаго склоненія болѣе $90^\circ - \varphi$, то для мѣстъ имѣющихъ широту φ свѣтило съ такимъ склоненіемъ вовсѣ не будетъ восходить, постоянно оставаясь подъ горизонтомъ.

Вычисленное по изложенному способу время восхожденія или захожденія свѣтила не будетъ вполнѣ соглашаться съ наблюдаемымъ временемъ тѣхъ же явленій. Причина этого несогласія заключается въ томъ, что мы наблюдаемъ съ поверхности земли чрезъ атмосферу, преломляющую лучи свѣта и производящую явленіе рефракціи. Способъ исправленія вычисленныхъ временъ восхожденія и захожденія отъ вліянія рефракціи мы покажемъ при изложеніи теоріи этого явленія.

Для опредѣленія точекъ, въ которыхъ восходитъ или заходитъ свѣтило съ даннымъ склоненіемъ, снова обратимся къ параллактическому треугольнику. Назвавъ, какъ прежде, азимутъ свѣтила чрезъ A, изъ этого треугольника имѣемъ

$$\sin\delta = \cos z \sin\varphi - \sin z \cos\varphi \cos A$$

но для точекъ восхода и захода $z = 90^\circ$ и для этого случая предъидущее уравненіе дастъ

$$\cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi} \tag{19}$$

такъ какъ $\cos\varphi$ всегда есть величина положительная, то знакъ $\cos A$ будетъ зависить только отъ знака $\sin\delta$. И такъ этимъ выраженіемъ подтверждается то, что мы сказали выше. Прежде всего замѣтимъ, что по уравненію (19) при $\delta = 0$, $\cos A = 0$ и $A = 90^\circ$ или $A = 270^\circ$, т. е. звѣзды расположенныя въ экваторѣ восходятъ и заходятъ въ первомъ вертикалѣ. Когда $\delta > 0^\circ$ т. е. есть величина положительная, то $\cos A$ становится величиной отрицательной, которой соотвѣтствующія значенія A находятся одно во второй и другое въ третьей четверти окружности; слѣдовательно въ этомъ случаѣ свѣтило восходитъ и заходитъ въ той части горизонта, которая расположена къ сѣверу отъ перваго вертикала. При $\delta < 0$ или отрицательномъ точки восхожденія и захожденія будутъ расположены въ южной части горизонта.

Разстояніе точекъ восхожденія или захожденія свѣтила отъ точекъ востока или запада т. е. отъ точекъ пересѣченія перваго вертикала съ горизонтомъ называются восточнымъ или западнымъ отступленіями свѣтила. Если назовемъ восточное или западное отступленіе чрезъ A_1, то азимутъ точки восхожденія или захожденія какаго бы то не было свѣтила представится чрезъ

$$A = 90 + A_1$$

Внося это въ уравненіе (19), имѣемъ

$$\sin A_1 = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}$$

отсюда прямо видимъ, что при $\delta > 0$, т. е. положительномъ величина A_1 также положительна и точки восхода и захода свѣтила уклоняются къ сѣверу отъ точекъ востока и запада. Для отрицательныхъ склоненій отступленіе будетъ южное.

Чтобы пояснить все сказанное примѣромъ вычислимъ среднее время восхожденія и захожденія звѣзды α Virginis 2-го марта 1877 года для кіевской обсерваторіи. Склоненіе и прямое восхожденіе α Virginis для 2-го марта 1877 года есть

$$\delta = -10^\circ\, 31'\, 21''.5; \qquad \alpha = 13^h\, 18^m\, 44^s.64$$

широта кіевской обсерваторіи

$$\varphi = 50^\circ\, 27'\, 10''.26$$

для этихъ данныхъ находимъ

$$\lg \operatorname{tang}\varphi = 0.0831674; \qquad \lg \operatorname{tang}\delta = 9.2689235,$$

имѣя это, по уравненіе (18) получаемъ

$$\lg\cos t = 9.3520909$$

а потому два значенія t соотвѣтствующія этому косинусу будутъ

$$t = 76^\circ\ 59'\ 59''.7 \qquad \text{и} \qquad t = 283^\circ\ 0'\ 0''.3$$

первое изъ этихъ значеній есть часовой уголъ точки захожденія, а второе часовой уголъ точки восхожденія α Virginis. Выражая эти часовые углы во времени, имѣемъ

$$t = 5^h\ 7^m\ 59^s.93; \qquad t = 18^h\ 52^m\ 0^s.02$$

придавая къ нимъ прямое восхожденіе звѣзды, найдемъ что звѣздное время захожденія будетъ $18^h\ 26^m\ 44^s.57$, а восхожденія $8^h\ 10^m\ 44^s.66$. Звѣздное время въ средній кіевскій полдень 2-го марта 1877 года есть $22^h\ 41^m\ 11^s.1$, имѣя это, обратимъ найденныя звѣздныя времена въ среднія и увидимъ, что 2-го марта 1877 года α Virginis взойдетъ надъ кіевскимъ горизонтомъ въ $9^h\ 28^m\ 0^s.1$, а зайдетъ въ $19^h\ 42^m\ 19^s.2$ средняго времени. Но $19^h\ 42^m\ 19^s.2$, марта 2-го средняго времени астрономическаго счета соотвѣтствуютъ $7^h\ 42^m\ 19^s.2$ утра 3-го марта гражданскаго счета. Слѣдовательно α Virginis взойдетъ 2-го марта въ $9^h\ 28^m\ 0^s.1$ вечера, а зайдетъ 3-го марта въ $7^h\ 42^m\ 19^s.2$ утра.

Если хотимъ знать положеніе точекъ восхода и захода α Virginis, то обращаясь къ уравненію (19), для разсматриваемаго случая находимъ

$$\lg \cos \varphi = 9.8039694; \qquad \lg \sin \delta = 9.2615578,$$

а потому уравненіе (19) даетъ

$$\lg \cos A = 9.4575884$$

отсюда заключаемъ, что на горизонтѣ кіевской обсерваторіи 2-го марта 1877 года α Virginis взойдетъ отъ южной части меридіана къ востоку на $73^\circ\ 19'\ 59''.4$, а зайдетъ на такомъ же разстояніи отъ южной части меридіана къ западу.

Обратимся теперь къ рѣшенію вопроса о томъ, гдѣ и когда свѣтило достигаетъ наибольшей высоты надъ горизонтомъ даннаго мѣста во время своего суточнаго движенія съ востока на западъ. Сначала и здѣсь будемъ имѣть въ виду тотъ случай, когда склоненіе свѣтила не измѣняется. Если въ уравненіи

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t,$$

представляющемъ соотношеніе между частями параллактическаго треугольника, поставимъ вмѣсто $\cos t$ величину $1 - 2 \sin^2 \frac{t}{2}$ и замѣтимъ что $z = 90 - h$, то дадимъ приведенному уравненію видъ

$$\sin h = \cos (\varphi - \delta) - 2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{t}{2}$$

такъ какъ δ предполагается постояннымъ, φ для даннаго мѣста земной поверхности также есть постоянная величина, то измѣненія h, какъ видно изъ этого выраженія, исключительно зависятъ отъ измѣненія t, но такъ какъ t входитъ въ видѣ $\sin^2 \frac{t}{2}$, то одинаковымъ значеніямъ t по обѣимъ сторонамъ меридіана будутъ соотвѣтствовать одинакія значенія $\sin h$, слѣдовательно, если склоненіе свѣтила не измѣняется, то такое свѣтило въ равныхъ разстояніяхъ отъ меридіана на востокѣ и западѣ имѣетъ одинакія высоты. Такъ какъ второй членъ предыдущаго выраженія для всѣхъ значеній t

отрицателенъ, то наибольшую величину $\sin h$ получимъ при $t = 0$. Такимъ образомъ наибольшей высоты свѣтило достигаетъ въ меридіанѣ и именно въ той его части, для которой $t = 0$. Числовая величина наибольшей высоты опредѣляется изъ уравненія

$$\sin h = \cos(\varphi - \delta)$$

откуда

$$\cos z = \cos(\varphi - \delta)$$

и слѣдовательно въ меридіанѣ

$$z = \varphi - \delta,$$

но кромѣ етого предыдущему уравненіе удовлетворяетъ еще значеніе

$$z = \delta - \varphi$$

Изъ простаго чертежа легко видѣть, что первый случай относится къ свѣтиламъ кульминирующимъ между зенитомъ и экваторомъ, а второй къ свѣтиламъ кульминирующимъ между зенитомъ и полюсомъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть HZP (фиг. 6) будетъ сѣченіе сферы небесной плоскостію меридіана мѣсти, пусть въ P будетъ полюсъ міра и въ Z зенитъ мѣста наблюденія, въ E пересѣченіе экватора съ меридіаномъ, тогда для свѣтила кульминирующаго въ S имѣемъ $SZ = ZE - SE$ или $z = \varphi - \delta$. Для свѣтила кульминирующаго въ S' будетъ $S'Z = S'E - EZ$ или $z = \delta - \varphi$. Изъ того же чертежа видно, что для свѣтила кульминирующаго въ S'', т. е. къ югу отъ экватора $ZS'' = EZ + S''E$ или $z = \varphi + \delta$, гдѣ подъ δ разумѣемъ числовую величину склоненія, не обращая вниманія на знакъ.

Чтобы найти время и величину наименьней высоты или наибольшаго зенитнаго разстоянія свѣтила въ теченіи сутокъ, обратимся опять къ уравненіе

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

и сдѣлаемъ въ немъ $t = 180 + t'$, тогда оно представится въ видѣ

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta - \text{sos}\,\varphi \cos\delta \cos t'$$

гдѣ t' есть очевидно часовой уголъ, считаемый отъ сѣверной части меридіана. Внося въ это послѣднее уравненіе $1 - 2\sin^2\frac{t'}{2}$ вмѣсто $\cos t'$, имѣемъ

$$\sin h = \cos[180^0 \pm (\varphi + \delta)] + 2\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{t'}{2}$$

такъ какъ послѣдній членъ во второй части этого уравненія всегда положителенъ, то очевидно, что наименьшее значеніе $\sin h$ соотвѣтствуетъ значеніе $t' = 0$ или, другими словами, наименьшей высоты свѣтило достигаетъ въ нижней кульминаціи. Такъ какъ при $t' = 0$ предыдущее выраженіе обращается въ

$$\cos z = \cos[180^0 \pm (\varphi + \delta)]$$

то величина зенитнаго разстоянія во время нижней кульминаціи будетъ

$$z = 180 \pm (\varphi + \delta)$$

Если во время нижней кульминаціи свѣтило остается еще надъ горизонтомъ даннаго мѣста земной поверхности, то $z < 90^0$ и слѣдовательно для положительнаго δ въ

предыдущемъ выраженіи долженъ быть удержанъ нижній знакъ. И такъ для нижней кульминаціи

$$z = 180^0 - (\varphi + \delta)$$

Посмотримъ наконецъ какимъ образомъ можетъ быть опредѣлено время прохожденія свѣтила черезъ первый вертикалъ и найдено зенитное разстояніе свѣтила въ моментъ этого прохожденія.

Изъ параллактическаго треугольника имѣемъ

$$\sin\delta = \quad \sin\varphi\cos z - \cos\varphi\sin z\cos A$$
$$\sin z\cos A = -\cos\varphi\sin\delta + \sin\varphi\cos\delta\cos t$$

Если свѣтило находится въ первомъ вертикалѣ, то $A = 90^0$ и два предыдущія уравненія принимаютъ для этого случая видъ

$$\sin\delta = \quad \sin\varphi\cos\zeta$$
$$0 = -\cos\varphi\sin\delta + \sin\varphi\cos\delta\cos\tau$$

гдѣ чрезъ τ и ζ мы означаемъ часовой уголъ и зенитное разстояніе свѣтила находящагося въ первомъ вертикалѣ. Изъ этихъ двухъ уравненій находимъ

$$\cos\zeta = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}; \qquad \cos\tau = \frac{\tang\delta}{\tang\varphi}$$

изъ перваго опредѣляется искомое зенитное разстояніе, а изъ втораго часовой уголъ. Кромѣ того второе изъ этихъ уравненій показываетъ, что если $\delta > \varphi$, то $\cos t$ становится величиною невозможною; такимъ образомъ свѣтила, склоненія которыхъ болѣе широты мѣста, черезъ первый вертикалъ этого мѣста не проходятъ, но кульминируютъ между зенитомъ и полюсомъ. Если δ есть величина отрицательная, то тогда и $\cos\zeta$ также отрицателенъ, а слѣдовательно $\zeta > 90^0$ и всякое свѣтило имѣющее отрицательное склоненіе для всѣхъ сѣверныхъ широтъ проходитъ черезъ первый вертикалъ подъ горизонтомъ.

5. Рѣшимъ теперь нѣкоторые изъ предыдущихъ вопросовъ для свѣтилъ имѣющихъ собственное движеніе. Посмотримъ прежде всего какимъ образомъ можетъ быть найдено время кульминаціи свѣтила, склоненіе и прямое восхожденіе котораго измѣняются.

Мы знаемъ что звѣздное время какаго либо момента находится въ связи съ часовымъ угломъ и прямымъ восхожденіемъ какого либо свѣтила соотвѣтствующими этому моменту. Эта связь представляется въ формѣ

$$\theta = \alpha + t$$

которая имѣетъ мѣсто также и для момента кульминаціи. Но такъ какъ во время кульминаціи свѣтила часовой уголъ его равенъ нулю, то для момента кульминаціи $\theta = \alpha$. Если координаты свѣтила измѣняются со временемъ, то α есть сама функція времени, а потому для опредѣленія времени θ, т. е. звѣзднаго времени кульминаціи представимъ въ предыдущемъ уравненіи величину α въ видѣ явной функціи времени и полученнымъ соотношеніемъ будемъ пользоваться для опредѣленія искомаго θ. Чтобы имѣть передъ собой опредѣленный случай, рѣшимъ предложенный вопросъ для луны, координаты которой измѣняются быстрѣе координатъ всѣхъ другихъ свѣтилъ, а по-

тому и рѣшеніе поставленнаго вопроса представляетъ наибольшую трудность. Положимъ, что мы имѣемъ такія таблицы, въ которыхъ координаты луны: ея склоненіе и прямое восхожденіе даны для значеній аргумента отличающихся одно отъ другаго на 24^h, т. е. даны для начала каждыхъ среднихъ или истинныхъ сутокъ, и примемъ 24^h за единицу, въ которой будемъ выражать аргументъ. Положимъ, что прямыя восхожденія луны соотвѣтствующія гринвичскому полудню нѣсколькихъ послѣдовательныхъ дней суть:

$$a_3,\quad a_2,\quad a_1,\quad a_0,\quad a',\quad a'',\quad a'''$$

положимъ, что отъ вычитанія каждой предыдущей изъ этихъ величинъ изъ послѣдующей получаются разности

$$b_3,\quad b_2,\quad b_1,\quad b_0,\quad b',\quad b''$$

отъ вычитанія таким же порядкомъ этихъ первыхъ разностей пусть получаются вторыя разности

$$c_3,\quad c_2,\quad c_1,\quad c_0,\quad c'$$

третьи разности пусть будутъ

$$d_3,\quad d_2,\quad d_1,\quad d_0$$

и т. д. Тогда прямое восхожденіе α заключающееся между двумя данными величинами a_0 и a' можетъ быть вычислено по интерполяціонной формулѣ имѣющей видъ

$$(20)\qquad \alpha = a_0 + nb_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}c_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d_0 + \ldots$$

гдѣ n есть число, которымъ аргументъ соотвѣтствующій величинѣ a_0 разнится отъ аргумента соотвѣтствующаго искомой величинѣ α. Это число n выражается въ единицахъ аргумента. Въ нашемъ случаѣ n будетъ промежутокъ времени, заключающійся между искомымъ моментомъ кульминаціи и предшествующимъ этому моменту гринвичскимъ полуднемъ. При томъ подобный промежутокъ времени въ нашемъ случаѣ будетъ выражаться въ доляхъ сутокъ, ибо за единицу аргумента мы приняли 24^h. Предположимъ, что искомое время кульминаціи луны заключается между двумя гринвичскими средними полуднями, которымъ соотвѣтствуютъ прямыя восхожденія луны a_0 и a' и пусть искомое среднее гринвичское время кульминаціи будетъ t; эту величину t будемъ считать выраженною въ десятыхъ доляхъ среднихъ сутокъ. Чтобы примѣнить интерполяціонную формулу (20) къ опредѣленію прямаго восхожденія соотвѣтствующаго времени t, мы должны въ этой формулѣ положить $n = t$; ибо въ нашемъ случаѣ аргументъ выражается въ десятыхъ доляхъ сутокъ и t есть часть сутокъ протекшая отъ средняго гринвичскаго полудня до того момента, когда прямое восхожденіе достигаетъ величины α. И такъ прямое восхожденіе, соотвѣтствующее времени t кульминаціи луны, будетъ

$$\alpha = a_0 + t\,b_0 + \frac{t(t-1)}{1.2}c_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}d_0 + \ldots$$

Это прямое восхожденіе должно равняться звѣздному времени кульминаціи или, что все равно, звѣздному времени соотвѣтствующему моменту t средняго гринвичскаго времени. Для обращенія средняго времени t въ звѣздное, поступимъ по правилу выше изложенному. Выразимъ сначала промежутокъ t въ звѣздныхъ единицахъ для этого умножимъ его на $24^h\,3^m\,56^s.56$, а за тѣмъ къ полученному произведенію придадимъ

звѣздное время въ средній гринвичскій полдень, которое означимъ чрезъ θ_0. И такъ звѣздное время соотвѣтствующее моменту t средняго будетъ $\theta_0 + t\,(24^h\, 3^m\, 56^s.56)$. Имѣя это, для опредѣленія искомаго t получимъ уравненіе

$$\theta_0 + t\,(24^h\, 3^m\, 56^s.56) = a_0 + tb_0 + \frac{t\,(t-1)}{1.2}\,c_0 + \frac{t\,(t-1)\,(t-2)}{1.2.3}\,d_0 + \ldots$$

Координаты луны измѣняются быстрѣе координатъ всѣхъ другихъ свѣтилъ, но и эти измѣненія достаточно правильны для того, чтобы считать вторыя разности малыми и ими ограничиться, отвергая дальнѣйшія. При такомъ допущеніи для опредѣленія искомаго t можно будетъ пользоваться уравненіемъ

$$\theta_0 + t\,(24^h\, 3^m\, 56^s.56) = a_0 + t.\,b_0 + \frac{t\,(t-1)}{1.2}\,c_0$$

которое дастъ

$$t = \frac{a_0 - \theta_0}{24^h\, 3^m\, 56^s.56 - b_0 - \frac{t-1}{2}\,c_0} \qquad (21)$$

Во вторую часть этого уравненія входитъ неизвѣстная величина и потому опредѣленіе t слѣдуетъ сдѣлать послѣдовательными приближеніями. Въ первомъ приближеніи вычислимъ t, пренебрегая величиною t въ знаменателѣ, т. е. по выраженію

$$t = \frac{a_0 - \theta_0}{24^h\, 3^m\, 56^s.56 - b_0} \qquad (22)$$

за тѣмъ найденную приближенную величину t внесемъ въ знаменателя выраженія (21) и изъ него найдемъ болѣе точную величину t и т. д. до тѣхъ поръ, пока двѣ величины t послѣдовательно вычисленныя будутъ между собою разниться желательно мало.

Если прямое восхожденіе свѣтила интерполируется изъ таблицъ, въ которыхъ эта координата дана для каждыхъ 12 часовъ, напр. для каждаго средняго полудня и полуночи, то въ интерполяціонной формулѣ за единицу, въ которой выражается t слѣдуетъ считать 12^h и, выражая промежутокъ времени t въ звѣздныхъ единицахъ, будемъ умножать t на $12^h\, 1^m\, 58^s.28$. Если за a_0 принимаемъ при этомъ значеніе прямаго восхожденія соотвѣтствующее средней полуночи, то вмѣсто θ_0 слѣдуетъ взять $\theta_0 + 12^h\, 1^m\, 58^s.28$, гдѣ однако подъ θ_0 разумѣемъ ту же величину какъ прежде, т. е. звѣздное время въ средній предшествующій полдень.

Если мы хотимъ вычислить время кульминаціи свѣтила, напр. луны, не для меридіана эфемеридъ, а для меридіана мѣста A, лежащаго къ востоку отъ Гринвича на k часовъ по долготѣ, то для этого можемъ руководствоваться слѣдующимъ простымъ соображеніемъ. Положимъ, что въ то время какъ луна въ мѣстѣ A проходитъ черезъ меридіанъ, въ Гринвичѣ считается среднее время t'. Пусть звѣздное время въ средній гринвичскій полдень будетъ θ_0, тогда звѣздное время считаемое въ Гринвичѣ въ моментъ прохожденія луны черезъ меридіанъ мѣста A будетъ $\theta_0 + t'\,(24^h\, 3^m\, 56^s.56)$, если значеніе аргумента таблицъ, изъ которыхъ берется прямое восхожденіе луны, измѣняется отъ 24 до 24 часовъ. Соотвѣтствующее этому моменту звѣздное время считаемое подъ меридіаномъ мѣста A будетъ $\theta_0 + t'\,(24^h\, 3^m\, 56^s.56) + k$; но прямое восхожденіе луны соотвѣтствующее среднему гринвичскому времени t' есть

$$a_0 + t'.b_0 + \frac{t'(t'-1)}{1.2} c_0 + \cdots\cdots$$

слѣдовательно

$$\theta_0 + t'(24^h\,3^m\,56^s.56) + k = a_0 + t' b_0 + \frac{t''(t'-1)}{1.2} c_0$$

откуда среднее время, считаемое въ Гринвичѣ въ моментъ кульминаціи луны въ мѣстѣ A, будетъ

$$(23) \qquad t' = \frac{a_0 - \theta_0 - k}{24^h\,3^m\,56^s.56 - b_0 - \frac{(t'-1)}{1.2} c_0}$$

а среднее время мѣста A соотвѣтствующее этому моменту будетъ

$$t = t' + k$$

Для опредѣленія времени нижней кульминаціи опять обратимся къ уравненію $\theta = \alpha + t$, но такъ какъ въ моментъ нижней кульминаціи часовой уголъ равенъ 12^h, то уравненіе служащее для опредѣленія времени нижней кульминаціи будетъ $\theta = \alpha + 12^h$, гдѣ θ есть звѣздное время нижней кульминаціи. Если назовемъ среднее время нижней кульминаціи чрезъ t, то оно опредѣлится изъ уравненія

$$\theta_0 + t(24^h\,3^m\,56^s.56) = 12^h + a_0 + t\,b_0 + \frac{t(t-1)}{1.2} c_0 + \cdots\cdots$$

откуда выводимъ

$$t = \frac{12^h + a_0 - \theta_0}{24^h\,3^m\,56^s.56 - b_0 - \frac{(t-1)}{2} c_0}$$

Если ищемъ время нижней кульминаціи для мѣста, меридіанъ котораго отстоитъ отъ гринвичскаго по долготѣ на k часовъ, то положивъ, что въ то время какъ луна проходитъ въ нижней кульминаціи черезъ меридіанъ этого мѣста въ Гринвичѣ считается среднее время t', имѣемъ

$$(24) \qquad t' = \frac{12^h + a_0 - \theta_0 - k}{24^h\,3^m\,56^s.56 - b_0 - \frac{t'-1}{2} c_0}$$

а мѣстное среднее время нижней кульминаціи найдется изъ выраженія

$$t = t' + k$$

Чтобы найти времена восхожденія и захожденія свѣтила имѣющаго собственное движеніе, необходимо знать склоненія этого свѣтила соотвѣтствующія временамъ восхожденія и захожденія, которыя сами неизвѣстны, а потому вопросъ можетъ быть рѣшенъ только послѣдовательными приближеніями. Для солнца рѣшеніе просто. Склоненія солнца измѣняются медленно, а потому взявъ приближенную величину склоненія получимъ приближенную величину часоваго угла солнца или приближенное истинное время восхожденія или захожденія солнца. Но найденное рѣшеніе вопроса будетъ на столько приближенно, на сколько приближенно принятое склоненіе соотвѣтствуетъ искомымъ временамъ. Имѣя эти приближенныя времена, чрезъ интерполированіе изъ эфе-

меридъ вычислимъ соотвѣтствующія этимъ временамъ склоненія и съ такими новыми величинами склоненій повторимъ все вычисленіе.

Для луны вычисленіе временъ восхожденія и захожденія болѣе сложно. Рѣшая этотъ вопросъ, необходимо предварительно вычислить среднія времена верхней и нижней кульминаціи луны, послѣ этого по приближеннымъ склоненіямъ луны находимъ часовой уголъ для времени восхожденія и захожденія; а имѣя среднія времена верхней и нижней кульминація луны, можемъ опредѣлить среднее время соотвѣтствующее каждому изъ этихъ часовыхъ угловъ. Въ самомъ дѣлѣ положимъ, что среднее время верхней кульминаціи въ данномъ мѣстѣ на земной поверхности есть T, а нижней T_1 и что по приближенно взятому склоненію вычисленъ посредствомъ уравненія (18) часовой уголъ t. Между двумя послѣдовательными кульминаціями проходитъ промежутокъ времени $T_1 - T$, но такъ какъ отъ верхней до слѣдующей нижней кульминаціи часовой уголъ всякаго свѣтила измѣняется на 12^h, то на одинъ часъ въ нашемъ случаѣ онъ измѣнится въ теченіи промежутка $\frac{1}{12}(T_1 - T)$ средняго времени. Слѣдовательно величины t часовой уголъ можетъ достигнуть въ теченіи промежутка

$$\tau = \frac{t}{12}(T_1 - T)$$

придавая эту величину τ со знакомъ ко времени верхней кульминаціи T, получимъ время восхожденія или захожденія луны, смотря по тому, былъ ли взятъ часовой уголъ t соотвѣтствующій тому или другому моменту. Въ этомъ состоитъ первое приближеніе рѣшенія вопроса. Найди такимъ образомъ приближенныя времена восхожденія и захожденія луны, будемъ интерполировать для нихъ изъ эфемеридъ склоненія этого свѣтила и, повторяя съ этими новыми склоненіями все вычисленіе въ томъ же порядкѣ, найдемъ болѣе точныя времена восхожденія и захожденія луны.

Для поясненія всего этого частнымъ примѣромъ, вычислимъ времена восхожденія и захожденія луны 26 марта 1877 года для кіевской обсерваторіи. Начнемъ, какъ замѣтили выше, съ вычисленія временъ верхней и нижней кульминаціи луны въ этотъ день. Хотя въ Nautical Almanac склоненія и прямыя восхожденія луны даны для каждаго часа средняго гринвичскаго времени, но мы возмемъ прямыя восхожденія разсматриваемаго свѣтила для слѣдующихъ моментовъ средняго Гринвичскаго времени: для $12^h\,0^m$ марта 25-го; $0^h\,0^m$ марта 26-го; $12^h\,0^m$ марта 26-го и $0^h\,0^m$ марта 27-го. Такимъ образомъ составимъ слѣдующую таблицу величинъ a и ихъ разностей b и c

			a	b	c
25 марта	$12^h\,0^m$	...	$9^h\,37^m\,49^s.0$		
				$+27\,29^s.1$	
26 „	0 0	...	10 5 18.1		-38.4
				$+26\,50.7$	
26 „	12 0	...	10 32 8.8		-31.9
				$+26\,18.8$	
27 „	0 0	...	10 58 27.6		

отсюда видимъ, что для рѣшенія нашей задачи слѣдуетъ принять

$$a_0 = 10^h\,5^m\,18^s.1; \qquad b_0 = +\,26^m\,50^s.7; \qquad c_0 = -\,31^s.9$$

Кромѣ того изъ Nautical Almanac 1877 года находимъ, что звѣздное время въ средній гринвичскій полдень 26 марта 1877 года есть $\theta_0 = 0^h\,16^m\,8^s.40$. Такъ какъ за единицу аргумента мы принимаемъ 12 часовъ, то выраженіе (23), которое придется примѣнить къ вычисленіе времени верхней кульминаціи луны, будетъ для этого случая имѣть видъ

$$t' = \frac{a_0 - \theta_0 - k}{12^h\ 1^m\ 58^s.28 - b_0 - c_0 \frac{(t'-1)}{2}} \tag{25}$$

такъ какъ кіевская обсерваторія находится къ востоку отъ гринвичской на $2^h\ 2^m\ 1^s.1$, то подъ k мы должны разумѣть эту величину. Пренебрегая въ первомъ приближеніи послѣднимъ членомъ знаменателя, находимъ, что сумма остальныхъ членовъ знаменателя есть $11^h\ 35^m\ 7^s.6$, числитель же выраженія t' есть $a_0 - \theta_0 - k = 7^h\ 47^m\ 8^s.6$; принимая 12 часовъ за единицу и выражая то и другое число въ этихъ единицахъ находимъ:

$$t' = \frac{0.64880}{0.96544} = 0.67201$$

это и есть первая приближенная величина t'. Вычисляя посредствомъ нея послѣдній членъ знаменателя въ выраженіи (25), находимъ

$$\frac{t'-1}{2} . c_0 = + 5^s.21$$

а слѣдовательно знаменатель выраженія (25) будетъ $11^h\ 35^m\ 2^s.4$ или представленный въ принятыхъ единицахъ есть 0.96532, а потому во второмъ приближеніи

$$t' = \frac{0.64878}{0.96532} = 0.67211$$

Такъ какъ эта величина мало разнится отъ предыдущей, то ограничимся вторымъ приближеніемъ и, выражая найденное значеніе t' въ часахъ, получимъ $t' = 8^h\ 3^m\ 55^s$; это есть среднее гринвичское время соотвѣтстающее моменту прохожденіе луны черезъ меридіанъ кіевской обсерваторіи 26-го марта 1877 года; а потому заключаемъ, что среднее кіевское время верхней кульминаціи луны 26-го марта 1877 года есть $10^h\ 5^m\ 56^s$. Чтобы опредѣлить время нижней кульминаціи обратимся къ выраженію (24). Такъ какъ за единицу аргумента мы принимаемъ 12 часовъ, то для нашего случая это выраженіе будетъ имѣть видъ

$$t' = \frac{12^h + a_0 - \theta_0 - k}{12^h\ 1^m\ 58^s.28 - b_0 - \frac{(t'-1)}{2} . c_0}$$

отвергая пока послѣдній членъ знаменателя, находимъ, что числитель этого выраженія есть $19^h\ 47^m\ 8^s.64$, а знаменатель, какъ прежде, $11^h\ 35^m\ 7^s.65$, поэтому

$$t' = \frac{1.64880}{0.96544} = 1.7077$$

вычисляя посредствомъ этого послѣдній членъ знаменателя, находимъ

$$\frac{t'-1}{2} . c_0 = - 11^s.2$$

а потому исправленный знаменатель есть $11^h\ 35^m\ 18^s.8$, слѣдовательно

$$t' = \frac{1.64880}{0.96571} = 1.7074$$

такъ какъ эта величина t' мало разнится отъ предыдущей, то ограничимся вторымъ приближеніемъ. Представляя t' въ часахъ, имѣемъ $t' = 20^h\,29^m\,19^s$, а потому заключаемъ что 26 марта 1877 года среднее кіевское время нижней кульминаціи луны будетъ $22^h\,31^m\,20^s$. Имѣя это, можемъ приступить къ вычисленію временъ восхожденія и захожденія луны. Изъ Nautical Almanac мы видимъ, что склоненіе луны 26 марта измѣняется отъ 12° до 6° и есть сѣверное, а потому заключаемъ, что въ тотъ день луна взойдетъ надъ горизонтомъ приблизительно часовъ за семь до своей кульминаціи; а такъ какъ склоненія уменьшаются, то захожденіе послѣдуетъ приблизительно часовъ черезъ шесть послѣ кульминаціи, соображая это, примемъ приближенно за время восхожденія $3^h\,2^m$ средняго кіевскаго времени, а за время захожденія $16^h\,2^m$ средняго кіевскаго времени. Для этихъ временъ находимъ изъ Naut. Alm. слѣдующія склоненія луны: 12° 38′.0 и 9° 5′.7. Помня, что широта кіевской обсерваторіи есть 50° 27′ 10″, вычисляемъ при помощи этихъ склоненій часовые углы по выраженію (18) и находимъ, что часовой уголъ соотвѣтствующій времени восхожденія есть $-\,7^h\,3^m.0$, а для времени захожденія $+\,6^h\,40^m.7$. Но такъ какъ 26 марта 1877 года между временами верхней и нижней кульминаціи луны проходятъ $12^h\,25^m\,24^s$, то заключаемъ, что часовой уголъ луны въ этотъ день измѣняется на одинъ часъ въ теченіи $1^h\,2^m\,7^s$ средняго времени; слѣдовательно величины $7^h\,3^m.0$ часовой уголъ можетъ достигнуть въ теченіи $7^h\,17^m.9$ средняго времени, величины же $6^h\,40^m.7$ часовой уголъ достигаетъ въ теченіи $6^h\,54^m.8$, придавая эти величины со знакомъ ко времени верхней кульминаціи луны, найдемъ въ первомъ приближеніи, что кіевское среднее время восхожденія луны 26 марта 1877 года есть $2^h\,48^m.0$, а захожденія $17^h\,0^m.7$. Соотвѣтствующія этимъ временамъ склоненія луны будутъ $+\,12°\,41'.9$ и $+\,8°\,49'.0$, вычисляя при помощи ихъ часовые углы изъ выраженія (18), найдемъ, что времени восхожденія соотвѣтствуютъ часовой уголъ $-\,7^h\,3^m.3$ а времени захожденія—уголъ $+\,6^h\,43^m.3$. Первой изъ этихъ величинъ часовой уголъ луны 26 марта 1877 года достигаетъ въ теченіи $7^h\,18^m.2$ средняго времени, а второй—въ теченіи $6^h\,57^m.5$. Изъ этого заключаемъ, что 26 марта 1877 года луна взойдетъ въ $2^h\,47^m.7$, а зайдетъ въ $17^h\,3^m.4$. Такъ какъ эти времена близки къ найденнымъ въ первомъ приближеніи, то мы ограничимся этимъ и будемъ считать вопросъ рѣшеннымъ.

Если склоненіе свѣтила измѣняется, то наибольшей высоты надъ горизонтомъ оно достигаетъ не въ моментъ кульминаціи, а прежде или послѣ него, смотря потому, уменьшается склоненіе свѣтила или возрастаетъ. Доказать это, а также опредѣлить часовой уголъ, при которомъ свѣтило достигаетъ наибольшей высоты надъ горизонтомъ, легко. Для этого обратимся къ извѣстному соотношенію между частями параллактическаго треугольника

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

Чтобы найти время наименьшаго зенитнаго разстоянія свѣтила при измѣняющемся склоненіи, стоитъ только дифференцировать это уравненіе, принимая въ немъ z, δ и t за перемѣнныя величины, опредѣлить производную $\frac{dz}{dt}$ и найти условіе, при которомъ эта производная обращается въ нуль. Дифференцируя приведенное уравненіе въ указанномъ смыслѣ, имѣемъ

$$-\sin z dz = [\,\sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos t\,]\, d\delta - \cos\varphi \cos\delta \sin t\, dt$$

откуда

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\cos\varphi\cos\delta\sin t}{\sin z} - \frac{1}{\sin z}\left\{\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t\right\}\frac{d\delta}{dt}$$

а слѣдовательно часовой уголъ свѣтила, соотвѣтствующій моменту его наибольшей высоты, опредѣлится изъ уравненія

$$0 = \cos\varphi\cos\delta\sin t - \left\{\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t\right\}\frac{d\delta}{dt}$$

откуда получаемъ

$$\sin t = \left\{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\delta\cos t\right\}\frac{d\delta}{dt}$$

И такъ мы видимъ, что $\sin t$ есть величина порядка $\frac{d\delta}{dt}$, или порядка измѣненія склоненія въ единицу времени, напр. въ часъ; но такъ какъ часовыя измѣненія склоненій всѣхъ свѣтилъ, не исключая и луны, не велики, то можемъ считать t такой величиной, для которой $\sin t = t \sin 1''$ и $\cos t = 1$; а потому предыдущему уравненію можно дать видъ

$$t = \left\{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\delta\right\}\frac{1}{\sin 1''}\cdot\frac{d\delta}{dt}$$

если хотимъ этотъ часовой уголъ выразить во времени, то должны вторую часть уравненія раздѣлить на 15, тогда

$$t = \left\{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\delta\right\}\frac{1}{15\,.\sin 1''}\frac{d\delta}{dt} \tag{26}$$

представитъ собою выраженный во времени часовой уголъ свѣтила соотвѣтствующій тому моменту, въ который это свѣтило достигаетъ наибольшей высоты надъ горизонтомъ. Этотъ часовой уголъ будетъ выраженъ въ секундахъ времени, если производная $\frac{d\delta}{dt}$ представляетъ собою измѣненіе склоненія свѣтила въ секунду времени. Если склоненіе свѣтила возрастаетъ, то производная $\frac{d\delta}{dt}$ будетъ положительна, если при томъ такое свѣтило кульминируетъ къ югу отъ зенита, то разность $\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\delta$ также будетъ положительна, а слѣдовательно и t будетъ положительно и свѣтило достигнетъ наибольшей высоты надъ горизонтомъ послѣ прохожденія черезъ меридіанъ. Если склоненіе свѣтила уменьшается, а слѣдовательно производная $\frac{d\delta}{dt}$ отрицательна, то при одинакихъ остальныхъ условіяхъ съ предыдущимъ наибольшая высота свѣтила надъ горизонтомъ будетъ имѣть мѣсто до кульминаціи. Обратныя заключенія справедливы для свѣтилъ кульминирующихъ между зенитомъ и полюсомъ.

Для вычисленія временъ восхожденія или захожденія свѣтила мы беремъ изъ эфемеридъ склоненіе этого свѣтила. Если свѣтило имѣетъ дискъ, то въ таблицахъ дается склоненіе центра такого свѣтила. Все, что мы до сихъ поръ говорили о времени восхожденія или захожденія свѣтилъ имѣющихъ дискъ, относилось ко времени восхожденія или захожденія центровъ этихъ свѣтилъ, но прежде чѣмъ центръ свѣтила

достигнетъ горизонта при восхожденіи извѣстная часть диска уже взойдетъ и въ такомъ случаѣ за время восхожденія свѣтила слѣдуетъ считать тотъ моментъ, въ который верхній край восходящаго свѣтила касается горизонта; но зная время восхожденія или захожденія центра свѣтила, не трудно опредѣлить время восхожденія или захожденія верхняго или нижняго края свѣтила. Рѣшеніе этого вопроса приводится къ опредѣленію измѣненія часоваго угла центра свѣтила соотвѣтствующаго измѣненію зенитнаго разстоянія на радіусъ диска свѣтила. Одно изъ соотношеній между частями параллактическаго треугольника имѣетъ видъ

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

чтобы найти измѣненіе часоваго угла соотвѣтствующее извѣстному измѣненіе зенитнаго разстоянія, стоитъ только дифференцировать предыдущее уравненіе, принимая за перемѣнныя величины z и t, тогда получимъ

$$\sin z \, dz = \cos \varphi \cos \delta \sin t \, dt$$

откуда

$$dt = \frac{\sin z \, dz}{\cos \varphi \cos \delta \sin t}$$

назвавъ параллактическій уголъ чрезъ p, изъ параллактическаго треугольника находимъ

$$\sin z \sin p = \cos \varphi \sin t$$

откуда

$$\frac{\sin z}{\cos \varphi \sin t} = \frac{1}{\sin p}$$

слѣдовательно

$$dt = \frac{dz}{\cos \delta \sin p}$$

если хотимъ имѣть измѣненіе часового угла соотвѣтствующее измѣненію зенитнаго разстоянія на радіусъ свѣтила, то въ найденное выраженіе вмѣсто zd слѣдуетъ поставить радіусъ R свѣтила. Если R выраженъ въ секундахъ дуги, то искомое измѣненіе часоваго угла выраженное въ секундахъ времени будетъ

$$dt = \frac{R}{15 \cos \delta \sin p} \tag{27}$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что измѣненіе часоваго угла соотвѣтствующее измѣненію зенитнаго разстоянія на діаметръ диска представится въ видѣ

$$dt = \frac{2\,R}{15 \cos \delta \sin p} \tag{28}$$

что касается до p, то для опредѣленія его изъ параллактическаго треугольника имѣемъ

$$\sin \varphi = \sin \delta \cos z + \cos \delta \sin z \cos p$$

для времени восхожденія или захожденія свѣтила $z = 90^\circ$, а потому значеніе p, входящее въ выраженія (27) или (28), должно быть найдено изъ уравненія

$$\cos p = \frac{\sin \varphi}{\cos \delta}. \tag{29}$$

Если поправку часоваго угла вычисленную по выраженію (27) придадимъ со знакомъ къ часовому углу времени восхожденія или захожденія центра вычисленному по уравненію (18), то найдемъ часовой уголъ центра свѣтила соотвѣтствующій моменту восхожденія или захожденія края. Если свѣтило имѣетъ дискъ, то оно имѣетъ и собственное движеніе, прямое восхожденіе такого свѣтила измѣняется въ промежутокъ времени отдѣляющій собою восхожденіе или захожденіе края отъ восхожденія или захожденія центра свѣтила. При точномъ вычисленіи временъ восхожденія и захожденія свѣтилъ это измѣненіе прямаго восхожденія должно быть принято во вниманіе, ибо отъ него эти времена извѣстнымъ образомъ измѣняются. Пусть звѣздное время восхожденія центра свѣтила будетъ θ_0 и звѣздное время восхожденія напр. верхняго края пусть будетъ θ. Назовемъ прямое восхожденіе соотвѣтствующее времени θ_0 чрезъ α_0 и прямое восхожденіе свѣтила соотвѣтствующее времени θ пусть будетъ α. Пусть кромѣ того λ представляетъ собою измѣненіе прямаго восхожденія свѣтила въ секунду звѣзднаго времени. Тогда, предполагая, что въ малый промежутокъ времени $\theta_0 - \theta$ прямое восхожденіе измѣняется пропорціонально времени, получимъ

$$\alpha_0 = \alpha + \lambda(\theta_0 - \theta)$$

гдѣ $\theta_0 - \theta$ выражено въ секундахъ времени. Возьмемъ тождество

$$\theta - \alpha = \theta_0 - \alpha_0 - (\theta_0 - \theta) + (\alpha_0 - \alpha)$$

и внесемъ въ него вмѣсто разности $\alpha_0 - \alpha$ величину изъ предыдущаго выраженія, тогда получимъ

$$\theta - \alpha = (\theta_0 - \alpha_0) - (\theta_0 - \theta) + \lambda(\theta_0 - \theta)$$

откуда

$$(\theta_0 - \alpha_0) - (\theta - \alpha) = (\theta_0 - \theta)(1 - \lambda)$$

слѣдовательно

(30) $$\theta_0 - \theta = \frac{\theta_0 - \alpha_0 - (\theta - \alpha)}{1 - \lambda}$$

$\theta_0 - \alpha_0$ есть часовой уголъ центра свѣтила соотвѣтствующій моменту восхожденія центра, а $(\theta - \alpha)$ есть часовой уголъ того же центра соотвѣтствующій моменту восхожденія разсматриваемаго края. Слѣдовательно числитель представляетъ собою измѣненіе часоваго угла соотвѣтствующее измѣненіе зенитнаго разстоянія центра на радіусъ свѣтила, а потому, внося величину этого измѣненія изъ выраженія (27), получимъ уравненіе

(31) $$\theta_0 - \theta = \frac{R}{15 \cos\delta \sin p} \cdot \frac{1}{1 - \lambda}$$

которымъ опредѣляется время восхожденія края по времени восхожденія центра свѣтила. Подобнымъ же образомъ найдемъ, что время протекающее отъ восхожденія верхняго до восхожденія нижняго края свѣтила выразится чрезъ

(32) $$\theta_1 - \theta = \frac{2R}{15 \cos\delta \sin p} \cdot \frac{1}{1 - \lambda}$$

гдѣ подъ θ_1 разумѣемъ время восхожденія нижняго края свѣтила.

III.

Рефракція.

6. Приступимъ теперь къ изложенію главной части сферической астрономіи,—къ обзору тѣхъ явленій, отъ которыхъ зависитъ разность видимыхъ и истинныхъ положеній свѣтилъ и начнемъ съ явленія обусловливающагося существованіемъ около земной поверхности атмосферы не одинаково вездѣ плотной и не одинаково вездѣ нагрѣтой.

Если бы между глазомъ наблюдателя и свѣтиломъ не было преломляющей среды, то лучи свѣта, распространяясь отъ свѣтила, достигали бы глаза наблюдателя по прямолинейному направленію. Но лучи свѣта идущіе отъ свѣтилъ, прежде чѣмъ достигаютъ глаза наблюдателя, проходятъ чрезъ земную атмосферу и, вступивъ въ нее изъ пустоты, встрѣчаютъ по мѣрѣ приближенія къ поверхности земли слои атмосферы все болѣе и болѣе плотные и въ нихъ претерпѣваютъ отклоненіе отъ прямолинейнаго направленія. Такимъ образомъ лучъ свѣта, будучи постоянно отклоняемъ въ одну сторону, пройдетъ черезъ атмосферу и достигнетъ глаза наблюдателя криволинейно. Наблюдатель увидитъ свѣтило по направленію послѣдняго элемента этой кривой линіи или, что все равно, по направленію касательной къ этой кривой, проведенной черезъ ея конечную точку. *Уголъ, составленный направленіемъ этой касательной или, что все равно, направленіемъ, по которому мы дѣйствительно видимъ свѣтило съ направленіемъ, по которому шелъ бы лучъ въ безвоздушномъ пространствѣ, называется рефракціей.* Такъ какъ плотность атмосферы отъ ея предѣловъ непрерывно возрастаетъ до поверхности земли, то кривая линія, по которой направляется свѣтовой лучъ въ атмосферѣ постоянно обращена къ плоскости горизонта своею вогнутою стороною и свѣтило кажется намъ надъ горизонтомъ выше того мѣста, которое оно дѣйствительно занимаетъ. Если бы мы знали законъ измѣненія температуры атмосферы съ высотою, то рѣшеніе вопроса о вычисленіи рефракціи могло бы представлять аналитическія трудности только со стороны интегрированія извѣстныхъ дифференціальныхъ выраженій. Но не зная этого закона, мы должны принять какую либо гипотезу объ измѣненіи температуры въ земной атмосферѣ съ высотою, ввести нѣкоторыя постоянныя величины опредѣляющіяся изъ наблюденій и затѣмъ на основаніи закона Маріотта и законовъ преломленія свѣта рѣшать вопросъ о вычисленіи рефракціи.

Законы преломленія свѣта, на которыхъ мы будемъ основывать наши выводы, суть слѣдующіе:

1) Лучъ падающій и лучъ преломленный лежатъ постоянно въ одной плоскости проведенной черезъ нормаль въ точкѣ паденія и лучъ падающій.

2) Синусъ угла паденія находится въ постоянномъ отношеніи къ синусу угла преломленія. Если лучъ переходитъ изъ пустоты въ данную однородную преломляющую среду, то упомянутое отношеніе называется *абсолютнымъ показателемъ преломленія.*

3) Если показатель преломленія при переходѣ изъ пустоты въ какую либо среду A есть a и показатель преломленія при переходѣ изъ пустоты въ другую какую либо среду есть b, то показатель преломленія при переходѣ изъ среды A въ среду B будетъ $\frac{b}{a}$.

Земля окружена атмосферой, плотность и температура которой не одинаковы во всѣхъ точкахъ. Для простоты рѣшенія вопроса о рефракціи раздѣлимъ мысленно всю атмосферу на безконечно тонкіе слои и будемъ предполагать, что температура атмосферы и плотность въ каждомъ такомъ слоѣ постоянны и измѣняются только при переходѣ отъ одного слоя къ другому. При такомъ допущеніи мы можемъ принимать, что въ каждомъ отдѣльномъ слоѣ лучи свѣта распространяются прямолинейно и что направленіе прямолинейнаго элемента луча измѣняется только при переходѣ изъ одного слоя въ другой. Такимъ образомъ кривую линію распространенія свѣтоваго луча въ атмосферѣ мы замѣнимъ ломаною линіею, прямолинейныя части которой безконечно малы. Предположимъ, что отъ свѣтила S (фиг. 7) идетъ свѣтовой лучъ и въ безвоздушномъ пространствѣ слѣдуетъ прямолинейному направленію Sd; въ точкѣ d пусть онъ достигаетъ верхняго предѣла атмосферы и, вступивъ въ первый безконечно тонкій слой, преломляется и принимаетъ направленіе cd; вступая въ точкѣ c во второй болѣе плотный слой, лучъ снова преломляется и принимаетъ направленіе cb и т. д.; такъ что достигая глаза наблюдателя, находящагося на поверхности земли въ точкѣ A, лучъ идетъ черезъ атмосферу по направленію ломаной линіи $dcb\ldots aA$. Наблюдатель увидитъ свѣтило по направленію послѣдняго элемента aA этой ломаной линіи и отнесетъ положеніе свѣтила къ точкѣ S' сферы небесной. Уголъ, составленный направленіемъ AS' съ направленіемъ SA, которое имѣлъ бы лучъ, достигая глаза наблюдателя въ безвоздушномъ пространствѣ, т. е. уголъ SAS' называется *рефракціей*. Если продолжимъ нормаль Ao чрезъ атмосферу, то въ пересѣченіи ея со сферой небесной будетъ находиться зенитъ наблюдателя; уголъ SAZ представляетъ собою истинное (не измѣненное рефракціей) зенитное разстояніе свѣтила S. Назовемъ это зенитное разстояніе чрезъ ζ. Понятно, что уголъ $SKZ = \zeta + KSA$; какъ видно, KSA есть уголъ, подъ которымъ со свѣтила видна часть высоты земной атмосферы; но вся земная атмосфера имѣетъ весьма небольшую высоту, особенно сравнительно съ разстояніями отдѣляющими землю отъ свѣтилъ, а потому уголъ KSA имѣетъ совершенно ничтожную величину, даже для ближайшаго къ землѣ свѣтила, луны. Основываясь на этомъ, мы можемъ принимать за истинное зенитное разстояніе ζ уголъ SKZ. Если проведемъ чрезъ точку c вступленія луча во второй слой атмосферы касательную линію къ криволинейному направленію луча или, что все равно, продолжимъ элементъ cd до пересѣченія въ точкѣ k' съ нормалью проведенною къ поверхности земли чрезъ мѣсто наблюденія и означимъ уголъ $ck'Z$ чрезъ ζ', то ζ' будетъ зенитное разстояніе свѣтила измѣненное преломленіемъ въ первомъ слоѣ атмосферы. Изъ треугольника $ck'o$ имѣемъ $ck'Z = k'co + cok'$. Если назовемъ уголъ паденія луча на второй слой чрезъ

i и уголъ нормали проведенной въ точку паденія съ нормалью проведенною черезъ мѣсто наблюденія чрезъ v, то предыдущее равенство представится въ видѣ $\zeta' = i + v$; всѣ величины входящія въ это уравненіе измѣняются при переходѣ изъ одного слоя атмосферы въ другой, а потому

$$d\zeta' = di + dv \tag{33}$$

Прежде всего въ этомъ дифференціальномъ выраженіи замѣнимъ di и dv чрезъ функціи показателей преломленія и другихъ перемѣнныхъ величинъ, зависящихъ отъ перемѣнной температуры и плотности слоевъ атмосферы.

Назовемъ чрезъ μ показатель преломленія въ первомъ слоѣ, въ который вступаетъ лучъ изъ безвоздушнаго пространства. Пусть μ' будетъ показатель преломленія втораго слоя. Уголъ преломленія во второмъ слоѣ означимъ чрезъ f, тогда

$$\frac{\sin i}{\sin f} = \frac{\mu'}{\mu}$$

Положимъ $oc = q$, $ob = q'$ и назовемъ уголъ паденія на третій слой въ точкѣ b чрезъ i'; тогда $cbh = i'$ и въ треугольникѣ obc уголъ $obc = 180^\circ - i'$. Слѣдовательно

$$\frac{q}{q'} = \frac{\sin i'}{\sin f}$$

опредѣляя изъ этого и предыдущаго уравненія $\sin f$, имѣемъ

$$\sin f = \frac{\mu \sin i}{\mu'}; \qquad \sin f = \frac{q' . \sin i'}{q},$$

а потому

$$\mu\, q \sin i = \mu'\, q' . \sin i' \tag{34}$$

Понятно, что подобное же уравненіе существуетъ для каждой пары сосѣднихъ слоевъ, а потому заключаемъ, что произведеніе $q\,\mu \sin i$ есть величина постоянная, которую означимъ чрезъ γ и представимъ общій законъ рефракціи въ видѣ

$$\mu\, q \sin i = \gamma \tag{35}$$

Если назовемъ радіусъ земли чрезъ a, показатель преломленія слоя прилегающаго къ поверхности земли чрезъ μ_0 и замѣтимъ, что послѣдній уголъ паденія aAZ представляетъ собою видимое зенитное разстояніе, означенное нами чрезъ z, то изъ послѣдняго уравненія для опредѣленія постоянной γ получимъ

$$\mu_0\, a \sin z = \gamma \tag{36}$$

Мы назвали чрезъ v перемѣнный уголъ, который составляетъ радіусъ какого либо слоя проведеннаго въ точку паденія на этотъ слой съ радіусомъ земли проведеннымъ чрезъ мѣсто наблюденія, а потому каждый изъ угловъ составленныхъ радіусами проведенными въ двѣ послѣдовательныя точки паденія, т. е. каждый изъ угловъ подобныхъ углу doc мы можемъ разсматривать какъ dv; на основаніи такихъ же соображеній можемъ представить линію od въ видѣ $od = q + dq$; помня при этомъ что $dcm = i$, изъ безконечно малаго треугольника dcm имѣемъ

$$(q + dq)\, dv = \text{tang}\, i . dq$$

или

$$q . dv = \text{tang}\, i\, dq \tag{37}$$

Взявъ отъ уравненія (35) логариѳмъ и дифференцируя его, получимъ

$$\frac{dq}{q} + \frac{d\mu}{\mu} + \cotg i \,.\, di = 0,$$

откуда

$$di = -\left(\frac{dq}{q} + \frac{d\mu}{\mu}\right) \tang i,$$

а изъ уравненія (37) имѣемъ

$$dv = \frac{dq}{q} \,.\, \tang i$$

Внося эти величины дифференціаловъ dv и di въ уравненіе (33), получимъ

(38) $$d\zeta' = -\frac{d\mu}{\mu} \,.\, \tang i$$

На предѣлахъ атмосферы уголъ ζ' обращается въ SKZ, который мы условились считать за истинное зенитное разстояніе свѣтила и означили чрезъ ζ. Когда лучъ пройдя всю атмосферу достигнетъ глаза наблюдателя, то уголъ ζ' обратится въ $S'AZ$, т. е. сдѣлается равнымъ видимому зенитному разстоянію, означенному нами чрезъ z; принимая это во вниманіе, заключаемъ, что при интегрированіи предыдущаго выраженія по μ между предѣлами μ_0 и единица получимъ

$$\zeta - z = -\int_{\mu_0}^{1} \frac{d\mu}{\mu} \,.\, \tang i$$

т. е. искомую величину рефракціи. Такимъ образомъ аналитическое рѣшеніе вопроса о рефракціи приводится къ интегрированію дифференціальнаго уравненія (38); но при нѣкоторыхъ допущеніяхъ, хотя только въ извѣстной степени приближенныхъ къ истинѣ, можно выразить вторую часть этого уравненія въ зависимости отъ одного перемѣннаго и такимъ образомъ привести рѣшеніе вопроса къ выполненію нѣкоторой квадратуры.

Изъ уравненія (35) имѣемъ

$$\sin i = \frac{\gamma}{q \,.\, \mu},$$

поэтому

$$\tang i = \frac{\gamma}{\sqrt{q^2 \mu^2 - \gamma^2}}$$

для поверхности земли

$$\gamma = a\mu_0 \sin z,$$

слѣдовательно

$$\tang i = \frac{\mu_0 \, a \sin z}{\sqrt{q^2 \mu^2 - a^2 \mu_0^2 \sin^2 z}}$$

внося это въ наше дифференціальное уравненіе рефракціи, получимъ

$$d\zeta' = -\frac{\frac{a}{q}\mu_0 \sin z\, d\mu}{\mu\sqrt{\mu^2 - \frac{a^2}{q^2}\cdot\mu_0^2 \sin^2 z}}$$

Положимъ, что

$$\frac{q}{a} = 1 + s$$

тогда

$$\frac{a}{q} = (1+s)^{-1} = 1 - s + s^2 - \cdots$$

Высоты атмосферы весьма мала въ сравненіи съ радіусомъ земли, слѣдовательно отношеніе $\frac{a}{q}$ мало разнится отъ единицы и s мало отличается отъ нуля; поэтому можемъ ограничиться въ предыдущемъ ряду первою степенью s и принять

$$\frac{a}{q} = 1 - s$$

Внося это въ предыдущее дифференціальное выраженіе, получимъ

$$d\zeta' = \frac{-(1-s)\sin z\, d\mu}{\mu\sqrt{\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 - \sin^2 z + 2s\sin^2 z - s^2\sin^2 z}}$$

или

$$d\zeta' = \frac{-(1-s)\sin z\, d\mu}{\mu\sqrt{\cos^2 z - \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2\right] + (2s - s^2)\sin^2 z}}$$

Выразимъ теперь перемѣнное μ въ функціи перемѣнной плотности ρ атмосферы. Величина $\mu^2 - 1$ называется преломляющей силой среды; изъ оптики извѣстно, что преломляющая сила пропорціональна плотности среды; слѣдовательно

$$\frac{\mu^2 - 1}{\rho} = \frac{\mu_0^2 - 1}{\rho_0} = c$$

гдѣ c есть постоянная величина и ρ_0 плотность слоя атмосферы прилегающаго къ поверхности земли. И такъ $\mu^2 - 1 = c\rho$, откуда

$$d\mu = \frac{c\,.\,d\rho}{2\sqrt{c\rho + 1}}$$

Внося все это въ предыдущее дифференціальное выраженіе, получимъ

$$d\zeta' = \frac{-\frac{1}{2}(1-s)\sin z\,.\,c d\rho}{(1+c\rho)\sqrt{\cos^2 z - \left(1 - \frac{1+c\rho}{1+c\rho_0}\right) + (2s - s^2)\sin^2 z}}$$

Положимъ

$$\frac{c\rho_0}{1+c\rho_0} = 2\alpha \qquad (39)$$

тогда легко видѣть, что

$$(40) \qquad \frac{1+c\rho}{1+c\rho_0} = 1 + \frac{c\rho - c\rho_0}{1+c\rho_0} = 1 - 2\,\alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

слѣдовательно

$$1 + \frac{1+\rho}{1+\rho_0} = 2\,\alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

кромѣ того

$$1 + c\rho = (1 + c\rho_0)\left[1 - 2\,\alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)\right]$$

Вводя все это въ предыдущее дифференціальное выраженіе, получимъ

$$d\zeta' = \frac{-\alpha(1-s)\sin z\,\frac{d\rho}{\rho_0}}{\left[1 - 2\,\alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)\right]\sqrt{\cos^2 z - 2\,\alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) + (2\,s - s^2)\sin^2 z}}$$

мы видѣли, что

$$\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 = \frac{1+c\rho}{1+c\rho_0}$$

сравнивая это съ выраженіемъ (40), находимъ, что

$$(41) \qquad \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 = 1 - 2\,\alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

На предѣлахъ атмосферы $\mu = 1$, на поверхности земли $\mu_0 = \frac{3400}{3399}$; слѣдовательно отношеніе $\frac{\mu}{\mu_0}$ для всѣхъ величинъ μ заключается въ тѣсныхъ предѣлахъ 1 и $\frac{3399}{3400}$, а потому вмѣсто перемѣннаго отношенія $\frac{\mu}{\mu_0}$ можно взять ариѳметическую средину изъ значеній его при поверхности земли и на предѣлахъ атмосферы. На предѣлахъ атмосферы $\rho = 0$, слѣдовательно по выраженію (41) тамъ

$$\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 = 1 - 2\,\alpha$$

На поверхности земли ρ обращается въ ρ_0, а отношеніе $\frac{\mu}{\mu_0}$, какъ видно изъ уравненія (41), — въ единицу; ариѳметическая средина этихъ двухъ величинъ есть $1 - \alpha$. И такъ безъ чувствительной погрѣшности можно принять

$$\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 = 1 - \alpha$$

Вставляя это въ предыдущее дифференціальное выраженіе рефракціи, получимъ

$$(42) \qquad d\zeta' = \frac{-\alpha(1-s)\sin z\,\frac{d\rho}{\rho_0}}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z - 2\,\alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) + (2\,s - s^2)\sin^2 z}}$$

7. Чтобы интегрировать это выраженіе, необходимо знать законъ измѣненія плотности атмосферы съ высотою; другими словами, необходимо знать зависимость между перемѣнными s и ρ. Если бы температура атмосферы была равномѣрна, то плотность воздушныхъ слоевъ была бы простою функціею давленія воздуха, видъ которой можно было бы опредѣлить на основаніи закона Маріотта. Въ самомъ дѣлѣ соотношеніе между s и ρ въ томъ предположеніи, что атмосфера нагрѣта во всѣхъ своихъ частяхъ равномѣрно, опредѣляется слѣдующими простыми соображеніями. Означимъ чрезъ p давленіе въ какой нибудь точкѣ атмосферы на единицу поверхности. Положимъ, что p есть давленіе на одинъ квадратный футъ на высотѣ отъ центра земли равной q. Пусть p_0 будетъ атмосферное давленіе на поверхности земли, гдѣ плотность воздуха есть ρ_0; тогда по закону Маріотта имѣемъ

$$\frac{p}{p_0}=\frac{\rho}{\rho_0},$$

откуда

$$dp=p_0\frac{d\rho}{\rho_0} \tag{43}$$

При измѣненіи разстоянія q отъ центра земли на величину dq давленіе уменьшается вѣсомъ воздушнаго столба, имѣющаго основаніемъ единицу, а высотою dq. Масса этого столба есть ρdq. Если назовемъ напряженіе тяжести на разстояніи отъ центра земли равномъ $q+dq$ чрезъ g, то вѣсъ упомянутаго столба будетъ $g\rho\,.\,dq$; и такъ

$$dp=-g\rho\,.\,dq$$

Если означимъ напряженіе тяжести на поверхности земли чрезъ g_0, то по закону Ньютона имѣемъ

$$\frac{g}{g_0}=\frac{a^2}{q^2}$$

слѣдовательно

$$dp=-g_0\frac{a^2}{q^2}\cdot\rho dq \tag{44}$$

Сравнивая это съ выраженіемъ (43), имѣемъ

$$p_0\frac{d\rho}{\rho_0}=ag_0\rho\,.\,d\left(\frac{a}{q}\right)$$

интегрируя это, находимъ

$$\frac{p_0}{\rho_0}\lg\rho=ag_0\left(\frac{a}{q}\right)+C$$

гдѣ C есть произвольная постоянная величина введенная интегрированіемъ. Для поверхности земли $\rho=\rho_0$ и $q=a$, а потому предыдущій интегралъ для поверхности земли обращается въ

$$\frac{p_0}{\rho_0}\lg\rho_0=ag_0+C$$

вычитая это изъ предыдущаго, имѣемъ

$$\frac{p_0}{\rho_0}\left\{\lg\rho-\lg\rho_0\right\}=ag_0\left(\frac{a}{q}-1\right),$$

откуда

$$\lg \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{a g_0 \varrho_0}{p_0} \left(\frac{a}{q} - 1\right)$$

или

$$\varrho = \varrho_0 e^{\frac{a g_0 \varrho_0}{p_0}\left(\frac{a}{q} - 1\right)}$$

Полагая здѣсь

$$\frac{p_0}{g_0 \varrho_0} = l$$

и помня что

$$\frac{a}{q} = 1 - s$$

имѣемъ

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{as}{l}} \tag{45}$$

уравненіе, которое представляетъ искомую зависимость между s и ϱ въ томъ предположеніи, что всѣ слои атмосферы нагрѣты равномѣрно. Но температура атмосферы не во всѣхъ ея точкахъ одинакова, а уменьшается по мѣрѣ возрастанія высоты надъ поверхностію земли по неизвѣстному пока для насъ закону. Изысканіе етого закона имѣетъ ближайшею цѣлію дать возможность заключить о температурѣ произвольно высоко взятой надъ поверхностію земли точки атмосферы по температурѣ въ мѣстѣ наблюденія на поверхности земли. Если бы были извѣстны всѣ причины, которыми обусловливается температура данной точки атмосферы, то задача могла бы быть рѣшена аналитическимъ путемъ и приводилась бы къ опредѣленію изъ наблюденій извѣстнаго числа постоянныхъ величинъ. Но большая часть причинъ, вліяющихъ на уменьшеніе температуры въ атмосферѣ по мѣрѣ возрастанія высоты, если не совершенно неизвѣстна, то такъ неточно изслѣдована, что въ настоящее время почти нѣтъ возможности съ достаточною точностію опредѣлить количественно вліяніе этихъ причинъ на явленіе. При такомъ состояніи дѣла для представленія закона измѣненія температуры въ атмосферѣ съ высотою, остается только прибѣгнуть къ какой либо эмпирической формулѣ и измѣрять достоинство такой формулы степенью согласія гипотезы лежащей въ ея основаніи съ дѣйствительностію.

Условія, на которыя мы должны обратить вниманіе при составленіи эмпирической формулы, представляющей законъ измѣненія температуры въ атмосферѣ, суть слѣдующія:

а) Измѣненіе температуры на высотахъ намъ доступныхъ, а потому подлежащее непосредственному изслѣдованію, должно представляться эмпирическою формулою съ точностію соотвѣтствующею точности употребляемаго метода изслѣдованія. Хотя изслѣдованіе закона измѣненія температуры на доступныхъ намъ высотахъ довольно затруднительно, однако объ этомъ измѣненіи можемъ сдѣлать слѣдующія два весьма вѣроятныя заключенія:

1) Измѣненіе температуры выражается ея уменьшеніемъ по мѣрѣ возрастанія высоты.

2) Въ умѣренныхъ поясахъ необходимо подняться надъ поверхностію земли на высоту отъ 110 до 120 туазовъ, для того чтобы замѣтить уменьшеніе температуры на одинъ градусъ термометра Цельзія.

b) Метеорологическія наблюденія показали, что температура лѣтомъ уменьшается быстрѣе чѣмъ зимою, а также—быстрѣе днемъ чѣмъ ночью.

c) Изъ наблюденій извѣстно, что рефракція зимою болѣе чѣмъ лѣтомъ и ночью болѣе чѣмъ днемъ, а потому слѣдуетъ заключить, что быстрое уменьшеніе температуры производитъ меньшую рефракцію и обратно.

d) Изъ наблюденій продолжительности сумерекъ (зари) могутъ быть указаны границы высоты, до которой земная атмосфера имѣетъ еще примѣтную плотность.

e) Температура міроваго пространства намъ неизвѣстна съ достовѣрностію, однако предположеніе, что она заключается въ предѣлахъ — 100° и — 200° имѣетъ нѣкоторую вѣроятность.

Функція, посредствомъ которой имѣются въ виду представить законъ уменьшенія температуры по мѣрѣ возрастанія высоты, должна быть выбрана такъ, чтобы числовое значеніе ея вообще уменьшалось въ то время, какъ независимое перемѣнное возрастаетъ; при томъ эта функція въ извѣстныхъ предѣлахъ измѣненія перемѣннаго не должна претерпѣвать нарушенія непрерывности и наконецъ эта функція должна удовлетворять еще слѣдующимъ условіямъ:

1) Высота (принимаемая въ этой функціи за главное перемѣнное), для которой эта функція можетъ возрастать или вообще претерпѣвать нарушеніе непрерывности, должна быть болѣе той, которая принимается за наименьшую высоту атмосферы выводимую изъ наблюденій продолжительности сумерекъ.

2) Плотность атмосфернаго слоя заключающагося между высотою атмосферы выводимою изъ наблюденій продолжительности сумерекъ и высотою, для которой избираемая функція или начинаетъ возрастать, или претерпѣваетъ нарушеніе непрерывности, должна быть такъ мала, чтобы этотъ слой не производилъ примѣтнаго преломленія лучей свѣта.

Эмпирическія формулы, представляющія законъ уменьшенія температуры болѣе или менѣе согласно, хотя съ нѣкоторыми изъ приведенныхъ выше условій, принадлежатъ Лапласу, Бесселю, Юнгу, Шмидту, Эйвори, Люббоку и Гилдейну *). Мы разсмотримъ только двѣ изъ нихъ и начнемъ съ гипотезы Бесселя.

Бессель для выраженія закона измѣненія плотности атмосферныхъ слоевъ съ высотою удерживаетъ показательную форму (45), но чтобы удовлетворить условію не равномѣрности распредѣленія теплоты въ различныхъ слояхъ, онъ вводитъ въ форму (45) добавочнаго производителя и полагаетъ

*) *Laplace.* Mecanique céleste. Tome IV., Liv. X.
Bessel. Fundamenta astronomiae. Tabulae Regiomontanae.
Young. On the astronomical refraction. Philos. Transact. for 1819, 1824.
Schmidt. Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. Goettingen 1828.
Ivory. On the astronomical refraction. Philos. Transact. for 1823, 1838.
Lubbock. On astronomical refraction. London 1840.
Gyldén. Untersuchungen uber die constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Petersburg 1866.

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{as}{l}} \cdot e^{\frac{as}{h}}$$

или

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{as}{l}\left(\frac{h-l}{h}\right)}$$

гдѣ h есть постоянная величина, которую требуется опредѣлить изъ наблюденій. Если положимъ

$$\frac{h-l}{hl} \cdot a = \beta,$$

то гипотеза Весселя представится формой

(46) $$\rho = \rho_0 e^{-\beta s}$$

Выражаемый этимъ уравненіемъ законъ измѣненія плотности атмосферы съ высотою весьма мало соотвѣтствуетъ дѣйствительности. Выводимое изъ этой формулы уменьшеніе температуры съ высотою значительно менѣе того, которое дѣйствительно существуетъ. Въ самомъ дѣлѣ, измѣненіе плотности съ высотою должно быть найдено чрезъ интегрированіе выраженія (44), которое, по исключеніи изъ него перемѣнныхъ ρ и g, перваго посредствомъ Весселева выраженія (46), а втораго по соотношенію $\frac{a}{g} = 1 - s$, принимаетъ видъ

$$dp = -g_0 \rho_0 a e^{-\beta s} . ds$$

интегрируя это, находимъ

$$p = \frac{a g_0 \rho_0}{\beta} e^{-\beta s} + C$$

для поверхности земли, гдѣ $s = o$, предыдущее выраженіе принимаетъ видъ

$$p_0 = \frac{a g_0 \rho_0}{\beta} + C$$

вычитая это изъ предыдущаго, находимъ

$$p - p_0 = \frac{a g_0 \rho_0}{\beta} (e^{-\beta s} - 1)$$

или

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{g_0 \rho_0}{p_0} \frac{a}{\beta} (e^{-\beta s} - 1)$$

полагая, какъ прежде, $\frac{g_0 \rho_0}{p_0} = \frac{1}{l}$, имѣемъ

(47) $$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{a}{\beta l} (e^{-\beta s} - 1).$$

Если назовемъ температуру извѣстнаго объема воздуха чрезъ t, величину объема чрезъ v, то по закону Маріоттъ-Гей-Люссака имѣемъ

$$\frac{pv}{1+mt}=c$$

гдѣ m есть коеффиціентъ разширенія и c постоянная величина. Но известно, что объемы обратно пропорціональны плотностямъ, а потому

$$v=\frac{c'}{\rho}$$

гдѣ c' есть также постоянная величина. Вводя это въ предыдущее выраженіе, получимъ

$$\frac{p}{\rho(1+mt)}=\frac{c}{c'}$$

Для другаго давленія, плотности и температуры имѣемъ

$$\frac{p_0}{\rho_0(1+mt_0)}=\frac{c}{c'}$$

а потому, раздѣливъ одно на другое, находимъ

$$\frac{p}{p_0}=\frac{\rho}{\rho_0}\frac{(1+mt)}{(1+mt_0)} \tag{48}$$

Это выраженіе и можетъ служить для повѣрки гипотезы Бесселя наблюденіями. Въ самомъ дѣлѣ, если для произвольнаго значенія s вычислимъ изъ выраженія (46) величину отношенія $\frac{\rho}{\rho_0}$, а потомъ изъ выраженія (47) найдемъ для этого же значенія s величину отношенія $\frac{p}{p_0}$, то предыдущее уравненіе послужитъ для опредѣленія t соотвѣтствующаго принятому значенію s по данной величинѣ t_0; другими словами, оно послужитъ для опредѣленія по температурѣ на поверхности земли температуры точки атмосферы, лежащей въ одной вертикальной линіи съ мѣстомъ наблюденія и на извѣстной высотѣ надъ нимъ. Принимая $m=0,00074183$, $\beta=745.75$, по опредѣленію Бесселя, и $l=7974$ метрамъ, по опредѣленію Лапласа, найдемъ, что по гипотезѣ Бесселя температура уменьшается на одинъ градусъ при поднятіи не менѣе какъ на 800 метровъ надъ поверхностью земли. Но всѣ наблюденія, какъ въ умѣренныхъ, такъ равно и въ жаркихъ поясахъ показали, что уменьшеніе температуры на одинъ градусъ имѣетъ уже мѣсто при подъемѣ отъ 200 до 230 метровъ. Такимъ образомъ гипотеза Бесселя весьма мало согласуется съ дѣйствительностію. Имѣя это въ виду, Бессель распространилъ свои таблицы рефракціи, вычисленныя при этой гипотезѣ, только до зенитнаго разстоянія равнаго 85°; для зенитныхъ же разстояній заключающихся между предѣлами 85° и 90° онъ опредѣлилъ величину рефракціи не аналитическимъ путемъ, а путемъ эмпирическимъ. Такимъ образомъ самъ Бессель признаетъ удовлетворительнымъ согласіе своей теоріи съ наблюденіями для зенитныхъ разстояній достигающихъ только 85°. Но принимая во вниманіе, что для зенитныхъ разстояній не превышающихъ этого предѣла величина рефракціи, выводимая изъ теоріи Бесселя, вполнѣ согласуется съ величинами найденными по теоріямъ основаннымъ на другихъ гипотезахъ, и помня, что наиболѣе употребительныя въ настоящее время таблицы рефракціи составлены Бесселемъ, мы большую часть главы о рефракціи посвятимъ изложенію Бесселевой теоріи.

8. И такъ будемъ интегрировать дифференціальное выраженіе рефракціи, основываясь на гипотезѣ Бесселя. Дифференцируя выраженіе (46), имѣемъ

$$\frac{d\varrho}{\varrho_0} = -\beta . e^{-\beta s} . ds$$

а потому выраженіе (42) принимаетъ видъ

$$d\zeta' = \frac{\alpha\beta\,(1-s)\sin z . e^{-\beta s} . ds}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z - 2\,\alpha\,(1-e^{-\beta s}) + (2s - s^2)\sin^2 z}}$$

полагая здѣсь

$$y^2 = \cos^2 z - 2\,\alpha\,(1 - e^{-\beta s}) + 2\,s\sin^2 z$$

имѣемъ

(49)
$$d\zeta' = \frac{\alpha\beta\,(1-s)\sin z . e^{-\beta s}\,ds}{(1-\alpha)\sqrt{y^2 - s^2\sin^2 z}} .$$

но

$$\frac{1-s}{\sqrt{y^2 - s^2 . \sin^2 z}} = \frac{1-s}{y}\left\{1 - \frac{s^2}{y^2}\sin^2 z\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

s есть очень малая величина; принимая высоту атмосферы въ 10 миль, найдемъ, что наибольшая величина s есть 0,0115 мили. Поэтому, ограничиваясь при разложеніи бинома вторыми степенями s, имѣемъ

$$\frac{1-s}{\sqrt{y^2 - s^2 . \sin^2 z}} = \frac{1-s}{y}\left\{1 + \frac{s^2 . \sin^2 z}{2\,y^2}\right\}$$

что приводится къ виду

$$\frac{1-s}{\sqrt{y^2 - s^2\sin^2 z}} = \frac{1}{y} + \frac{s^2\sin^2 z}{2\,y^3} - \frac{s}{y} - \frac{s^3 . \sin^2 z}{2\,y^3}$$

но отвергая третью степень s, представляемъ это въ формѣ

$$\frac{1-s}{\sqrt{y^2 - s^2 . \sin^2 z}} = \frac{1}{y} - \frac{2\,s\,y^2 - s^2 . \sin^2 z}{2\,y^3}$$

внося это въ выраженіе (49) и подставляя вмѣсто y его величину, имѣемъ

(50)
$$d\zeta' = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha} \cdot \frac{\sin z . e^{-\beta s}\,ds}{\sqrt{\cos^2 z - 2\,\alpha\,(1 - e^{-\beta s}) + 2s\sin^2 z}}$$

$$-\frac{\alpha\beta}{1-\alpha} \cdot e^{-\beta s} . \sin z \left\{\frac{2\,s . \cos^2 z - 4\,\alpha\,s\,(1 - e^{-\beta s}) + 3\,s^2\sin^2 z}{2\left[\cos^2 z - 2\,\alpha\,(1 - e^{-\beta s}) + 2\,s\sin^2 z\right]^{\frac{3}{2}}}\right\} ds$$

Легко показать, что второй членъ имѣетъ малую величину даже при горизонтѣ, гдѣ $z = 90°$. Въ самомъ дѣлѣ, принимая въ немъ $z = 90°$, дадимъ ему видъ

$$-\frac{\alpha\beta}{1-\alpha}\cdot\frac{s.e^{-\beta s}\left\{\frac{3}{2}s - 2\alpha\left(1-e^{-\beta s}\right)\right\}}{\left\{2s - 2\alpha\left(1-e^{-\beta s}\right)\right\}^{\frac{3}{2}}}ds$$

но разлагая функцію $e^{-\beta s}$ по степенямъ s и ограничиваясь первою степенью s, можемъ принять

$$(1 - e^{-\beta s}) = \beta s$$

тогда предыдущее выраженіе обращается въ

$$-\frac{\alpha\beta}{1-\alpha}\cdot\frac{e^{-\beta s}\sqrt{s}\left\{\frac{3}{2} - 2\alpha\beta\right\}ds}{2^{\frac{3}{2}}\left\{1-\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}} \tag{51}$$

Это выраженіе слѣдуетъ интегрировать по s въ предѣлахъ соотвѣтствующихъ значеніямъ этого перемѣннаго для поверхности земли и для предѣловъ атмосферы. Мы видѣли, что

$$s = \frac{q}{a} - 1$$

для поверхности земли $q = a$ и $s = 0$. Если назовемъ высоту атмосферы чрезъ H, то для предѣловъ атмосферы $q = a + H$ и s для предѣловъ атмосферы выразится чрезъ

$$s = \frac{H}{a}$$

И такъ предѣлами интеграла предыдущаго выраженія по s будутъ 0 и $\frac{H}{a}$; но вмѣсто высшаго предѣла т. е. вмѣсто $\frac{H}{a}$ можемъ прямо взять, ∞, ибо на высотахъ большихъ H атмосферы не существуетъ и свѣтовой лучъ идетъ отъ свѣтила, не измѣняя своего направленія; а потому выраженіе (51) можно представить въ видѣ

$$-\frac{\alpha\left(\frac{3}{2} - 2\alpha\beta\right)}{2\sqrt{2\beta}\,(1-\alpha)\,(1-\alpha\beta)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty \sqrt{\beta s}\; e^{-\beta s}\,\beta\,.ds$$

если сдѣлаемъ $\beta s = x$, то предыдущій интегралъ приметъ форму

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\,.\,e^{-x}\,d\,x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

и такъ наибольшая величина разсматриваемаго нами члена дифференціальнаго выраженія рефракціи послѣ интегрированія приводится къ виду

$$-\frac{\alpha\left(\frac{3}{2}-2\alpha\beta\right)\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}}{4\,(1-\alpha)\,(1-\alpha\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

Если вставимъ сюда вмѣсто α и β ихъ величины, опредѣленіе которыхъ ниже покажемъ, то найдемъ что все это выраженіе обращается въ $0''.55$. Такую величину имѣетъ второй членъ дифференціальнаго выраженія рефракціи у горизонта; а потому онъ безъ чувствительной погрѣшности можетъ быть всегда отвергнуть.

Обратимся теперь къ вычисленію главной части рефракціи, получающейся чрезъ интегрированіе перваго члена выраженія (50). Введемъ въ этотъ членъ новое перемѣнное подъ условіемъ

(52) $$s' = s - \frac{\alpha\,(1-e^{-\beta s})}{\sin^2 z}.$$

тогда знаменатель разсматриваемаго члена прямо обращается въ

$$(1-\alpha)\sqrt{\cos^2 z + 2\,s'\sin^2 z}$$

остается выразить по новому перемѣнному s' функцію $e^{-\beta s}\,ds$. Опредѣляя s изъ соотношенія между s и s' и внося полученную величину въ разсматриваемую сейчасъ функцію, имѣемъ

$$e^{-\beta s} = e^{-\beta\left\{s' + \frac{\alpha\,(1-e^{-\beta s})}{\sin^2 z}\right\}}$$

Пусть

$$e^{-\beta\left\{s' + \frac{\alpha\,(1-e^{-\beta s})}{\sin^2 z}\right\}} = f(s) = u$$

Тогда для разложенія u по степенямъ α можно пользоваться строкою Лагранжа. Если имѣемъ какую либо функцію $u = f(s)$, гдѣ $s = s' + \alpha.\varphi(s)$, то по теоремѣ Лагранжа разложеніе u по степенямъ α представляется въ видѣ

$$u = f(s') + \alpha\,\varphi(s')\,f'(s') + \frac{\alpha^2}{1.2}\,\frac{d\,[\varphi^2(s')\,f'(s')]}{ds'} + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\,\frac{d^2\,[\varphi^3(s')\,f'(s')]}{ds^2} + \ldots\ldots$$

гдѣ $\varphi^2(s')$, $\varphi^3(s')$ и т. д. означаютъ квадратъ, кубъ и т. д. функціи $\varphi(s')$, а $f'(s')$ есть первая производная функціи $f(s')$ взятая относительно s'.

Такъ какъ для нашего случая

$$u = f(s) = e^{-\beta s}, \qquad s = s' + \frac{\alpha\,(1-e^{-\beta s})}{\sin^2 z},$$

то

$$f(s') = e^{-\beta s'}; \qquad \varphi(s') = \frac{1 - e^{-\beta s'}}{\sin^2 z}$$

$$f'(s') = -\beta e^{-\beta s'}; \qquad \varphi^2(s') = \frac{\left(1 - e^{-\beta s'}\right)^2}{\sin^4 z}; \qquad \varphi^3(s') = \frac{\left(1 - e^{-\beta s'}\right)^3}{\sin^6 z}; \dots\dots$$

а потому строка Лагранжа въ примѣненіи къ нашему случаю даетъ

$$e^{-\beta s} = e^{-\beta s'} - \frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}\left(1 - e^{-\beta s'}\right) e^{-\beta s'} - \frac{\alpha^2\beta}{1.2.\sin^4 z}\,\frac{d\left[(1 - e^{-\beta s'})^2 e^{-\beta s'}\right]}{ds'}$$
$$- \frac{\alpha^3\beta}{1.2.3.\sin^6 z}\,\frac{d^2\left[(1 - e^{-\beta s'})^3 e^{-\beta s'}\right]}{ds'} \dots\dots\dots \tag{53}$$

Выраженіе (50), отвергая послѣдній членъ и вводя въ знаменателя новое перемѣнное, мы привели къ виду

$$d\zeta' = \frac{\alpha\beta \sin z \,.\, e^{-\beta s} ds}{(1 - \alpha)\sqrt{\cos^2 z + 2 s' \sin^2 z}} \tag{54}$$

но

$$\beta s^{-\beta s} ds = - d\left(e^{-\beta s}\right)$$

а потому чтобы преобразовать числителя выраженія (54) по новому перемѣнному, стоитъ только взять дифференціалъ выраженія (53) и измѣнить его знакъ. Выполнивъ это, имѣемъ

$$- d\left(e^{-\beta s}\right) = \beta e^{-\beta s'} ds' - \frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}\,\frac{d\left[(e^{-\beta s'} - 1) e^{-\beta s'}\right]}{ds'} ds'$$
$$+ \frac{\alpha^2\beta}{1.2.\sin^4 z}\,\frac{d^2\left[(e^{-\beta s'} - 1)^2 e^{-\beta s'}\right]}{ds^2} - \dots\dots\dots \tag{55}$$

Чтобы выполнить показанныя здѣсь дифференцированія, составимъ производную

$$\frac{d^n\left[\left(e^{-\beta s'} - 1\right)^n e^{-\beta s'}\right]}{ds'^n},$$

для этого имѣемъ

$$\left(e^{-\beta s'} - 1\right)^n = e^{-n\beta s'} - n \,.\, e^{-(n-1)\beta s'} + \frac{n\,.\,(n-1)}{1.2} e^{-(n-2)\beta s'} - \dots\dots\dots\dots$$

откуда

$$e^{-\beta s'}\left(e^{-\beta s'} - 1\right)^n = e^{-(n+1)\beta s'} - n e^{-n\beta s'} + \frac{n(n-1)}{1.2} e^{-(n-1)\beta s'} - \dots\dots\dots$$

слѣдовательно

$$\frac{d\left[e^{-\beta s'}\left(e^{-\beta s'}-1\right)^n\right]}{ds'}=$$

$$-(n+1)\beta e^{-(n+1)\beta s'}+n.n.\beta e^{-n\beta s'}-\frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)\beta e^{-(n-1)\beta s'}+\ldots$$

$$\frac{d^2\left[e^{-\beta s'}\left(e^{-\beta s'}-1\right)^n\right]}{ds'^2}=$$

$$+(n+1)^2.\beta^2 e^{-(n+1)\beta s'}-n.n^2.\beta^2 e^{-n\beta s'}+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)^2.\beta^2 e^{-(n-1)\beta s'}-\ldots$$

. . . .

$$\frac{d^n\left[e^{-\beta s'}\left(e^{-\beta s'}-1\right)^n\right]}{ds'^n}=$$

$$\pm(n+1)^n.\beta^n e^{-(n+1)\beta s'}\mp n.n^n.\beta^n e^{-n\beta s'}\pm\frac{n(n-1)}{1.2}(n-1)^n.\beta^n e^{-(n-1)\beta s'}\mp\ldots$$

гдѣ верхніе знаки соотвѣтствуютъ четному n, а нижніе нечетному. Давая въ этомъ послѣднемъ выраженіи числу n значенія 1, 2, 3 и т. д. составимъ послѣдовательно производныя входящія въ выраженіе (55) и такимъ образомъ приведемъ его къ виду

$$-d\left(e^{-\beta s'}\right)=\beta e^{-\beta s'}+\frac{\alpha\beta^2}{\sin^2 z}\left[2e^{-2\beta s'}-e^{-\beta s'}\right]ds'$$
$$+\frac{\alpha^2\beta^3}{1.2\sin^4 z}\left[3^2 e^{-3\beta s'}-2.2^2 e^{-2\beta s'}+e^{-\beta s'}\right]ds'$$
$$+\frac{\alpha^3\beta^4}{1.2.3\sin^6 z}\left[4^3 e^{-4\beta s'}-3.3^3 e^{-3\beta s'}+\frac{3.2}{1.2}2^3 e^{-2\beta s'}-e^{-\beta s'}\right]ds'$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

вводя это вмѣсто $\beta e^{-\beta s}ds$ въ числителя выраженія (54), получаемъ

(56)

$$d\zeta'=\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\beta.\sin z.ds'}{\sqrt{\cos^2 z+2s'\sin^2 z}}\left\{\begin{aligned}&e^{-\beta s'}\\&+\frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}\left[2e^{-2\beta s'}-e^{-\beta s'}\right]\\&+\frac{\alpha^2\beta^2}{1.2.\sin^4 z}\left[3^2 e^{-3\beta s'}-2.2^2 e^{-2\beta s'}+e^{-\beta s}\right]\\&+\frac{\alpha^3\beta^3}{1.2.3\sin^6 z}\left[4^3 e^{-4\beta s'}-3.3^3 e^{-3\beta s'}\right.\\&\qquad\left.+\frac{3.2}{1.2}2^3 e^{-2\beta s'}-e^{-\beta s'}\right]\\&+\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}$$

Разсматривая это выраженіе, мы видимъ, что каждый членъ имѣетъ множителя формы

$$\frac{\beta \sin z \,.\, e^{-n\beta s'} ds'}{\sqrt{\cos^2 z + 2\,s' \,.\, \sin^2 z}}$$

и такъ какъ перемѣнное s' содержится только въ этомъ производителѣ, то интегрированіе всего выраженія (56) будетъ исключительно зависѣть отъ интегрированія этого множителя. Для выполненія этого интегрированія введемъ новое перемѣнное t подъ условіемъ

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} + s' = \frac{t^2}{\beta n}, \tag{57}$$

откуда

$$s' = \frac{t^2}{\beta n} - \frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 z; \qquad ds' = \frac{2\,t \,.\, dt}{\beta \,.\, n}$$

преобразовывая посредствомъ этихъ выраженій упомянутаго производителя, получимъ

$$\sqrt{\frac{2\beta}{n}}\, e^{\frac{n\beta}{2} \operatorname{cotg}^2 z - t^2}\, dt$$

интегрируя это, имѣемъ

$$\sqrt{\frac{2\beta}{n}} \cdot e^{\frac{n\beta}{2} \cdot \operatorname{cotg}^2 z} \int e^{-t^2}\, dt\,.$$

полагая здѣсь

$$e^{\frac{n\beta}{2} \operatorname{cotg}^2 z} \int e^{-t^2}\, dt = \psi(n) \tag{58}$$

приводимъ разсматриваемаго производителя къ виду

$$\psi(n) \sqrt{\frac{2\beta}{n}}$$

И такъ

$$\int \frac{\beta \,.\, \sin z \,.\, e^{-n\beta s'} ds'}{\sqrt{\cos^2 z + 2\,s' .\, \sin^2 z}} = \psi(n) \sqrt{\frac{2\beta}{n}}$$

Давая здѣсь величинѣ n значенія 1, 2, 3 и т. д. будемъ получать интегралы отдѣльныхъ членовъ выраженія (56), а потому, назвавъ величину рефракціи чрезъ δz, послѣ интегрированія выраженія (56) будемъ имѣть для вычисленія δz рядъ вида

$$\delta z = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{2\beta}\left\{\psi(1) + \frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}\left[2^{\frac{1}{2}}\psi(2) - \psi(1)\right]\right.$$

$$+ \frac{\alpha^2\beta^2}{1.2\sin^4 z}\left[3^{\frac{3}{2}}\psi(3) - 2.2^{\frac{3}{2}}.\psi(2) + \psi(1)\right]$$

$$+ \frac{\alpha^3\beta^3}{1.2.3\sin^6 z}\left[4^{\frac{5}{2}}\psi(4) - 3.3^{\frac{5}{2}}.\psi(3) + \frac{3.2}{1.2}.2^{\frac{5}{2}}\psi(2) - \psi(1)\right]$$

$$\left. + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

этотъ интегралъ выраженія (56) можно еще представить въ формѣ

$$\delta z = \frac{\alpha\sqrt{2\beta}}{1-\alpha}\left\{\psi(1)\left[1 - \frac{\alpha\beta}{\sin^2 z} + \frac{\alpha^2\beta^2}{1.2.\sin^4 z} - \frac{\alpha^3\beta^3}{1.2.3\sin^6 z} + \ldots\ldots\right]\right.$$

$$+ 2^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}\psi(2)\left[1 - \frac{2.\alpha\beta}{\sin^2 z} + \frac{2^2.\alpha^2\beta^2}{1.2.\sin^4 z} - \frac{2^3.\alpha^3\beta^3}{1.2.3\sin^6 z} + \ldots\ldots\right]$$

$$+ 3^{\frac{3}{2}}\frac{\alpha^2\beta^2}{1.2.\sin^4 z}\psi(3)\left[1 - \frac{3.\alpha\beta}{\sin^2 z} + \frac{3^2\alpha^2\beta^2}{1.2.\sin^4 z} - \frac{3^3.\alpha^3\beta^3}{1.2.3\sin^6 z} + \ldots\ldots\right]$$

$$\left. + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

множитель при $\psi(1)$ есть очевидно разложеніе функціи $e^{-\frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}}$ по степенямъ показателя; множитель при $2^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}\cdot\psi(2)$ есть подобное же разложеніе функціи $e^{-\frac{2\alpha\beta}{\sin^2 z}}$ и т. д., слѣдовательно все предыдущее выраженіе можетъ быть представлено въ видѣ

(59)

$$\delta z = \frac{\alpha\sqrt{2\beta}}{1-\alpha}\left\{ e^{-\frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}}\psi(1) + 2^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}e^{-\frac{2\alpha\beta}{\sin^2 z}}\psi(2) + 3^{\frac{3}{2}}\frac{\alpha^2\beta^2}{1.2.\sin^4 z}e^{-\frac{3\alpha\beta}{\sin^2 z}}\psi(3) + \ldots\ldots \right\}$$

Такой видъ имѣетъ интегралъ дифференціальнаго выраженія (54). Чтобы пользоваться имъ для вычисленія рефракціи, необходимо научиться вычислять $\psi(n)$ для различныхъ цѣлыхъ и положительныхъ значеній n.

9. Дифференціальное выраженіе рефракціи въ первоначальномъ видѣ зависило отъ перемѣннаго ρ; интегрированіе по этому перемѣнному должно было выполняться въ предѣлахъ отъ ρ равнаго плотности атмосферы у поверхности земли до $\rho = 0$, т. е. плотности на предѣлахъ атмосферы. Послѣ введенія гипотезы Бесселя предстояло

интегрировать преобразованное дифференціальное выраженіе рефракціи по перемѣнному s, связь котораго съ ρ представлялась уравненіемъ вида (46), но это уравненіе показываетъ, что для $\rho = \rho_0$, т. е. для поверхности земли $s = 0$, а для $\rho = 0$, $s = \infty$; слѣдовательно предѣлами интегрированія по s будутъ 0 и ∞. Въ выраженіи (56) перемѣнное s замѣнено перемѣннымъ s', зависимость между этими величинами представляется уравненіемъ (52), которое показываетъ, что для $s = 0$, $s' = 0$, а для $s = \infty$, $s' = \infty$, слѣдовательно предѣлами интегрированія по s' остаются опять 0 и ∞. Наконецъ перемѣнное s' было замѣнено перемѣннымъ t. Зависимость между s' и t представляется уравненіемъ (57), изъ котораго видимъ, что для $s' = 0$

$$t = \sqrt{\frac{n\beta}{2}} \cot g\, z$$

а при $s' = \infty$ и $t = \infty$. Слѣдовательно предѣлами интегрированія по t служатъ величины

$$\sqrt{\frac{n\beta}{2}} \cot g\, z \quad \text{и} \quad \infty$$

Въ этихъ предѣлахъ и долженъ быть взятъ интегралъ, входящій въ выраженіе $\psi(n)$, или что все равно, интегралъ (59). И такъ по выраженію (58)

$$\psi(n) = e^{\frac{n\beta}{2} \cdot \cot g^2 z} \int_{\sqrt{\frac{n\beta}{2}} \cot g\, z}^{\infty} e^{-t^2} . dt$$

Если положимъ здѣсь для краткости

$$\sqrt{\frac{n\beta}{2}} \cdot \cot g\, z = T$$

то выраженіе, по которому должна быть вычисляема функція $\psi(n)$, будетъ имѣть видъ

$$\psi(n) = e^{T^2} \int_T^{\infty} e^{-t^2} . dt \qquad (60)$$

Покажемъ теперь нѣсколько способовъ вычисленія этой функціи. Если T есть правильная дробь, то опредѣленіе $\psi(n)$ не представляетъ никакого труда. Въ самомъ дѣлѣ

$$\int_T^{\infty} e^{-t^2} . dt = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \int_0^{T} e^{-t^2} dt$$

но весьма извѣстно, что

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Для опредѣленія втораго интеграла, разлагая показательную функцію въ рядъ, имѣемъ

$$\int_0^T e^{-t^2} dt = T - \frac{T^3}{3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{T^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{T^7}{7} + \cdots\cdots$$

Поэтому выраженіе (60) обращается въ

$$(61)\quad \psi(n) = e^{T^2}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - T + \frac{T^3}{3} - \frac{1}{1.2}\cdot\frac{T^5}{5} + \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{T^7}{7} - \cdots\cdots\cdots\right\}$$

Если T есть величина большая единицы, то вычисленіе $\psi(n)$ посредствомъ этого ряда представляетъ неудобство. Въ этомъ случаѣ для вычисленія функціи $\psi(n)$ можно руководствоваться слѣдующими соображеніями.

Понятно, что

$$\int e^{-t^2}.dt = \int \frac{d\left(-\frac{e^{-t^2}}{2}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{t}$$

выполняя во второй части интегрированіе по частямъ, имѣемъ

$$\int e^{-t^2}.dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t} - \frac{1}{2}\int e^{-t^2}\frac{dt}{t^2}.$$

Точно такимъ же образомъ

$$\frac{1}{2}\int e^{-t^2}\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(-\frac{e^{-t^2}}{2}\right)}{dt}\,\frac{dt}{t^3}$$

а потому

$$-\frac{1}{2}\int e^{-t^2}\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-t^2}}{t^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\int e^{-t^2}\frac{dt}{t^4}$$

подобно предыдущему имѣемъ

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\int e^{-t^2}\frac{dt}{t^4} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{e^{-t^2}}{t^5} - \frac{1.3.5}{2.2.2}\int e^{-t^2}\frac{dt}{t^5}$$

слѣдовательно вообще

$$\pm\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.2.2\ldots\ldots.2}\int e^{-t^2}\frac{dt}{t^{2n}} =$$

$$\mp\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2^{n+1}}\,\frac{e^{-t^2}}{t^{2n+1}} \mp \frac{1.3.5\ldots.(2n+1)}{2^{n+1}}\int\frac{e^{-t^2}.dt}{t^{2n+2}}.$$

Внося каждое послѣдующее выраженіе въ предыдущее, получимъ

$$\int e^{-t^2}dt = \left\{ -\frac{1}{2}\frac{e^{-t^2}}{t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{e^{-t^2}}{t^3} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{e^{-t^2}}{t^5} + \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{e^{-t^2}}{t^7} - \dots \right.$$

$$\left. \pm \frac{(2n-1)\dots\dots 5.3.1}{2^{n+1}}\cdot\frac{e^{-t^2}}{t^{2n+1}} \right\} \mp \frac{1.3.5\dots\dots(2n+1)}{2^{n+1}} \int e^{-t^2}\frac{dt}{t^{2n+2}}$$

Взявъ этотъ интегралъ между предѣлами T и ∞, представимъ его въ видѣ

$$\int_T^\infty e^{-t^2}.dt = e^{-T^2}\left\{ \frac{1}{2T} - \frac{1}{2.2\,T^3} + \frac{1.3}{2.2.2.\,T^5} - \frac{1.3.5}{2.2.2.2.\,T^7} + \dots \right. \qquad (62)$$

$$\left. \pm \frac{1.3.5.7\dots\dots(2n-1)}{2^{n+1}\,T^{2n+1}} \right\} \mp \frac{1.3.5\dots\dots(2n+1)}{2^{n+1}} \int_T^\infty \frac{e^{-t^2}.dt}{t^{2n+2}}.$$

Легко показать, что послѣдній интегралъ менѣе предшествующаго ему члена. Положимъ для этого

$$\frac{1.3.5\dots\dots(2n+1)}{2^{n+1}} \int_T^\infty \frac{e^{-t^2}.dt}{t^{2n+2}} = A.$$

Очевидно что это выраженіе будетъ менѣе того, которое получимъ изъ него, если вмѣсто перемѣннаго производителя e^{-t^2} поставимъ въ подъинтегральную функцію наибольшую величину, которую можетъ имѣть этотъ множитель между предѣлами T и ∞; т. е. величину e^{-T^2}. И такъ

$$A < \frac{1.3.5\dots\dots(2n+1)}{2^{n+1}} e^{-T^2} \int_T^\infty \frac{dt}{t^{2n+2}}$$

но

$$\int_T^\infty \frac{dt}{t^{2n+2}} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{T^{2n+1}}$$

слѣдовательно

$$A < \frac{1.3.5.7\dots\dots(2n-1)}{2^{n+1}\,T^{2n+1}} e^{-T^2}.$$

Обращаясь къ выраженію (62), видимъ, что этимъ неравенствомъ подтверждается

высказанное нами положеніе; вмѣстѣ съ тѣмъ мы заключаемъ, что рядъ (62) сходящійся и мы можемъ пользоваться имъ для вычисленія $\psi(n)$, которая представляется такимъ образомъ въ видѣ

(63) $$\psi(n) = \frac{1}{2T}\left\{1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{(2T^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2T^2)^3} + \ldots\ldots\right\}$$

Замѣтимъ что при $T = 0$, это выраженіе вовсѣ не представляетъ функціи $\psi(n)$. Но значеніе $\psi(n)$ при $T = 0$ опредѣляется или посредствомъ выраженія (61) или прямо можетъ быть найдено по выраженію (60), которое для $T = 0$ обращается въ

$$\psi(n) = \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Наконецъ величина $\psi(n)$ можетъ быть опредѣлена посредствомъ непрерывной дроби по способу Лапласа. Сущность этого пріема заключается въ слѣдующемъ.

Положимъ

$$e^{-t^2}\int e^{-t^2}.dt = u$$

тогда

$$\frac{du}{dt} = 2t\,e^{t^2}\int e^{-t^2}\cdot dt + 1$$

или

(64) $$\frac{du}{dt} = 2t.u + 1$$

откуда

(65) $$\frac{d^2u}{dt^2} = 2t\frac{du}{dt} + 2u$$

$$\frac{d^3u}{dt^3} = 2t\frac{d^2u}{dt^2} + 2.2\frac{du}{dt}$$

и вообще

$$\frac{d^{n+1}u}{dt^{n+1}} = 2t\frac{d^nu}{dt^n} + 2n\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}$$

раздѣливъ обѣ части уравненія на произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n и полагая для краткости

$$\frac{1}{1.2.3\ldots..n}\frac{d^nu}{dt^n} = u_n; \qquad \frac{1}{1.2.3\ldots.(n+1)}\cdot\frac{d^{n+1}u}{dt^{n+1}} = u_{n+1} \quad \text{и т. д.}$$

представимъ предыдущее въ формѣ,

(66) $$(n+1)\,u_{n+1} = 2t\,u_n + u_{n-1}$$

откуда

$$-\frac{u_{n-1}}{u_n} = t - \frac{1}{2}(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

или

$$-\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{\frac{1}{t}}{1-\frac{n+1}{2t}\cdot\frac{u_{n+1}}{u_n}}$$

Такъ какъ это справедливо для всякаго n, то подставляя $(n+1)$ вмѣсто n, получимъ

$$-\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{t}}{1-\frac{n+2}{2t}\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}}$$

сдѣлавъ туже подстановку въ этомъ выраженіи, найдемъ

$$-\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}=\frac{\frac{1}{t}}{1-\frac{(n+3)}{2t}\cdot\frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}}$$

и т. д. Внося каждое послѣдующее выраженіе въ предыдущее, получимъ

$$-\frac{u_n}{u_{n-1}}=\cfrac{\frac{1}{t}}{1+\cfrac{\frac{n+1}{2t^2}}{1+\cfrac{\frac{n+2}{2t^2}}{1+\cfrac{\frac{n+3}{2t^2}}{1+\frac{n+4}{2t^2}}}}} \qquad (67)$$

Полагая въ общемъ выраженіи (66) $n=1$, имѣемъ

$$u_2=tu_1+u_0$$

а сравнивая это съ уравненіемъ (65) и помня при этомъ, что по нашему означенію

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2u}{dt^2}=u_2$$

видимъ, что $u_0=u$. Тоже общее уравненіе (66) для $n=o$ даетъ

$$u_1=2t\,u_0+2u_{-1}$$

Сравнивая это съ выраженіемъ (64) видимъ, что

$$u_{-1}=\frac{1}{2}$$

Зная это, положимъ $n=0$ въ выраженіи (67) и тогда получимъ

$$u = e^{t^2}\int e^{-t^2}\,dt = \cfrac{-\frac{1}{2t}}{1+\cfrac{\frac{1}{2t^2}}{1+\cfrac{\frac{2}{2t^2}}{1+\cfrac{\frac{3}{2t^2}}{1+\cfrac{\frac{4}{2t^2}}{\ddots}}}}}$$

Взявъ этотъ интегралъ между предѣлами T и ∞, получимъ искомую функцію въ видѣ

$$\psi(n) = e^{T^2}\int_T^\infty e^{-t^2}\cdot dt = \frac{1}{2T}\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{1}{2T^2}}{1+\cfrac{\frac{2}{2T^2}}{1+\cfrac{\frac{3}{2T^2}}{1+\cfrac{\frac{4}{2T^2}}{\ddots}}}}} \tag{68}$$

Такимъ образомъ для вычисленія $\psi(n)$ мы имѣемъ теперь три выраженія: (61), (63) и (68).

10. Зная величину $\psi(n)$ для какаго угодно цѣлаго и положительнаго значенія n, мы можемъ изъ выраженія (59) для даннаго состоянія атмосферы, т. е. для данныхъ α и β вычислить величину рефракціи. Мы видѣли, что

$$\alpha = \frac{c\rho_0}{2(1+c\rho_0)} \qquad \text{и} \qquad \frac{h-l}{hl}\,a = \beta.$$

Если бы состояніе атмосферы не измѣнялось, то и эти величины α и β сохраняли бы извѣстное, опредѣленное значеніе, но такъ какъ плотность воздуха измѣняется съ измѣненіемъ давленія и температуры, то α, будучи функціею плотности, также будетъ измѣняться для различныхъ показаній барометра и термометра. Что касается до величины β, то, какъ видимъ, она зависитъ отъ l, опредѣляющагося по выраженіе

$$p_0 = g_0\,\rho_0\,l$$

изъ него мы видимъ, что l есть высота столба воздуха имѣющаго плотность ρ_0 и производящаго на поверхности земли на единицу площади давленіе p_0. Другими словами, l есть высота однородной атмосферы имѣющей плотность ρ_0 и производящей давленіе p_0; но ясно, что съ измѣненіемъ температуры должно измѣняться и l, а съ нимъ измѣнится и β. И такъ при вычисленіи рефракціи по выраженію (59) для извѣстнаго состоянія атмосферы, необходимо вводить въ вычисленіе величины α и β, соотвѣтствующія этому опредѣленному состоянію.

Такъ какъ для одного и того же зенитнаго разстоянія α и β различны при различныхъ состояніяхъ атмосферы, то вычисляя рефракцію по выраженію (59), мы всякій разъ должны вносить въ это выраженіе величины α и β, соотвѣтствующія разсматриваемому случаю. Для упрощенія дѣла составляются обыкновенно таблицы, изъ которыхъ по аргументу зенитнаго разстоянія получается величина рефракціи для нормальнаго состоянія атмосферы и затѣмъ по этой величинѣ, при помощи извѣстнаго пріема, вычисляется величина рефракціи, соотвѣтствующая какому угодно состоянію атмосферы. Величина рефракціи вычисленная изъ уравненія (59) для нормальнаго состоянія атмосферы называется *средней рефракціей;* величина же δz вычисленная по тому же выраженію (59) для значеній α и β, соотвѣтствующихъ дѣйствительному состоянію атмосферы во время наблюденія, называется *рефракціей истинной.* Таблицу средней рефракціи, расположенную по аргументу зенитнаго разстоянія, вычислить легко, для перехода же отъ средней рефракціи къ истинной необходимо знать какъ измѣняется величина рефракціи съ измѣненіемъ температуры и давленія въ атмосферѣ.

Истинная рефракція есть функція температуры и давленія воздуха или, другими словами, есть функція термометрическаго показанія τ и барометрическаго показанія b во время наблюденія. И такъ, назвавъ величину истинной рефракціи чрезъ r, можемъ положить

$$r = f(\tau, b)$$

Если величину r, вычисленную для опредѣленныхъ показаній термометра τ_0 и барометра b_0, принимаемыхъ условно за нормальныя, назовемъ чрезъ δz, разумѣя такимъ образомъ подъ δz среднюю рефракцію, то подобно предыдущему можемъ положить

$$\delta z = f(\tau_0, b_0)$$

и чрезъ разложеніе по строкѣ Тейлора, ограничиваясь первыми степенями приращеній перемѣнныхъ, получимъ

$$r = \delta z + \frac{d\delta z}{d\tau}(\tau - \tau_0) + \frac{d\delta z}{db}(b - b_0) \qquad (69)$$

Такимъ образомъ вычисленіе истинной рефракціи r по средней δz приводится къ вычисленію производныхъ $\frac{d\delta z}{d\tau}$ и $\frac{d\delta z}{db}$. Составляя таблицы рефракціи Ф. В. Бессель принялъ за нормальное состояніе атмосферы то, которому соотвѣтствуютъ термометрическое показаніе $\tau_0 = 50^\circ F$ и барометрическое $b_0 = 29{,}6$ англійскихъ дюймовъ.

Найдемъ выраженія, посредствомъ которыхъ могутъ быть вычислены упомянутыя выше производныя. Если умножимъ и раздѣлимъ вторую часть выраженія (59) на $\beta \, . \sin^2 z$, то приведемъ это выраженіе къ виду

$$\delta z = \frac{1}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{\beta}}\sin^2 z\left\{\frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}e^{-\frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}}\psi(1) + 2^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha^2\beta^2}{\sin^4 z}e^{-\frac{2\alpha\beta}{\sin^2 z}}\psi(2)\right.$$

$$\left. + \frac{3^{\frac{3}{2}}}{1.2}\frac{\alpha^3\beta^3}{\sin^6 z}e^{-\frac{3\alpha\beta}{\sin^2 z}}\psi(3) + \cdots\cdots\right\}$$

Это можно представить еще въ видѣ

$$\delta z = \frac{1}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{\beta}}\sin^2 z\left\{\frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}e^{-\frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}}\psi(1) + \frac{2^{\frac{3}{2}}}{1.2}\frac{\alpha^2\beta^2}{\sin^4 z}e^{-\frac{2\alpha\beta}{\sin^2 z}}\psi(2)\right.$$

$$\left. + \frac{3^{\frac{5}{2}}}{1.2.3}\frac{\alpha^3\beta^3}{\sin^6 z}e^{-\frac{3\alpha\beta}{\sin^2 z}}\psi(3) + \cdots\cdots\right\}$$

Пусть

$$\frac{\alpha\beta}{\sin^2 z} = x,\quad q_1 = \psi(1),\quad q_2 = 2^{\frac{3}{2}}\psi(2);\quad q_3 = 3^{\frac{5}{2}}\psi(3);\ \cdots\cdots$$

и вообще

(70) $$q_n = n^{\frac{2n-1}{2}}\psi(n)$$

тогда предыдущее приметъ видъ

$$\delta z = \frac{1}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{\beta}}\sin^2 z\left\{q_1 x e^{-x} + q_2\frac{x^2}{1.2}e^{-2x} + q_3\frac{x^3}{1.2.3}e^{-3x} + \cdots\cdots\right\}$$

пусть

(71) $$Q = q_1 x e^{-x} + q_2\frac{x_2}{1.2}e^{-2x} + q_3\frac{x^3}{1.2.3}e^{-3x} + \cdots\cdots$$

тогда

(72) $$(1-\alpha)\,\delta z = \sqrt{\frac{2}{\beta}}\cdot\sin^2 z.\ Q.$$

Замѣтимъ, что по малости α мы можемъ разсматривать множителя $(1-\alpha)$ какъ постоянную величину и тогда примемъ, что перемѣнныя b и τ входятъ только въ величины x и β и притомъ такъ, что β зависитъ отъ одного τ, а x содержитъ какъ τ, такъ равно и b; что касается до функціи Q, то она зависитъ отъ α и β, а потому содержитъ обѣ перемѣнныя величины. Принимая все это въ соображеніе при дифференцированіи предыдущаго выраженія, находимъ:

$$(1-\alpha)\frac{d\delta z}{d\tau} = \sqrt{\frac{2}{\beta}}\cdot\sin^2 z\frac{dQ}{d\tau} - \frac{Q\cdot\sin^2 z}{\beta\sqrt{2\beta}}\frac{d\beta}{d\tau} = \sqrt{\frac{2}{\beta}}\sin^2 z\frac{dQ}{d\tau} - (1-\alpha)\frac{\delta z}{2\beta}\frac{d\beta}{d\tau}\cdot$$

(73)

$$(1-\alpha)\frac{d\delta z}{db} = \sqrt{\frac{2}{\beta}}\cdot\sin^2 z\frac{dQ}{db}\cdot$$

Такимъ образомъ опредѣленіе производныхъ $\frac{d\delta z}{d\tau}$ и $\frac{d\delta z}{db}$ приводится къ опредѣленію производныхъ

$$\frac{dQ}{d\tau}, \quad \frac{dQ}{db}, \quad \frac{d\beta}{d\tau}.$$

Функція Q содержитъ перемѣнныя x, β, q_1, q_2 и т. д., но при диффсренцированіи относительно b измѣняется одно только x, ибо q_1, q_2 и т. д. зависятъ отъ одного β и несодержатъ b. И такъ

$$\frac{dQ}{db} = \frac{dQ}{dx} \cdot \frac{dx}{db} \tag{74}$$

Чтобы опредѣлить производную $\frac{dQ}{d\tau}$, замѣтимъ, что Q содержитъ τ въ зависимости отъ α и β, слѣдовательно

$$\frac{dQ}{d\tau} = \frac{dQ}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{d\tau} + \frac{dQ}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\tau} \tag{75}$$

но α входитъ въ Q только въ зависимости отъ x, что же касается до β, то оно входитъ въ Q двояко: въ зависимости отъ x и въ зависимости отъ q_n; если означимъ производную отъ Q по β входящему въ q_n чрезъ $\left(\frac{dQ}{d\beta}\right)$, то

$$\frac{dQ}{d\alpha} = \frac{dQ}{dx} \cdot \frac{dx}{d\alpha}; \qquad \frac{dQ}{d\beta} = \frac{dQ}{dx} \cdot \frac{dx}{d\beta} + \left(\frac{dQ}{d\beta}\right) \tag{76}$$

и такъ главнымъ образомъ опредѣленіе производной $\frac{dQ}{d\tau}$ приводится къ опредѣленію производныхъ $\frac{dQ}{dx}$ и $\left(\frac{dQ}{d\beta}\right)$. Этимъ теперь и займемся

$$\frac{dQ}{dx} = \left[q_1 e^{-x} + q_2 \frac{2x}{1.2} e^{-2x} + q_3 \frac{3x^2}{1.2.3} e^{-3x} + \cdots\cdots \right]$$
$$- \left[q_1 x e^{-x} + q_2 \frac{2x^2}{1.2} e^{-2x} + q_3 \frac{3x^3}{1.2.3} e^{-3x} + \cdots\cdots \right]$$

или

$$\frac{dQ}{dx} = (1-x) \left[q_1 e^{-x} + q_2 \frac{2x}{1.2} e^{-2x} + q_3 \frac{3x}{1.2.3} e^{-3x} + \cdots\cdots \right]$$

или наконецъ

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{(1-x)}{x} \left[x q_1 . e^{-x} + \frac{x^2}{1.2} 2 q_2 . e^{-2x} + \frac{x^3}{1.2.3} 3 q_3 . e^{-3x} + \cdots \right]$$

полагая здѣсь

$$Q' = q_1 x e^{-x} + 2 q_2 \frac{x^2}{1.2} e^{-2x} + 3 q_3 \frac{x^3}{1.2.3} e^{-3x} + \cdots\cdots \tag{77}$$

имѣемъ

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{(1-x)}{x} Q' \tag{78}$$

Что касается до производной $\left(\frac{dQ}{d\beta}\right)$, то она

$$\left(\frac{dQ}{d\beta}\right) = x e^{-x} \cdot \frac{dq_1}{d\beta} + \frac{x^2}{1.2} e^{-2x} \cdot \frac{dq_2}{d\beta} + \frac{x^3}{1.2.3} e^{-3x} \cdot \frac{dq_3}{d\beta} + \dots \tag{79}$$

Слѣдовательно опредѣленіе производной $\left(\frac{dQ}{d\beta}\right)$ приводится къ развитіе производной $\frac{dq_n}{d\beta}$; но понятно что

$$\frac{dq_n}{d\beta} = n^{\frac{2n-1}{2}} \cdot \frac{d\psi(n)}{dT} \cdot \frac{dT}{d\beta} \tag{80}$$

а по выраженію (63) имѣемъ

$$\psi(n) = \frac{1}{2T} - \frac{1}{2^2 T^3} + \frac{1.3}{2^3 . T^5} - \frac{1.3.5}{2^4 . T^7} + \dots\dots$$

откуда

$$\frac{d\psi(n)}{dT} = -\frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{(2T^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2T^2)^3} + \frac{1.3.5.7}{(2T^2)^4} - \dots\dots$$

сравнивая это съ выраженіемъ (63), прямо находимъ

$$\frac{d\psi(n)}{dT} = 2T . \psi(n) - 1.$$

умноживъ обѣ части этого уравненія на $n^{\frac{2n-1}{2}}$ и обращая вниманіе на положеніе (70), имѣемъ

$$n^{\frac{2n-1}{2}} \frac{d\psi(n)}{dT} = 2Tq_n - n^{\frac{2n-1}{2}}$$

такъ какъ мы приняли

$$\sqrt{\frac{n\beta}{2}} \operatorname{cotg} z = T$$

то

$$\frac{dT}{d\beta} = \frac{T}{2\beta}$$

а потому выраженіе (80) принимаетъ видъ

$$\frac{dq_n}{d\beta} = \frac{T^2}{\beta} \cdot q_n - \frac{T}{2\beta} n^{\frac{2n-1}{2}}$$

или

$$\frac{dq_n}{d\beta}=\frac{\cot g^2 z}{2}\cdot nq_n-\frac{\cot g\, z}{2\sqrt{2\beta}}n^n.$$

давая здѣсь n послѣдовательно значенія 1, 2, 3 и т. д. и внося соотвѣтствующія этимъ значеніямъ величины производной въ выраженіе (79), получимъ

$$\left(\frac{dQ}{d\beta}\right)=\frac{\cot g^2 z}{2}\left[q_1 x e^{-x}+2q_2\frac{x^2}{1.2}e^{-2x}+3q_3\frac{x^3}{1.2.3}e^{-3x}+\ldots\ldots\right]$$

$$-\frac{\cot g\, z}{2\sqrt{2\beta}}\left[xe^{-x}+\frac{x^2}{1.2}e^{-2x}.2^2+\frac{x^3}{1.2.3}e^{-3x}.3^3+\ldots\ldots\right]$$

или по означенію (77)

$$\left(\frac{dQ}{d\beta}\right)=\frac{Q'}{2}\cdot\cot g^2 z-\frac{\cot g\, z}{2\sqrt{2\beta}}\left[xe^{-x}+\frac{x^2}{1.2}e^{-2x}.2^2+\frac{x^3}{1.2.3}e^{-3x}.3^3+\ldots\right] \quad (81)$$

рядъ заключающійся въ послѣднемъ членѣ имѣетъ видъ

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n^n x^n e^{-nx}}{1.2.3\ldots n}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n^n x^n}{1.2.3\ldots n}\left[1-nx+\frac{(nx)^2}{1.2}-\frac{(nx)^3}{1.2.3}+\ldots\right]$$

$$=x\left(1-x+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots\ldots\right)$$

$$+\frac{2^2x^2}{1.2}\left(1-2x+\frac{(2x)^2}{1.2}-\frac{(2x)^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\right)$$

$$+\frac{3^3.x^3}{1.2.3}\left(1-3x+\frac{(3x)^2}{1.2}-\frac{(3x)^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\right)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

не легко видѣть, что по сокращеніи всѣ эти ряды приводятся къ одному вида

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n^n.x^n.e^{-nx}}{1.2.3\ldots n}=x+x^2+x^3+x^4+\ldots=\frac{x}{1-x}$$

а потому выраженіе (81) обращается въ

$$\left(\frac{dQ}{d\beta}\right)=\frac{Q'}{2}\cdot\cot g^2 z-\frac{\cot g\, z}{2.\sqrt{2\beta}}\cdot\frac{x}{1-x} \quad (82)$$

Теперь для рѣшенія нашего вопроса остается найти производныя

$$\frac{dx}{db},\quad\frac{dx}{d\alpha},\quad\frac{dx}{d\beta},\quad\frac{d\alpha}{d\tau},\quad\frac{d\beta}{d\tau}.$$

Мы приняли

$$x=\frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}$$

а потому

$$\frac{dx}{db} = \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{db}$$

Но

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{\beta}{\sin^2 z} = \frac{x}{\alpha}$$

и такъ

$$\frac{dx}{db} = \frac{x}{\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{db}$$

Извѣстно, что объемы при одинаковыхъ давленіяхъ, или въ нашемъ случаѣ при одинаковыхъ барометрическихъ высотахъ, обратно пропорціональны плотностямъ; а потому если назовемъ, какъ прежде, чрезъ ρ плотность воздуха при температурѣ τ и высотѣ барометра b, а чрезъ ρ_1 плотность при температурѣ τ_0 и той же высотѣ барометра и замѣтимъ при этомъ, что объемъ v_0 соотвѣтствующій температурѣ τ_0 обращается при температурѣ τ въ $v_0[1 + m(\tau - \tau_0)]$, гдѣ чрезъ m означаемъ коеффиціентъ расширенія воздуха, то

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{v_0}{v_0[1 + m(\tau - \tau_0)]}$$

Но плотности пропорціональны давленіямъ или барометрическимъ высотамъ, слѣдовательно если назовемъ чрезъ ρ_0 плотность соотвѣтствующую температурѣ τ_0 и высотѣ барометра b_0, то

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{b}{b_0}$$

исключая посредствомъ этого выраженія ρ_1 изъ предыдущаго, имѣемъ

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\frac{b}{b_0}}{1 + m(\tau - \tau_0)}$$

величину α можно считать пропорціональною плотности, а потому если примемъ, что плотности ρ_0 соотвѣтствуетъ величина α_0 и плотности ρ—величина α, то

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\alpha}{\alpha_0}$$

сравнивая это съ предыдущимъ, имѣемъ

(83) $$\alpha = \frac{\alpha_0 \frac{b}{b_0}}{1 + m(\tau - \tau_0)}$$

откуда

$$\frac{d\alpha}{db} = \frac{\frac{\alpha_0}{b_0}}{1 + m(\tau - \tau_0)}$$

или сравнивая это съ предыдущимъ выраженіемъ, заключаемъ, что

$$\frac{d\alpha}{db} = \frac{\alpha}{b}$$

а потому

$$\frac{dx}{db}=\frac{x}{b} \tag{84}$$

Опредѣлимъ теперь производную $\frac{d\beta}{d\tau}$. Мы видѣли, что

$$\beta=\frac{h-l}{hl}\cdot a \tag{85}$$

гдѣ подъ l разумѣемъ, какъ сказали, высоту однородной атмосферы, имѣющей плотность ρ_0 и производящей давленіе p_0, но съ измѣненіемъ температуры должно измѣняться и l, такъ что если назовемъ чрезъ l_0 высоту однородной атмосферы при температурѣ τ_0, то высота l однородной атмосферы при температурѣ τ, будетъ

$$l=l_0\left[1+m(\tau-\tau_0)\right] \tag{86}$$

вообще

$$\frac{d\beta}{d\tau}=\frac{d\beta}{dl}\cdot\frac{dl}{d\tau}$$

но изъ выраженія (85) выводимъ

$$\frac{d\beta}{dl}=-\frac{\alpha}{l^2}$$

Кромѣ того

$$\frac{dl}{d\tau}=l_0 m=\frac{l.m}{1+m(\tau-\tau_0)}=l.m\left[1-m(\tau-\tau_0)\right].$$

Но ограничиваясь первыми степенями малой величины m, имѣемъ

$$\frac{dl}{d\tau}=lm$$

слѣдовательно

$$\frac{d\beta}{d\tau}=-m\beta\cdot\frac{h}{h-l} \tag{87}$$

Остается теперь опредѣлить производную $\frac{dx}{d\tau}$ или составляющія ее производныя $\frac{dx}{d\alpha}$, $\frac{dx}{d\beta}$, и $\frac{dx}{d\tau}$, ибо

$$\frac{dx}{d\tau}=\frac{dx}{d\beta}\cdot\frac{d\beta}{d\tau}+\frac{dx}{d\alpha}\cdot\frac{dx}{dt} \tag{88}$$

Мы имѣемъ

$$\frac{dx}{d\beta}=\frac{\alpha}{\sin^2 z}=\frac{x}{\beta};\qquad \frac{dx}{d\alpha}=\frac{\beta}{\sin^2 z}=\frac{x}{\alpha}$$

и кромѣ того изъ выраженія (83) находимъ

$$\frac{d\alpha}{d\tau}=-\frac{\alpha_0 m\cdot\frac{b}{b_0}}{\left[1+m(\tau-\tau_0)\right]^2}=-\frac{\alpha m}{1+m(\tau-\tau_0)}$$

или пренебрегая степенями m высшими первой, получаемъ

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = -\alpha m$$

Имѣя все это, легко представляемъ выраженіе (88) въ видѣ

$$\frac{dx}{d\tau} = -mx\frac{2h-l}{h-l}$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ теперь все необходимое для составленія производныхъ $\frac{dQ}{db}$ и $\frac{dQ}{d\tau}$ по выраженіямъ (74) и (75). Обращая вниманіе на выраженія (78) и (82) по упомянутымъ сейчасъ двумъ выраженіямъ составимъ

$$\frac{dQ}{db} = \frac{1-x}{b}\cdot Q'$$

$$\frac{dQ}{d\tau} = -m.Q'\left\{(1-x)\frac{2h-l}{h-l} + \frac{\beta h}{2(h-l)}\operatorname{cotg}^2 z\right\} + \frac{mxh}{2(1-x)(h-l)}\sqrt{\frac{\beta}{2}}\cdot\operatorname{cotg} z$$

внося эти величины въ выраженія (73), приводимъ первое изъ нихъ къ виду

$$(1-\alpha)\frac{d\delta z}{d\tau} = -mQ'\sqrt{\frac{2}{\beta}}\cdot\sin^2 z\left\{(1-x)\frac{2h-l}{h-l} + \frac{h\beta}{2(h-l)}\cdot\operatorname{cotg}^2 z\right\}$$
$$+\frac{mx\cdot\sin^2 z}{1-x}\cdot\frac{h}{2(h-l)}\operatorname{cotg} z + \frac{(1-\alpha).mh}{2(h-l)}\delta z$$

но помня что

$$x = \frac{\alpha\beta}{\sin^2 z},$$

находимъ

$$(89)\qquad (1-\alpha)\frac{d\delta z}{d\tau} = -mQ'\sqrt{\frac{2}{\beta}}.\sin^2 z\left\{(1-x)\frac{2h-l}{h-l} + \frac{\beta h}{2(h-l)}\operatorname{cotg}^2 z\right\}$$
$$+\frac{mh}{2(h-l)}\left\{\frac{\alpha\beta.\operatorname{cotg} z}{1-x} + (1-\alpha)\delta z\right\}$$

Второе изъ выраженій (73) прямо даетъ

$$(90)\qquad (1-\alpha)\frac{d\delta z}{db} = \frac{(1-x).Q'}{b}\sqrt{\frac{2}{\beta}}\cdot\sin^2 z.$$

Имѣя выраженіе производныхъ $\frac{d\delta z}{d\tau}$ и $\frac{d\delta z}{db}$ можемъ считать рѣшеннымъ вопросъ о вычисленіи истинной рефракціи по средней при помощи выраженія (69); однако это послѣднее неудобно для логарифмическихъ вычисленій, а потому Бессель привелъ его къ формѣ

$$(91)\qquad r = \left(\frac{b}{b_0}\right)^A\cdot\frac{\delta z}{[1+m(\tau-\tau_0)]^\lambda}.$$

Чтобы убѣдиться въ возможности такаго преобразованія, стоитъ только опредѣлить величины A и λ подъ тѣмъ условіемъ, что выраженія (69) и (91) тождественны. Для опредѣленія величинъ A и λ мы ограничимся первыми степенями малыхъ величинъ m и $\frac{b}{b_0} - 1$ и примемъ

$$\left[1 + m(\tau - \tau_0)\right]^{-\lambda} = 1 - \lambda\, m(\tau - \tau_0)$$

$$\left(\frac{b}{b_0}\right)^A = \left(1 + \frac{b}{b_0} - 1\right)^A = 1 + A\left(\frac{b}{b_0} - 1\right)$$

подставляя эти величины въ выраженіе (91), имѣемъ

$$r = \delta z\left[1 - \lambda\, m(\tau - \tau_0)\right]\left[1 + A\left(\frac{b}{b_0} - 1\right)\right]$$

или ограничиваясь величинами перваго порядка относительно m и $\frac{b}{b_0} - 1$, имѣемъ

$$r = \delta z - \lambda m(\tau - \tau_0)\,\delta z + A\left(\frac{b}{b_0} - 1\right)\delta z.$$

Это выраженіе должно быть тождественно съ выраженіемъ (69), а для этого необходимо, чтобы

$$-\lambda m\,.\,\delta z = \frac{d\delta z}{d\tau}; \qquad A\delta z = b_0\frac{d\delta z}{db}$$

откуда

$$\lambda = -\frac{1}{m\,.\,\delta z}\cdot\frac{d\delta z}{d\tau}$$

$$A = \frac{b_0}{\delta z}\cdot\frac{d\delta z}{db} \tag{92}$$

И такъ если вычислены по средней рефракціи производныя $\frac{d\delta z}{d\tau}$ и $\frac{d\delta z}{db}$ при помощи выраженій (89) и (90), то величины λ и A найдутся изъ выраженій (92). Зная величины λ и A вычислимъ истинную рефракцію по средней при помощи выраженія (91).

11. Для возможнаго упрощенія вычисленій Бессель составилъ таблицы рефракціи. Устройство этихъ таблицъ основано на слѣдующихъ соображеніяхъ.

Если положимъ

$$\delta z = \alpha_0\,.\,\mathrm{tang}\, z \tag{93}$$

$$\frac{1}{1 + m(\tau - \tau^0)} = \gamma; \qquad \frac{b}{b_0} = B.T$$

то выраженіе рефракціи (91) приметъ видъ

$$z = \gamma^{\lambda}\,.\,(B.T)^{A}\,.\,\alpha_0\,.\,\mathrm{tang}\, z. \tag{94}$$

Чтобы привести вычисленіе этого выраженія въ зависимость отъ таблицъ, Бессель

принялъ за нормальныя величины τ и b значенія $\tau_0 = 50^\circ . F$ и $b_0 = 29 . b$ англійскихъ дюймовъ и для этихъ значеній τ и b и соотвѣтствующихъ имъ величинъ α, β и l вычислилъ по уравненію (59) или, что все равно, по уравненію (72) величину δz для значеній z измѣняющихся отъ 5° до 5° между предѣлами 0° и 30°, далѣе величины δz вычислены Бесселемъ для значеній z измѣняющихся отъ градуса до градуса въ предѣлахъ отъ 30° до 75° включительно, наконецъ аргументъ z для котораго вычислена величина δz измѣняется отъ $10'$ до $10'$ въ предѣлахъ отъ 75° до 85° включительно. Но въ таблицѣ Бесселя для такихъ значеній аргумента z дается не величина средней рефракціи, а зависящая отъ нея по уравненію (93) величина α_0. Если величины δz для извѣстныхъ зенитныхъ разстояній вычислены, то для тѣхъ же значеній аргумента z по уравненіямъ (89) и (90) могутъ быть вычислены сначала значенія производныхъ $\dfrac{d\delta z}{d\tau}$ и $\dfrac{d\delta z}{db}$, а съ ними наконецъ λ и A по уравненіямъ (92). Это и сдѣлано Бесселемъ; въ его таблицахъ рефракціи для упомянутыхъ выше значеній зенитнаго разстоянія, принятаго за аргументъ таблицъ, даны значенія α_0, λ и A. Остальная часть Бесселевыхъ таблицъ рефракціи служитъ для перехода отъ средней рефракціи къ истинной. При составѣ этой второй части таблицъ рефракціи Бессель руководствовался слѣдующими соображеніями. Полагая, какъ выше это сдѣлано,

$$\gamma = \frac{1}{1 + m(\tau - \tau_0)}$$

примемъ $\tau_0 = 50^\circ F$; тогда понятно, что γ есть отношеніе объема извѣстнаго количества воздуха при температурѣ 50° Фаренгейтова термометра, къ объему того же количества при другой температурѣ τ. Если примемъ за единицу объемъ воздуха при температурѣ таянія и замѣтимъ, что точка таянія на Фаренгейтовомъ термометрѣ означена чрезъ 32°, то найдемъ, что величина объема при другой какой либо температурѣ τ будетъ

$$1 + \frac{0.36438}{180}(\tau - 32^\circ)$$

гдѣ $\dfrac{0.36438}{180}$ есть коэффиціентъ расширенія воздуха, т. е. измѣненіе единицы объема воздуха при измѣненіи температуры на одинъ градусъ Фаренгейтова термометра.

Нормальная температура принятая Бесселемъ есть $50^\circ F$ по снаряду употреблявшемуся при наблюденіяхъ Брадлеемъ, но, какъ оказалось потомъ, этотъ термометръ давалъ всѣ температуры выше истинныхъ на $1^\circ,25$, а потому его показаніе въ 50° соотвѣтствуетъ температурѣ $48^\circ,75F.$, слѣдовательно объемъ воздуха при температурѣ 50° по термометру Брадлея выраженный въ единицахъ объема при температурѣ таянія будетъ

$$1 + \frac{0.36438}{180}\left(48.75 - 32,0\right) = \frac{180 + 16,75 . 0,36438}{180}$$

Объемъ воздуха при температурѣ τ, выраженный въ тѣхъ же единицахъ, будетъ очевидно

$$1 + \frac{0.36438}{180}(\tau - 32.0) = \frac{180^\circ + 0.36438\,(\tau - 32,0)}{180}$$

Отношеніе этихъ двухъ объемовъ и будетъ опредѣляемый нами производитель γ; такимъ образомъ

$$\gamma = \frac{180 + 16,75 \,.\, 0,36438}{180^{\circ} + (\tau - 32.0)\, 0.36438} \qquad (a)$$

Извѣстно, что всякая температура измѣренная термометромъ Фаренгейта, будучи выражена въ градусахъ Реомюрова термометра, представится меньшимъ числомъ и такъ какъ одновременныя показанія термометра Фаренгейта и термометра Реомюра находятся между собою въ отношеніи $\frac{180}{80} = \frac{9}{4}$, то означивъ чрезъ R число градусовъ въ показаніи Реомюрова термометра, соотвѣтствующее показанію $\tau - 32.0$ Фаренгейтова термометра, найдемъ

$$\frac{\tau - 32.0}{R} = \frac{9}{4}$$

Слѣдовательно производитель γ для наблюденій производимыхъ съ термометромъ Реомюра будетъ

$$\gamma = \frac{180^{\circ} + 16,75 \,.\, 0,36438}{180 + \frac{9}{4} R \,.\, 0,36438} \qquad (b)$$

Точно также помня, что одновременныя показанія при одинакихъ условіяхъ термометровъ Фаренгейта и Цельзія относятся между собою, какъ $\frac{180}{100} = \frac{9}{5}$ и означивъ чрезъ C показаніе термометра Цельзія соотвѣтствующее показанію $\tau - 32.0$ термометра Фаренгейта, найдемъ

$$\frac{\tau - 32,0}{C} = \frac{9}{5}$$

а потому производитель γ для наблюденій производимыхъ съ термометромъ Цельзія будетъ

$$\gamma = \frac{180 + 16,75 \,.\, 0,36438}{180 + \frac{9}{5} C \,.\, 0,36438} \qquad (c)$$

По выраженіямъ (a), (b), (c) Бессель вычислилъ таблицы, въ которыхъ даются величины $\log \gamma$ для показаній трехъ термометровъ. Всѣ три таблицы расположены по аргументу температуры. Для Фаренгейтова термометра аргументъ измѣняется отъ градуса до градуса въ предѣлахъ -25° и $+95^{\circ}$ для термометровъ Реомюра и Цельзія аргументъ таблицы подобнымъ же образомъ измѣняется въ предѣлахъ -35° и $+35^{\circ}$.

Вычисленіе коеффиціента $\frac{b}{b_0}$ также приведено Бесселемъ въ зависимость отъ таблицы.

Нормальная высота барометра принятая Бесселемъ есть 29,6 англійскихъ дюймовъ снаряда Брадлея. Впослѣдствіи оказалось, что всѣ показанія барометра, которымъ пользовался Брадлей были меньше истинныхъ на 0,044 англійскихъ дюйма, такъ что за нормальную высоту нужно считать 29.644 по показанію вѣрнаго барометра. Барометрическія скалы раздѣлены по большей части или на парижскія линіи, или на англійскіе дюймы, или наконецъ на миллиметры; а потому посмотримъ ка-

кимъ образомъ можно вычислять величину множителя $\frac{b}{b_0}$ для различныхъ барометрическихъ скалъ.

Длина парижской линіи дана для температуры $+13^\circ$R., англійскаго дюйма — для температуры 62°F, и метра для 0°C; слѣдовательно дѣленія различныхъ скалъ означаютъ истинныя высоты только тогда, когда находящіеся при нихъ термометры показываютъ соотвѣтствующія означеннымъ температуры, а потому если при температурѣ t выраженная въ линіяхъ высота барометра есть $b^{(l)}$, въ дюймахъ $b^{(e)}$ и наконецъ въ миллиметрахъ $b^{(m)}$, то эти высоты не могутъ считаться вѣрными, ибо металическая скала барометра съ измѣненіемъ температуры измѣняетъ свою длину и не может непосредственно служить для измѣренія барометрической высоты. Если разширеніе одного дѣленія мѣдной скалы отъ точки таянія до точки кипѣнія, которыя отдалены одна отъ другой на α градусовъ, будетъ равно s, то разширеніе при измѣненіи на одинъ градусъ представится чрезъ $\frac{s}{\alpha}$. Если длина одного дѣленія скалы при таяніи принята за единицу, то длина того же дѣленія при температурѣ t будетъ

$$1+\frac{s}{\alpha}\cdot t$$

если нормальная температура есть τ, то длина одного дѣленія скалы при соотвѣтствующей нормальной температурѣ будетъ

$$1+\frac{s}{\alpha}\cdot\tau$$

Длины ртутныхъ столбовъ измѣренныя единицами разной длины представляются числами обратно пропорціональными длинѣ принятыхъ единицъ, которыми производилось измѣреніе; т. е. если при температурѣ t отсчитываніе на скалѣ барометра было h_0, а при температурѣ τ отсчитываніе на той же скалѣ было h (гдѣ h есть слѣдовательно вѣрная длина ртутнаго столба), то

$$\frac{h_0}{h}=\frac{1+\frac{s}{\alpha}\cdot\tau}{1+\frac{s}{\alpha}\cdot t}$$

откуда

$$h=\frac{\left(1+\frac{s}{\alpha}\cdot t\right)h_0}{1+\frac{s}{\alpha}\cdot\tau}=\frac{\alpha+s.t}{\alpha+s.\tau}\cdot h_0$$

И такъ если назовемъ чрезъ r, f, c числа градусовъ въ показаніяхъ термометровъ Реомюра, Фаренгейта и Цельзія, при которыхъ были отсчитаны высоты барометра $b^{(l)}$, $b^{(e)}$, $b^{(m)}$, то истинная длина ртутнаго столба въ барометрѣ выраженная въ линіяхъ, дюймахъ и миллиметрахъ будетъ

$$\frac{80+r.s}{80+13.s}\cdot b^{(l)};\qquad \frac{180+(f-32^\circ)s}{180+30.s}\,b^{(e)};\qquad \frac{100+c.s}{100}\,b^{(m)}$$

гдѣ s для мѣдной скалы $= 0.0018782$. Такъ какъ англійскій дюймъ равенъ $\frac{12}{1.065765}$ пар. линій, а одинъ метръ составляетъ 443,296 пар. линій, то предыдущія три высоты барометра выраженныя въ парижскихъ линіяхъ будутъ

$$\frac{80+r.s}{80+13.s}\,b^{(l)}=\frac{180+(f-32)s}{180+30.s}\cdot\frac{12}{1.065765}\,b^{(s)}=443{,}296\,\frac{100+cs}{100}\,b^{(m)} \qquad \text{(d)}$$

Нормальная высота барометра принятая Весселемъ въ 333.78 пар. линій соотвѣтствуетъ нормальной температурѣ 50° F, 8° R, 10° C, а слѣдовательно, приводя упомянутую сейчасъ высоту къ нормальной температурѣ парижской линіи, найдемъ, что нормальная высота барометра выраженная въ парижской мѣрѣ будетъ

$$B_0=333.78\,\frac{1+\frac{8}{80}\cdot s}{1+\frac{13}{80}s}$$

или

$$B_0=333.78\,\frac{80+8.s}{80+13.s} \qquad \text{(e)}$$

Наконецъ самый столбъ ртути въ барометрѣ при одномъ и томъ же давленіи атмосферы имѣетъ не одинакую длину при различныхъ температурахъ вслѣдствіе разширенія, а потому барометрическія высоты замѣчаемыя при различныхъ температурахъ слѣдуетъ приводить къ одной опредѣленной температурѣ. Другими словами, истинная высота ртути въ барометрической трубкѣ, тогда только пропорціональна давленію, когда температура ртути постоянна. По этому наблюдаемую барометрическую высоту всегда должно приводить къ той, которая имѣла бы мѣсто, если бы температура была равна принятой нормальной температурѣ, т. е. 8° R, 50° F, 10° C. Извѣстно, что при измѣненіи температуры отъ точки таянія до точки кипѣнія ртуть разширяется на $\frac{1}{55{,}5}$ своего объема. Положимъ для краткости $\frac{1}{55{,}5}=q$. Если при температурѣ t была наблюдаема высота барометра h и если также высота при нормальной температурѣ τ есть h', то

$$\frac{h'}{h}=\frac{1+\frac{q}{\alpha}\cdot\tau}{1+\frac{q}{\alpha}\cdot t}=\frac{\alpha+q.\tau}{\alpha+q.t}.$$

гдѣ α имѣетъ тоже значеніе какъ выше. Отсюда видимъ что высота барометра приведенная къ нормальной температурѣ будетъ

$$h'=h\,\frac{\alpha+q.\tau}{\alpha+q.t}$$

здѣсь τ есть разность нормальной температуры и температуры таянія, а t подобная же разность для наблюдаемой температуры. Такимъ образомъ множитель предыдущаго выраженія при h для трехъ термометровъ имѣетъ форму

$$\frac{80+8.q}{80+r.q};\qquad \frac{180+18.q}{180+(f-32)q};\qquad \frac{100+10q}{100+c.q}. \qquad \text{(f)}$$

гдѣ подъ r, f, c разумѣемъ показанія термометра находящагося при барометрѣ, или такъ называемаго внутренняго термометра.

И такъ мы получимъ высоту барометра выраженную въ истинной мѣрѣ и приведенную къ нормальной температурѣ ртути, если только перемножимъ соотвѣтственно выраженія (d) и (f) и тогда будемъ имѣть

$$b^{(l)}\left(\frac{80+r.s}{80+13.s}\right)\left(\frac{80+8.q}{80+r.q}\right)$$

$$\frac{12.b^{(e)}}{1.065765}\left(\frac{180+(f-32)s}{100+30.s}\right)\left(\frac{180+18.q}{180+(f-32)q}\right)$$

$$b^{(m)}\,443.296\,\frac{100+c.s}{100}\left(\frac{100+10.q}{100+c.q}\right)$$

Наконецъ приводя отсчитанныя высоты $b^{(l)}$, $b^{(e)}$, $b^{(m)}$ къ нормальной температурѣ парижской линіи должны будемъ найденныя произведенія раздѣлить на величину (e); послѣ чего найдемъ, что производитъ $\frac{b}{b_0}$, отъ котораго зависитъ выраженіе истинной рефракціи, представится въ видѣ

$$\frac{b^{(l)}}{333.78}\left(\frac{80+r.s}{80+13.s}\right)\left(\frac{80+8.q}{80+r.q}\right)\left(\frac{80+13.s}{80+8.s}\right)$$

$$\frac{12.b^{(e)}}{1,065765.333,78}\left(\frac{180+(f-32)s}{180+30.s}\right)\left(\frac{180+18.q}{180+(f-32)q}\right)\left(\frac{80+13.s}{80+8.s}\right)$$

$$b^{(m)}.\frac{443.296}{333.78}\left(\frac{100+c.s}{100}\right)\left(\frac{100+10.q}{100+c.q}\right)\left(\frac{80+13.s}{80+8.s}\right)$$

Мы видимъ, что каждая изъ этихъ трехъ формъ производителя $\left(\frac{b}{b_0}\right)$ состоитъ изъ двухъ множителей, одинъ изъ нихъ зависитъ отъ барометрическаго показанія, другой отъ показанія, такъ называемаго, внутренняго термометра. Первый множитель, который мы назовемъ чрезъ B, для упомянутыхъ трехъ видовъ производителя есть

$$B=\frac{b^{(l)}}{333.78}\left(\frac{80+8.q}{80+8.s}\right)$$

$$B=\frac{b^{(e)}}{333.78}\left(\frac{12}{1.065765}\right)\left(\frac{80+13.s}{80+8.s}\right)\left(\frac{180+18.q}{180+30.s}\right)$$

$$B=\frac{b^{(m)}}{333.78}\left(\frac{80+13.s}{80+8.s}\right)\left(\frac{100+10.q}{100}\right)443,296$$

если втораго производителя, зависящаго отъ показанія внутренняго термометра, означимъ чрезъ T, тогда

$$T=\frac{80+r.s}{80+q.s}=\frac{180+(f-32)s}{180+(f-32).q}=\frac{100+c.s}{100+c.q}$$

Величины логариомовъ производителей B и T даны Бесселемъ въ двухъ таблицахъ расположенныхъ по аргументу: одна барометрическаго показанія, а другая по аргументу показанія внутренняго термометра. Аргументъ таблицы lg T измѣняется для Фаренгейтова термометра отъ 10° до 10° въ предѣлахъ — 30° и + 100°, для термометровъ же Реомюра и Цельзія — отъ 5° до 5°, въ предѣлахъ — 35° и + 35°. Аргументъ таблицы lg B для скалы барометра раздѣленной на парижскія линіи из-

мѣняется отъ линіи до линіи въ предѣлахъ отъ 315 до 350 парижскихъ линій; для скалы раздѣленной на англійскія дюймы аргументъ измѣняется отъ линіи до линіи въ предѣлахъ отъ $27^{д}\ 5^{л}$ до $31^{д}\ 0^{л}$; наконецъ для скалы раздѣленной на миллиметры аргументъ измѣняется отъ миллиметра до миллиметра въ предѣлахъ отъ 725 до 795 мил. Таблицы рефракціи вычисленныя Бесселемъ помѣщены въ его собраніи различныхъ астрономическихъ таблицъ, изданномъ подъ заглавіемъ Tabulae Regiomontanae на стр. 538 и затѣмъ перепечатаны въ Sammlung von Hülfstafeln. Herausgegeben im Jahre 1822 von H. C. Schumacher и въ нѣкоторыхъ другихъ астрономическихъ сочиненіяхъ.

Чтобы объяснить на частномъ примѣрѣ употребленіе Бесселевыхъ таблицъ рефракціи, опредѣлимъ истинное зенитное разстояніе нѣкотораго свѣтила, соотвѣтствующее видимому зенитному разстоянію равному 78° 25′ 35″, полученному изъ наблюденій при показаніяхъ: барометра 773,5 миллиметра, внутренняго термометра $+18^{\circ},3\ C$ и внѣшняго термометра $+16^{\circ},0\ R$. Для рѣшенія этого вопроса обратимся къ выраженію (94), и изъ Бесселевыхъ таблицъ рефракціи съ аргументомъ даннаго видимаго зенитнаго разстоянія находимъ

$$\lg \alpha_0 = 1.74996; \qquad A = 1.0031; \qquad \lambda = 1.0323$$

по аргументу показанія барометра изъ тѣхъ же таблицъ имѣемъ $\lg B = +0.01253$; по аргументамъ показанія внутренняго и наружнаго термометра получаемъ

$$\lg T = -0.00127; \qquad \lg \gamma = -0.01607$$

По этимъ величинамъ составляемъ

$$\lg BT = +0.01126, \qquad A \lg (BT) = +0.01129$$
$$\lambda \lg \gamma = -0.01659$$

Такъ какъ по уравненію (94) величина искомой рефракціи есть

$$\lg r = \lambda . \lg \gamma + A . \lg (BT) + \lg \alpha_0 + \lg \operatorname{tang} z.$$

то для вычисленія этого выраженія, имѣемъ

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{tang} z &= 0.68868 \\ \lg \alpha_0 &= 1.74996 \\ A \lg (BT) &= 0.01129 \\ \lg \alpha_0 \operatorname{tang} z . (BT)^A &= 2.44993 \\ \lambda \lg \gamma &= -0.01659 \\ \lg r &= 2.43334; \qquad r = 271''.2 = 4'\ 31''.2 \end{aligned}$$

Такъ какъ отъ вліянія рефракціи зенитныя разстоянія уменьшаются, то для вычисленія истиннаго зенитнаго разстоянія по данному видимому, къ этому послѣднему слѣдуетъ придать величину рефракціи. Сдѣлавъ это, найдемъ, что въ нашемъ случаѣ искомое истинное зенитное разстояніе ζ, соотвѣтствующее данному видимому z, есть

$$\zeta = 78^{\circ}\ 30'\ 6''.2$$

Ближайшимъ слѣдствіемъ невѣрности принятаго Бесселемъ закона измѣненія температуры въ атмосферѣ является то обстоятельство, что вычисленная по Бесселевой теоріи рефракція для большихъ зенитныхъ разстояній, именно для разстояній превы-

шающихъ 85°, получается гораздо болѣе той, которая имѣетъ мѣсто въ дѣйствительности. Чтобы судить о величинѣ рефракціи при горизонтѣ, вычисляемой на основаніи теоріи Весселя, положимъ $z = 90°$, тогда $T = 0$ и выраженіе (60) обращается въ

$$\psi(n) = \int_0^{\infty} e^{-t^2} . dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

а потому для горизонта выраженіе (59) принимаетъ видъ

$$\delta z = \frac{\alpha . \sqrt{\pi}}{1 - \alpha} \sqrt{\frac{\beta}{2}} \left\{ e^{-\alpha\beta} + 2^{\frac{1}{2}} \alpha\beta\, e^{-2\alpha\beta} + 3^{\frac{3}{2}} \frac{\alpha^2 \beta^2}{1 . 2} e^{-3\alpha\beta} + \cdots\cdots \right\}$$

Подставивъ сюда вмѣсто α и β ихъ числовыя величины, найдемъ, что при горизонтѣ $\delta z = 36' \, 5''$, тогда какъ изъ наблюденій слѣдуетъ, что горизонтальная рефракція не превосходитъ $34' \, 50''$. Причина, по которой Бессель невѣрно принялъ законъ измѣненія температуры въ атмосферѣ, заключается едвали не въ слѣдующемъ обстоятельствѣ. Брадлей наблюдалъ очень близкія къ горизонту звѣзды и рефракцію получающуюся изъ этихъ наблюденій Бессель хотѣлъ представить теоретически. Большая часть наблюденій Брадлея была сдѣлана ночью и зимою и это было одною изъ причинъ того, что рефракція имѣла весьма большую величину. Чтобы представить эту большую рефракцію Бессель и принялъ ту гипотезу измѣненія температуры, о которой мы теперь говорили. Какъ бы то ни было, Бессель самъ видѣлъ, что его теорія не удовлетворяетъ наблюденіямъ сдѣланнымъ вблизи горизонта и потому свои таблицы рефракціи, основанныя на теоретическихъ соображеніяхъ, распространилъ по аргументу зенитнаго разстоянія до 85°, для бо́льшихъ же зенитныхъ разстояній онъ опредѣляетъ рефракцію путемъ эмпирическимъ.

12. За одну изъ наиболѣе удачныхъ попытокъ согласить теорію съ наблюденіями для значительныхъ зенитныхъ разстояній (даже превышающихъ 85°) слѣдуетъ признать попытку шведскаго астронома доктора Г. Гильдейна (H. Gyldén). Выводъ закона измѣненія температуры въ слояхъ атмосферы Гильдейнъ основываетъ на наблюденіяхъ Плантамура произведенныхъ на различныхъ высотахъ въ окрестностяхъ Женевы, на опредѣленіяхъ разности температуръ сдѣланныхъ Кемтцемъ (Kämtz) между Цюрихомъ и Риги-Кульмъ; на наблюденіяхъ Соссюра (Saussure) на Монбланѣ, на наблюденіяхъ Бауернфейнда (Bauernfeind) въ Баваріи и Предигера (Prediger) въ Гарцѣ и наконецъ на наблюденіяхъ сдѣланныхъ при нѣкоторыхъ воздухоплаваніяхъ. Сущность предложенной Гильдейномъ теоріи рефракціи заключается въ слѣдующемъ.

Назовемъ какъ прежде коэффиціентъ расширенія воздуха чрезъ m, радіусъ земли — чрезъ a, чрезъ h высоту какой либо точки атмосферы надъ поверхностью земли, чрезъ t температуру на высотѣ h, чрезъ t_0 температуру на поверхности земли въ той точкѣ, которая лежитъ на одной нормали съ разсматриваемой точкой атмосферы. Пусть кромѣ того

$$q = a + h; \qquad s = 1 - \frac{a}{q} = \frac{h}{q}.$$

Предположимъ, что отношеніе

$$\frac{1+mt}{1+mt_0}=\chi$$

разложено по степенямъ s въ рядъ вида

$$\frac{1+mt}{1+mt_0}=1-\beta s+\gamma s^2+ \text{ и т. д.}$$

Если бы коеффиціенты этого ряда были извѣстны, то это выраженіе давало бы возможность опредѣлять температуру t произвольной точки атмосферы по температурѣ t_0. Годичныя и суточныя измѣненія температуры въ слояхъ атмосферы также могутъ быть представлены этимъ рядомъ, стоитъ только принять коеффиціенты β, γ и т. д. за перемѣнныя величины; напр. для представленія годичныхъ измѣненій—за функціи долготы солнца. Для представленія годичныхъ измѣненій достаточно, собственно говоря, одного перемѣннаго коеффиціента β, или по большей мѣрѣ двухъ: β и γ. Основываясь на выше упомянутыхъ метеорологическихъ наблюденіяхъ можно принять $\gamma=\frac{1}{4}\beta^2$. При такомъ допущеніи, ограничиваясь первыми тремя членами ряда, представимъ предыдущее выраженіе въ видѣ

$$\frac{1+mt}{1+mt_0}=1-\beta s+\frac{\beta^2 s^2}{4}$$

или

$$\frac{1+mt}{1+mt_0}=\left(1-\frac{\beta s}{2}\right)^2$$

Величину β Гильдейнъ опредѣлилъ по метеорологическимъ наблюденіямъ произведеннымъ подъ руководствомъ астронома Плантамура въ Женевѣ и на большомъ С.-Бернарѣ въ періодъ времени съ 1856 по 1861 годъ. Если означимъ чрезъ θ выраженное въ дугѣ время протекшее отъ начала года до разсматриваемаго момента (при этомъ каждый мѣсяцъ будемъ принимать за 30°), то, основываясь на упомянутыхъ метеорологическихъ наблюденіяхъ, слѣдуетъ принять

$$\beta=123{,}4-17{,}0\cos\theta+4{,}2\sin\theta \qquad \text{(A)}$$
$$-\;2{,}2\cos 2\theta-3{,}9\sin 2\theta$$

Если назовемъ чрезъ ρ плотность атмосферы на нѣкоторой высотѣ h надъ поверхностью земли, чрезъ ρ_0 плотность у самой поверхности, чрезъ p давленіе на высотѣ h и чрезъ p_0 давленіе на высотѣ $h=0$, то, какъ мы видѣли, на основаніи Маріоттъ-Гейлюссакова закона, существуетъ соотношеніе вида

$$\frac{p}{p_0}=\frac{\rho}{\rho_0}\left(\frac{1+mt}{1+mt_0}\right) \qquad (95)$$

Назовемъ чрезъ ω величину s, для которой разность $1-\frac{\beta s}{2}$ обращается въ нуль. Высоту h соотвѣтствующую такой величинѣ s означимъ чрезъ H и будемъ называть *идеальною высотой* атмосферы. Такъ какъ вообще

$$s=1-\frac{a}{q}$$

то по нашему условію

$$\omega=1-\frac{a}{a+H}$$

или

$$\omega = \frac{H}{a + H}$$

и кромѣ того по нашему условію

$$1 - \frac{\beta\omega}{2} = 0$$

откуда

$$\omega = \frac{2}{\beta}.$$

Если примемъ $\beta = 126$, то $\omega = \frac{1}{63}$; $H = \frac{a}{62}$. И такъ идеальная высота атмосферы составляетъ $\frac{1}{62}$ долю земнаго радіуса, или 13,8 геогр. миль. Изъ наблюденій Шмидта въ Афинахъ надъ продолжительностію сумерекъ слѣдуетъ, что высота атмосферы есть приблизительно 8,7 геогр. миль. Слѣдовательно одно изъ условій, которымъ должна удовлетворять гипотеза о законѣ измѣненія температуры въ атмосферѣ, выполняется принимаемою нами теперь гипотезою.

Если законъ измѣненія температуры съ высотою извѣстенъ, то мы можемъ найти законъ измѣненія плотности. Въ самомъ дѣлѣ изъ соотношенія (95) находимъ

$$\rho = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{\rho_0}{\chi}$$

Внося это въ уравненіе (44), имѣемъ

(96) $$dp = -g_0\,\rho \frac{p}{p_0} \frac{a^2}{q^2} \frac{dq}{\chi}$$

Означимъ чрезъ (ρ_0) величину ρ_0 соотвѣтствующую температурѣ 0^0 и примемъ объемъ при температурѣ нуля за единицу, тогда объемъ при температурѣ t_0 будетъ $1 + mt_0$, а такъ какъ плотности находятся въ обратномъ отношеніи съ объемами, то

$$\frac{\rho_0}{(\rho_0)} = \frac{1}{1 + mt_0}$$

или

(97) $$\rho_0 = \frac{(\rho_0)}{1 + mt_0}$$

Пусть какъ прежде

$$l = \frac{p_0}{g_0\,\rho_0} \quad \text{и} \quad l_0 = \frac{p_0}{g_0\,(\rho_0)}$$

тогда, обращая вниманіе на предыдущее уравненіе, изъ перваго изъ этихъ выраженій находимъ

(98) $$l = \frac{p_0}{g_0\,(\rho_0)}(1 + mt_0)$$

или

$$l = l_0 (1 + mt_0)$$

и уравненіе (96) вслѣдствіе уравненія (97) дастъ

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0 (\rho_0)}{p_0 (1 + mt_0)} \cdot \frac{a^2}{q^2} \cdot \frac{dq}{\chi}$$

или по уравненіе (98) имѣемъ

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{l} \frac{a^2}{q^2} \frac{dq}{\chi}$$

но $s = 1 - \frac{a}{q}$, а потому $ds = \frac{a \cdot dq}{q^2}$; слѣдовательно

$$\frac{dp}{p} = -\frac{a}{l} \cdot \frac{ds}{\chi}.$$

но мы видѣли, что законъ уменьшенія температуры съ возрастаніемъ высоты въ атмосферѣ представляется формою

$$\chi = \left(1 - \frac{\beta s}{2}\right)^2$$

а потому

$$\frac{dp}{p} = -\frac{a}{l} \cdot \frac{ds}{\left(1 - \frac{\beta s}{2}\right)^2}$$

интегрируя это, находимъ

$$\lg p = C - \frac{2a}{l.\beta}\left[\frac{1}{1 - \frac{\beta s}{2}}\right]$$

гдѣ C есть произвольная постоянная введенная интегрированіемъ.

Для $s = 0$ имѣемъ

$$\lg p_0 = C - \frac{2a}{l.\beta}$$

слѣдовательно

$$\lg \frac{p}{p_0} = \frac{2a}{l.\beta}\left[1 - \frac{1}{1 - \frac{\beta s}{2}}\right]$$

или

$$\lg \frac{p}{p_0} = -\frac{a}{l} \cdot \frac{s}{1 - \frac{\beta s}{2}}$$

но $\frac{2}{\beta} = \omega$, а потому

$$\lg \frac{p}{p_0} = -\frac{a\omega}{l} \cdot \frac{\frac{s}{\omega}}{1 - \frac{s}{\omega}}$$

Пусть

$$\frac{a\omega}{l} = g$$

тогда

$$\lg \frac{p}{p_0} = -g \left[\frac{\frac{s}{\omega}}{1 - \frac{s}{\omega}} \right]$$

или

$$\lg \frac{p}{p_0} = -g \left[\frac{1}{1 - \frac{s}{\omega}} - 1 \right]$$

или

$$\frac{p}{p_0} = e^{-g \left[\frac{\omega}{\omega - s} - 1 \right]}$$

Но такъ какъ

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \chi$$

и при томъ

$$\chi = \left(1 - \frac{\beta s}{2}\right)^2 = \left(\frac{\omega - s}{\omega}\right)^2$$

то искомый законъ измѣненія плотности съ высотою представится уравненіемъ

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{\omega}{\omega - s}\right)^2 \cdot e^{-g \left[\frac{\omega}{\omega - s} - 1 \right]} \tag{99}$$

Средняя величина g есть 12.8, а потому принимая $h = 8{,}7$ геогр. миль, находимъ $s = 0{,}01$ и

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 0{,}0000000059$$

величина совершенно незначительная. Такимъ образомъ мы видимъ, что законъ измѣненія плотности съ высотою представленный уравненіемъ (99) удовлетворяетъ тому условію, что плотность воздуха въ слояхъ, заключающихся между высотою выведеннаго изъ наблюденій продолжительности сумерекъ и высотою идеальной атмосферы, не примѣтна.

13. Имѣя выраженіе (99) можемъ приступить къ интегрированію уравненія (42). Если какъ прежде положимъ въ этомъ уравненіи

$$y^2 = \cos^2 z - 2\alpha\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) + 2s \, . \sin^2 z$$

То подобно предыдущему найдемъ, что

$$\frac{1-s}{\sqrt{y^2-s^2 . \sin^2 z}}=\frac{1}{y}-\frac{2s . y^2-s^2 . \sin^2 z}{2y^3}$$

вмѣсто этого по малости втораго члена можемъ принять

$$\frac{1-s}{\sqrt{y^2-s^2 . \sin^2 z}}=\frac{1}{y}$$

И тогда уравненіе (42) представится въ видѣ

$$d\delta z=\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{\sin z \frac{d\rho}{\rho_0}}{\sqrt{\cos^2 z-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)+2s . \sin^2 z}}$$

Мы знаемъ какимъ образомъ рефракція вліяетъ на зенитныя разстоянія свѣтилъ, а потому не обращаемъ вниманія на знакъ выраженія (42).

Положимъ

$$\frac{\rho}{\rho_0}=w ; \qquad \frac{d\rho}{\rho_0}=dw$$

тогда

$$d\delta z=\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\sin z . dw}{\sqrt{\cos^2 z-2\alpha(1-w)+2s . \sin^2 z}}$$

Введемъ сюда новое перемѣнное x подъ условіемъ

$$\frac{1}{x}=\frac{\omega}{\omega-s}$$

тогда

$$\omega-s=x\omega ; \qquad s=\omega-x\omega$$

слѣдовательно

$$\cos^2 z-2\alpha(1-w)+2s . \sin^2 z=\cos^2 z+2\omega \sin^2 z-2\omega x . \sin^2 z-2\alpha(1-w)$$

$$=\left[\cos^2 z+2\omega \sin^2 z-2\omega x . \sin^2 z\right]\left[1-\frac{2\alpha(1-w)}{\cos^2 z+2\omega \sin^2 z-2\omega x \sin^2 z}\right]$$

а потому

$$d\delta z=\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{\left\{1-\frac{2\alpha(1-w)}{\left[\cos^2 z+2\omega \sin^2 z\right]\left[1-x \frac{2\omega \sin^2 z}{\cos^2 z+2\omega \sin^2 z}\right]}\right\}^{-\frac{1}{2}} \sin z . dw}{\sqrt{\cos^2 z+2\omega \sin^2 z} \sqrt{1-x \frac{2\omega . \sin^2 z}{\cos^2 z+2\omega \sin^2 z}}} \tag{100}$$

пусть

$$p=\frac{2\alpha}{\cos^2 z+2\omega \sin^2 z} ; \qquad q=\frac{2\omega . \sin^2 z}{\cos^2 z+2\omega \sin^2 z} \tag{101}$$

изъ послѣдняго находимъ

$$\sqrt{\frac{q}{2\omega}} = \frac{\sin z}{\sqrt{\cos^2 z + 2\omega \cdot \sin^2 z}} \cdot$$

а потому уравненіе (100) принимаетъ видъ

$$d\delta z = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{q}{2\omega}} \cdot \left[1 - \frac{p(1-w)}{1-qx}\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{dw}{\sqrt{1-qx}}$$

разлагая это въ рядъ по строкѣ Ньютона, имѣемъ

$$(102) \qquad d\delta z = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{q}{2\omega}}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-qx}} + \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-qx}}\left[\frac{1-w}{1-qx}\right] + \frac{3p^2}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-qx}}\left[\frac{1-w}{1-qx}\right]^2 + \cdots\right\} dw.$$

производители этого выраженія

$$\frac{1}{\sqrt{1-qx}}; \qquad \frac{1}{\sqrt{1-qx}}\left[\frac{1-w}{1-qx}\right]; \qquad \frac{1}{\sqrt{1-qx}}\left[\frac{1-w}{1-qx}\right]^2, \text{ и т. д.}$$

заключаются въ формѣ

$$\frac{1}{\sqrt{1-qx}}\left[\frac{1-w}{1-qx}\right]^n$$

или, что все равно, въ формѣ

$$(1-w)^n (1-qx)^{-n-\frac{1}{2}}$$

въ которой для полученія членовъ ряда (102) должно измѣнять n отъ 0 до ∞

Если положимъ

$$A^{(n)} = \int (1-w)^n (1-qx)^{-n-\frac{1}{2}} dw$$

то интегрируя выраженіе (102), получимъ

$$(103) \qquad \delta z = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{q}{2\omega}}\left\{A^{(0)} + \frac{p}{2}A^{(1)} + \frac{3p^2}{8}A^{(2)} + \cdots\right\}$$

этотъ интегралъ берется по перемѣнному $w = \frac{\rho}{\rho_0}$. На предѣлахъ атмосферы $\rho = 0$ и $w = 0$; на поверхности земли $\rho = \rho_0$ и $w = 1$, а потому предѣлами интеграціи будутъ 0 и 1, слѣдовательно

$$A^{(n)} = \int_1^0 (1-w)^n (1-qx)^{-n-\frac{1}{2}} dw$$

Такимъ образомъ вычисленіе рефракціи приводится къ вычисленіе интеграла $A^{(n)}$. Для выполненія этого интегрированія введемъ новое перемѣнное подъ условіемъ

$$x = \frac{1}{1+y}$$

тогда

$$y = \frac{1}{x} - 1; \quad w = \frac{\rho}{\rho_0} = (1+y)^2 . e^{-gy}; \quad dw = (1+y)\left[2 - g(1+y)\right] e^{-gy} . dy$$

кромѣ того, такъ какъ при $w = 0$, $y = \infty$ и при $w = 1$, $y = 0$, то предѣлами интеграла по новому перемѣнному будутъ 0 и ∞; а потому

$$A^{(n)} = \int_0^\infty (1+y)\left[1 - \frac{q}{1+y}\right]^{-(n+\frac{1}{2})}\left[1-(1+y)^2 e^{-gy}\right]^n\left[g(1+y)-2\right] e^{-gy} dy$$

но

$$\left[1-(1+y)^2 e^{-gy}\right]^n =$$

$$1 - n(1+y)^2 e^{-gy} + \frac{n(n-1)}{1.2}(1+y)^4 e^{-2gy} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(1+y)^6 e^{-3gy} + \cdots$$

слѣдовательно

$$A^{(n)} = \int_0^\infty \left[g(1+y)-2\right]\left[1-\frac{q}{1+y}\right]^{-(n+\frac{1}{2})}\left\{(1+y)\,e^{-gy}\right.$$

$$\left. + n(1+y)^3 e^{-2gy} + \frac{n(n-1)}{1.2}(1+y)^5 e^{-3gy} + \cdots\cdots\right\} dy$$

Очевидно, что этотъ интегралъ можно раздѣлить на двѣ части и представить въ формѣ

$$A^{(n)} = g\int_0^\infty \left[1-\frac{q}{1+y}\right]^{-(n+\frac{1}{2})}\left\{(1+y)^2 e^{-gy} + n(1+y)^4 e^{-2gy} + \cdots\cdots\right\} dy$$

$$- 2\int_0^\infty \left[1-\frac{q}{1+y}\right]^{-(n+\frac{1}{2})}\left\{(1+y)\,e^{-gy} + n(1+y)^3 e^{-2gy} + \cdots\cdots\right\} dy$$

производители

$$(1+y)^2 e^{-gy}, \quad (1+y)^4 e^{-2gy}, \ldots\ldots$$

входящіе въ подъинтегральную функцію перваго ряда, заключаются въ формѣ

$$(1+y)^{2m} \cdot e^{-mgy}$$

Производители членовъ второго ряда

$$(1+y)\,e^{-gy}\;;\quad (1+y)^3.\,e^{-2gy}\;,\;\ldots\ldots$$

представляются формой

$$e^{-mgy}(1+y)^{2m-1}\;.$$

для той и другой изъ этихъ формъ m должно измѣняться отъ 0 до ∞. Обѣ упомянутыя формы можно привести къ одной вида

$$e^{-(m+1)gy}\,(1+y)^{2m+\gamma}\;.$$

ибо если сдѣлаемъ $\gamma=2$ и будемъ полагать $m=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots\ldots$, то будемъ получать производителей первой формы; при $\gamma=1$ и тѣхъ же значеніяхъ m найдемъ производителей второй формы. И такъ если положимъ

$$F_{\gamma}^{m,n}=\int_0^{\infty}(1+y)^{2m+\gamma}\left[1-\frac{q}{1+y}\right]^{-(n+\frac{1}{2})}e^{-(m+1)gy}\,dy$$

то

$$(104)\qquad \begin{aligned} A^{(n)}=g&\left\{F_2^{n,0}-n\,F_2^{n,1}+\frac{n\,(n-1)}{1.2}\,F_2^{n,2}-\ldots\ldots\right\}\\ -2&\left\{F_1^{n,0}-n\,F_1^{n,1}+\frac{n\,(n-1)}{1.2}\,F_1^{n,2}-\ldots\ldots\right\}\end{aligned}$$

Мы видимъ теперь что опредѣленіе интеграла $A^{(n)}$ приводится къ опредѣленію функціи $F_{\gamma}^{m,n}$; но

$$\left(1-\frac{q}{1+y}\right)^{-(n+\frac{1}{2})}=1+(n+\tfrac{1}{2})\,\frac{q}{1+y}+\frac{(n+\frac{1}{2})\,(n+\frac{3}{2})}{1.2}\,\frac{q^2}{(1+y)^2}+\ldots$$

по этому

$$(1+y)^{2m+\gamma}\left[1-\frac{q}{1+y}\right]^{-(n+\frac{1}{2})}.\;e^{-(m+1)gy}=$$

$$(1+y)^{2m+\gamma}.\,e^{-(m+1)gy}$$

$$+\,q\,(n+\tfrac{1}{2})\,(1+y)^{2m+\gamma-1}.\,e^{-(m+1)gy}$$

$$+\,q^2\,\frac{(n+\frac{1}{2})\,(n+\frac{3}{2})}{1.2}\,(1+y)^{2m+\gamma-2}.\,e^{-(m+1)gy}+\text{ и т. д.}$$

Производители

$$(1+y)^{2m+\gamma}.\,e^{-(m+1)gy}\;,\qquad (1+y)^{2m+\gamma-1}\,e^{-(m+1)gy}\;\text{ и т. д.}$$

заключаются въ формѣ

$$(1+y)^{2m+\gamma-i}\, e^{-(m+1)gy}$$

гдѣ i измѣняется отъ 0 до ∞. Положимъ для краткости

$$2m+\gamma=\varphi\,; \qquad (m+1)g=\eta$$

и примемъ

$$\Omega(\varphi-i,\eta)=\int_0^\infty (1+y)^{\varphi-i}\,.\,e^{-\eta y}\,dy$$

тогда

$$F_\gamma^{m,n}=\Omega(\varphi,\eta)+q(n+\tfrac{1}{2})\,\Omega(\varphi-1,\eta)+q^2\frac{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}{1\,.\,2}\,\Omega(\varphi-2,\eta)+\cdots$$

Если назовемъ биноміальные коеффиціенты входящіе сюда чрезъ

$$P^{n,1},\quad P^{n,2}.\quad P^{n,3}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

разумѣя подъ $P^{n,1}$ коеффиціентъ при первой степени q, подъ $P^{n,2}$ коеффиціентъ при q^2 и т. д., то предыдущее уравненіе представится въ видѣ

$$F_\gamma^{m,n}=\Omega(\varphi,\eta)+q\,P^{n,1}\,\Omega(\varphi-1,\eta)+q^2\,P^{n,2}\,\Omega(\varphi-2,\eta)+\cdots\cdots \tag{105}$$

Такимъ образомъ выполненіе интеграла $F_\gamma^{m,n}$ приводится къ вычисленіе функціи $\Omega(\varphi-i,\mu)$, которой, полагая $\varphi-i=\lambda$, дадимъ видъ

$$\Omega(\lambda,\eta)=\int_0^\infty (1+y)^\lambda\, e^{-\eta y}\,.\,dy \tag{106}$$

Чтобы придать ряду, представляющему выраженіе рефракціи, наибольшую сходимость даже и въ томъ случаѣ, когда зенитное разстояніе имѣетъ величину близкую къ 90°, расположимъ этотъ рядъ (105) не по степенямъ q, какъ это теперь сдѣлано, а по степенямъ нѣкоторой величины c, зависимость которой отъ q пусть имѣетъ видъ

$$q=\frac{4\,c}{(1+c)^2}$$

Если представимъ рядъ (105) въ формѣ

$$F_\gamma^{m,n}=\sum_{i=0}^{i=\infty} q^i\,P^{n,i}\,\Omega(\varphi-i,\eta)$$

то для введенія сюда c имѣемъ

$$q^i = 4^i c^i (1+c)^{-2i} = 4^i c^i \Big[1 - 2ic + \frac{2i(2i+1)}{1.2} c^2 - \frac{2i(2i+1)(2i+3)}{1.2.3} c^3 + \cdots\cdots$$

$$(\pm 1)^\mu \frac{2i(2i+1)(2i+2)\ldots\ldots(2i+\mu-1)}{1.2.3\ldots\ldots\mu} c^\mu \cdots\cdots \Big]$$

а потому

$$F^{m,n}_\gamma = \sum_{i=0}^{i=\infty} 4^i P^{i,n} \Omega(\varphi - i, \eta) \Big[c^i - 2ic^{i+1} + \frac{2i(2i+1)}{1.2} c^{i+2} - \cdots\cdots \Big]$$

Если будемъ выполнять здѣсь суммованіо по i, то получимъ для $i=0$ одинъ членъ вида $\Omega(\varphi,\eta)$, что же касается до множителя $P^{n,0}$, то онъ равенъ единицѣ. При $i=1$ получимъ рядъ

$$4.P^{n,1}\Omega(\varphi-1,\eta)\Big[c - 2c^2 + \frac{2.3}{1.2} c^3 - \frac{2.3.4}{1.2.3} c^4 + \cdots\cdots \Big]$$

при $i = 2, 3, 4 \ldots\ldots$ получимъ ряды

$$4^2 P^{n,2}\Omega(\varphi-2,\eta)\Big[c^2 - 4c^3 + \frac{4.5}{1.2} c^4 - \frac{4.5.6}{1.2.3} c^5 + \cdots\cdots \Big]$$

$$4^3 P^{n,3}\Omega(\varphi-3,\eta)\Big[c^3 - 6c^4 + \frac{6.7}{1.2} c^5 - \frac{6.7.8}{1.2.3} c^6 + \cdots\cdots \Big]$$

$$4^4 P^{n,4}\Omega(\varphi-4,\eta)\Big[c^4 - 8c^5 + \frac{8.9}{1.2} c^6 - \frac{8.9.10}{1.2.3} c^7 + \cdots\cdots \Big] \text{ и т. д.}$$

Если сложимъ эти ряды вмѣстѣ съ функціей $P^{n,0}.\Omega(\varphi,\eta)$ и расположимъ сумму по степенямъ c, то будемъ имѣть

$$\begin{aligned} F^{m,n}_\gamma &= P^{n,0}\Omega(\varphi,\eta) \\ &+ c.4P^{n,1}\Omega(\varphi-1,\eta) \\ &+ c^2[4^2 P^{n,2}\Omega(\varphi-2,\eta) - 2.4P^{n,1}\Omega(\varphi-1,\eta)] \\ &+ c^3[4^3 P^{n,3}\Omega(\varphi-3,\eta) - 4.4^2 P^{n,2}\Omega(\varphi-2,\eta) + \frac{2.3}{1.2} 4P^{n,1}\Omega(\varphi-1,\eta)] \\ &+ \text{и т. д.} \end{aligned} \tag{107}$$

Если положимъ

$$F^{m,n}_\gamma = K_0(n,m,\gamma) + c.K_1(n,m,\gamma) + c^2 K_2(n,m,\gamma) + \cdots\cdots \tag{108}$$

то, какъ видимъ изъ выраженія (107), коеффиціенты при различныхъ степеняхъ c будутъ заключаться въ формѣ

$$K_i(n,m,\gamma) = Q^n_{i,0}\,\Omega(\varphi-i,\eta) - Q^n_{i,1}\,\Omega(\varphi-i+1,\eta) + Q^n_{i,2}\,\Omega(\varphi-i+2,\eta) - \cdots \tag{109}$$

Что касается до производителей $Q^n_{i,0}$, $Q^n_{i,1}$ и т. д., то всѣ они заключаются въ формѣ

$$Q^n_{i,\mu} = 4^{i-\mu}\,\frac{(2i-2\mu)(2i-2\mu+1)\ldots\ldots(2i-\mu-1)}{1.2\ldots\ldots\mu}\,P^{n,i-\mu}$$

гдѣ по общему правилу дробь

$$\frac{(2i-2\mu)(2i-2\mu+1)\ldots\ldots(2i-\mu-1)}{1.2.3\ldots\ldots\mu}$$

для $\mu = 0$ принимается равною единицѣ; для $\mu = 1$ изъ этой дроби долженъ быть удержанъ только первый производитель, для $\mu = 2$ — два первыхъ производителя и т. д.

По принятому означенію рядъ (109) представляется въ видѣ

$$K_i(n,m,\gamma) = Q^n_{i,0}\,\Omega(\lambda,\eta) - Q^n_{i,1}\,\Omega(\lambda+1,\eta) + Q^n_{i,2}\,\Omega(\lambda+2,\eta) - \cdots\cdot \qquad (109_*)$$

или по означенію (106) въ видѣ

$$K_i(n,m,\gamma) = \int_0^\infty \left\{Q^n_{i,0} - Q^n_{i,1}(1+y) + Q^n_{i,2}(1+y)^2 - \cdots\cdot\right\}(1+y)^\lambda e^{-\eta y} dy.$$

Это выраженіе можно представить еще въ формѣ

$$K_i(n,m,\gamma) = \int_0^\infty (1+y)^\lambda e^{-\eta y} dy.\sum_{k=0}^{k=\infty} (\pm 1)^k\, Q^n_{i,k}\,(1+y)^k.$$

но

$$(1+y)^k = 1 + ky + \frac{k(k-1)}{1.2}\,y^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\cdot y^3 + \cdots\cdots\cdot;$$

слѣдовательно

$$K_i(n,m,\gamma) = \int_0^\infty (1+y)^\lambda e^{-\eta y}\,dy \sum_{k=0}^{k=\infty} (\pm 1)^k\, Q^n_{i,k}\left[1 + ky + \frac{k(k-1)}{1.2}\cdot y^2 + \cdots\right]$$

при $k = 0$ изъ всей суммы получается одинъ только членъ $+Q^n_{i,0}$. Полагая $k = 1, 2, 3, 4\ldots\ldots$, найдемъ, что сумма, входящая въ предыдущій интегралъ, для этихъ значеній k будетъ представляться слѣдующими конечными выраженіями

$$- Q^n_{i,1}(1+y)$$

$$+ Q^n_{i,2}\left(1 + 2y + \frac{2.1}{1.2}\,y^2\right)$$

$$- Q^n_{i,3}\left(1 + 3y + \frac{3.2}{1.2}\,y^2 + \frac{3.2.1}{1.2.3}\,y^3\right)$$

$$+ Q^n_{i,4}\left(1 + 4y + \frac{4.3}{1.2}\,y^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3}\,y^3 + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}\,y^4\right) \text{ и т. д.}$$

а потому собирая въ выраженіи $K_i(n, m, \gamma)$ члены съ одинакими степенями y, находимъ

$$K_i(n, m, \gamma) = \int_0^\infty \left\{ Q^n_{i,0} - Q^n_{i,1} + Q^n_{i,2} - Q^n_{i,3} + \cdots \right\} (1+y)^\lambda e^{-\eta y} . dy$$

$$- \int_0^\infty \left\{ Q^n_{i,1} - 2Q^n_{i,2} + 3Q^n_{i,3} - 4Q^n_{i,4} + \cdots \right\} y(1+y)^\lambda e^{-\eta y} . dy$$

$$+ \int_0^\infty \left\{ \frac{2.1}{1.2} Q^n_{i,2} - \frac{3.2}{1.2} Q^n_{i,3} + \frac{4.3}{1.2} Q^n_{i,4} - \cdots \right\} y^2 (1+y)^\lambda e^{-\eta y} . dy$$

— и т. д.

Очевидно что всѣ ряды заключающіеся въ скобкахъ содержатся въ одной общей формѣ вида

$$R^n_{i,\nu} = Q^n_{i,\nu} - (\nu+1)\, Q^n_{i,\nu+1} + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{1.2}\, Q^n_{i,\nu+2} - \cdots\cdots$$

слѣдовательно

$$K_i(m, n, \gamma) = R^n_{i,0} \int_0^\infty (1+y)^\lambda e^{-\eta y} . dy$$

$$- R^n_{i,1} \int_0^\infty y(1+y)^\lambda e^{-\eta y} . dy + R^n_{i,2} \int_0^\infty y^2 (1+y)^\lambda e^{-\eta y} . dy - \cdots\cdots$$

но помня, что

$$- \int_0^\infty y\,(1+y)^\lambda e^{-\eta y}\, dy = \frac{d\,\Omega(\lambda, \eta)}{d\eta}$$

$$+ \int_0^\infty y^2 (1+y)^\lambda e^{-\eta y}\, dy = \frac{d^2\,\Omega(\lambda, \eta)}{d\eta^2}$$

$$- \int_0^\infty y^3 (1+y)^\lambda e^{-\eta y}\, dy = \frac{d^3\,\Omega(\lambda, \eta)}{d\eta^3}$$

и т. д.

представимъ предыдущее въ видѣ

$$K_i(m, n, \gamma) = R^n_{i,0}\, \Omega(\eta,\lambda) + R^n_{i,1} \frac{d\,\Omega(\eta,\lambda)}{d\eta} + R^n_{i,2} \frac{d^2\Omega(\eta,\lambda)}{d\eta^2} + \ldots\ldots$$

Всѣми этими разложеніями величина $A^{(n)}$ представляется въ видѣ ряда расположеннаго по степенямъ c. Величины p, p^2 и т. д., входящія въ выраженіе рефракціи (103), также съ выгодою могутъ быть разложены по степенямъ c.

Мы положили

$$q = \frac{4\,c}{(1+c)^2} \qquad (110)$$

а потому коэффиціентъ выраженія (103) можетъ быть приведенъ къ виду

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{q}{2\omega}} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{\omega}}\,\frac{\sqrt{c}}{1+c}$$

но по второму изъ выраженій (101) легко находимъ

$$1 - q = \frac{\cos^2 z}{\cos^2 z + 2\omega\sin^2 z}$$

съ другой стороны изъ выраженія (110) имѣемъ

$$1 - q = \left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2$$

слѣдовательно

$$\frac{\cos^2 z}{\cos^2 z + 2\omega\sin^2 z} = \left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2 \qquad (111)$$

Изъ сравненія втораго изъ выраженія (101) съ выраженіемъ (110) имѣемъ

$$\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z + 2\omega\sin^2 z} = \frac{2c}{\omega(1+c)^2}$$

складывая это съ предыдущимъ, находимъ

$$\frac{1}{\cos^2 z + 2\omega\sin^2 z} = \frac{2c + \omega(1-c)^2}{\omega(1+c)^2}$$

Придавая и вычитая въ числителѣ второй части этого уравненія по $2c\omega$, легко выводимъ

$$\frac{1}{\cos^2 z + 2\omega\sin^2 z} = 1 + \frac{2c(1-2\omega)}{\omega(1+c)^2}$$

или полагая здѣсь

$$2\,\frac{1-2\omega}{\omega} = \beta' \qquad (112)$$

приводимъ предыдущее къ виду

$$\frac{1}{\cos^2 z + 2\omega\sin^2 z} = 1 + \beta'\,\frac{c}{1+c^2}$$

посредствомъ этого по первому изъ выраженій (101) находимъ

$$p = 2\alpha\left[1 + \frac{\beta' c}{(1+c)^2}\right]$$

$$p^2 = 4\alpha^2\left[1 + \frac{2\beta' c}{(1+c)^2} + \frac{\beta'^2 c^2}{(1+c)^4}\right]$$

и т. д.

Такимъ образомъ выраженіе (103) рефракціи можетъ быть представлено въ видѣ

(113) $$\delta z = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{\omega}}\frac{\sqrt{c}}{1+c}\Big\{A^{(0)} + \alpha A^{(1)}\left[1 + \frac{\beta' c}{(1+c)^2}\right] + \frac{3}{2}\alpha^2 . A^{(2)}\left[1 + \frac{2\beta' c}{(1+c)^2} + \frac{\beta'^2 . c^2}{(1+c)^4}\right] + \cdots\cdots\Big\}$$

Если положимъ для краткоств

(114) $$R^{(0)} = \sqrt{\frac{2c}{\omega}}\frac{A^{(0)}}{1+c}$$

$$R^{(1)} = \sqrt{\frac{2c}{\omega}}\frac{A^{(1)}}{1+c}\left[1 + \frac{\beta' c}{(1+c)^2}\right]$$

и т. д.

то приведемъ предыдущее къ виду

(115) $$\delta z = \frac{\alpha}{1-\alpha}\Big\{R^{(0)} + \alpha R^{(1)} + \alpha^2 R^{(2)} + \cdots\Big\}$$

14. Опредѣленіе коеффиціевтовъ найденнаго теперь выраженія рефракціи приводится къ вычисленіе функціи $\Omega(\lambda,\eta)$, а потому покажемъ какимъ образомъ можетъ быть взятъ тотъ интегралъ отъ котораго зависитъ эта функція. Если λ есть величина положительная, то интегрированіе не представляетъ никакихъ трудностей. Выполняя въ выраженіи (106) интегрированіе по частямъ, находимъ

$$\Omega(\lambda,\eta) = \frac{1}{\eta} + \frac{\lambda}{\eta}\int_0^\infty (1+y)^{\lambda-1} e^{-\eta y}\, dy$$

или

(116) $$\Omega(\lambda,\eta) = \frac{1}{\eta} + \frac{\lambda}{\eta}\,\Omega(\lambda-1,\eta)$$

подобнымъ же образомъ найдемъ

$$\Omega(\lambda-1,\eta) = \int_0^\infty (1+y)^{\lambda-1} e^{-\eta y}\, dy = \frac{1}{\eta} + \frac{\lambda-1}{\eta}\int_0^\infty (1+y)^{\lambda-2} e^{-\eta y}\, dy$$

слѣдовательно

$$\Omega(\lambda,\eta)=\frac{1}{\eta}+\frac{\lambda}{\eta^2}+\frac{\lambda(\lambda-1)}{\eta^2}\,\Omega(\lambda-2,\eta)$$

а потому

$$\Omega(\lambda,\eta)=\frac{1}{\eta}+\frac{\lambda}{\eta^2}+\frac{\lambda(\lambda-1)}{\eta^3}+\cdots\cdots \tag{117}$$

Посредствомъ этого ряда, довольно быстро сходящагося, мы можемъ вычислить функцію $\Omega(\lambda,\eta)$ для всѣхъ положительныхъ значеній λ. Въ случаѣ отрицательнаго λ, т. е. въ случаѣ вычисленія функціи $\Omega(-\lambda,\eta)$, прилагая тотъ же пріемъ интегрированію по частямъ, находимъ такой знако-перемѣнный рядъ

$$\Omega(-\lambda,\eta)=\frac{1}{\eta}-\frac{\lambda}{\eta^2}+\frac{\lambda(\lambda+1)}{\eta^3}-\ldots\pm\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+\nu-2)}{\eta^\nu}$$

$$\mp\frac{\lambda(\lambda+1)\ldots\ldots(\lambda+\nu-1)}{\eta^\nu}\int_0^\infty\frac{e^{-\eta y}\,.\,dy}{(1+y)^{\lambda+\nu}} \tag{118}$$

Легко показать, что въ этомъ ряду каждый послѣдующій членъ менѣе предыдущаго. Въ самомъ дѣлѣ на основаніи извѣстнаго положенія

$$\int_0^\infty\frac{e^{-\eta y}\,dy}{(1+y)^{\lambda+\nu}}<\int_0^\infty\frac{dy}{(1+y)^{\lambda+\nu}}$$

но независимо отъ знака

$$\int_0^\infty\frac{dy}{(1+y)^{\lambda+\nu}}=\frac{1}{\lambda+\nu-1}$$

слѣдовательно

$$\int_0^\infty\frac{e^{-\eta y}\,dy}{(1+y)^{\lambda+\nu}}<\frac{1}{\lambda+\nu-1}.$$

умножая обѣ части этого неравенства на

$$\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots\ldots(\lambda+\nu-2)(\lambda+\nu-1)}{\eta^\nu}$$

находимъ

$$\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots\ldots(\lambda+\nu-1)}{\eta^\nu}\int_0^\infty\frac{e^{-\eta y}\,dy}{(1+y)^{\lambda+\nu}}<\frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+\nu-2)}{\eta^\nu}.$$

Этимъ неравенствомъ и представляется то, что мы имѣли въ виду доказать.

Во всякомъ случаѣ если рядъ (118) и есть сходящійся, то эта сходимость такъ медлена, что пользоваться выраженіемъ (118) для вычисленія функціи $\Omega(-\lambda, \eta)$ весьма неудобно; а потому для опредѣленія этой функціи необходимо употребить другой пріемъ.

Для отрицательнаго значенія λ функція $\Omega(\lambda, \eta)$ имѣетъ видъ

$$\Omega(-\lambda, \eta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\eta y}\, dy}{(1+y)^\lambda}$$

Введемъ въ подъ интегральную функцію новое перемѣнное u подъ условіемъ

$$u = e^{-\eta(1+y)}$$

тогда

$$-\eta(1+y) = \lg u; \qquad (1+y) = -\frac{\lg u}{\eta}; \qquad (1+y)^\lambda = \frac{[-\lg u]^\lambda}{\eta^\lambda}$$

$$e^{-\eta y} = u \cdot e^\eta; \qquad du = -e^{-\eta(1+y)}\eta \cdot dy; \qquad dy = -\frac{du}{\eta \cdot u}$$

что касается до предѣловъ интеграла по новому перемѣнному, то замѣтимъ, что при $y = 0$, $u = e^{-\eta}$, а при $y = \infty$; $u = 0$, по этому низшимъ предѣломъ интеграла будетъ функція $e^{-\eta}$, а высшимъ—нуль. И такъ

$$\Omega(-\lambda, \eta) = \eta^{\lambda-1} e^\eta \int_0^{e^{-\eta}} \frac{du}{[-\lg u]^\lambda}$$

На основаніи тождества

$$\lg u = r\eta \left\{ \lg \left[1 - (1 - u^{\frac{1}{r\eta}}) \right] \right\}$$

предыдущее представляется въ видѣ

$$\Omega(-\lambda, \eta) = \frac{e^\eta}{\eta . r^\lambda} \int_0^{e^{-\eta}} \frac{du}{\left\{ -\lg \left[1 - (1 - u^{\frac{1}{r\eta}}) \right] \right\}^\lambda}$$

Для интегрированія введемъ сюда новое перемѣнное подъ условіемъ

$$u^{\frac{1}{r\eta}} = \gamma x$$

и будемъ величиною γ располагать такъ, чтобы высшій предѣлъ интеграла преобра-

зованнаго по x былъ единица; положимъ кромѣ того $r\eta = \mu$, тогда

$$u = \gamma^{\mu} x^{\mu}$$

слѣдовательно

$$du = \mu\gamma^{\mu} x^{\mu-1} dx$$

Для назначенія предѣловъ интеграла по новому перемѣнному, замѣтимъ, что при $u = 0$ и $x = 0$, а при $u = e^{-\eta}$ для опредѣленія x имѣемъ уравненіе

$$e^{-\eta} = \gamma^{\mu} x^{\mu}$$

откуда заключаемъ, что высшій предѣлъ интеграла по x будетъ

$$x = \frac{e^{-\frac{\eta}{\mu}}}{\gamma}$$

Чтобы этотъ предѣлъ былъ равенъ единицѣ необходимо, чтобы

$$\gamma = e^{-\frac{\eta}{\mu}}$$

слѣдовательно $\gamma^{\mu} = e^{-\eta}$; послѣ этого легко уже находимъ, что функція $\Omega(-\lambda, \eta)$ преобразованная по перемѣнному x будетъ

$$\Omega(-\lambda, \eta) = \left(\frac{\eta}{\mu}\right)^{\lambda-1} \int_0^1 \frac{x^{\mu-1} dx}{\left\{-\lg\left[1-(1-\gamma x)\right]\right\}^{\lambda}} \tag{119}$$

Если положимъ для краткости $1 - \gamma x = \zeta$, то

$$\left\{-\lg\left[1-(1-\gamma x)\right]\right\}^{-\lambda} = \left\{-\lg(1-\zeta)\right\}^{-\lambda} = \zeta^{-\lambda}\left\{1 + \frac{\zeta}{2} + \frac{\zeta^2}{3} + \cdots\right\}^{-\lambda}$$

Положимъ, что

$$\left\{1 + \frac{\zeta}{2} + \frac{\zeta^2}{3} + \cdots\right\}^{-\lambda} = \left\{1 + A_1^{\lambda}\zeta + A_2^{\lambda}\zeta^2 + \cdots\right\} \tag{120}$$

и опредѣлимъ постоянныя A_1^{λ}, A_2^{λ} и т. д. по способу неопредѣленныхъ коеффиціентовъ. Для этого возмемъ отъ обѣихъ частей предыдущаго уравненія неперовъ логариѳмъ и, дифференцируя его, получимъ

$$\frac{-\frac{\lambda}{2} - \frac{2\lambda}{3}\zeta - \frac{3\lambda}{4}\zeta^2 - \frac{4\lambda}{5}\zeta^3 - \cdots}{1 + \frac{\zeta}{2} + \frac{\zeta^2}{3} + \frac{\zeta^3}{4} + \frac{\zeta^4}{5} + \cdots} = \frac{A_1^{\lambda} + 2A_2^{\lambda}\zeta + 3A_3^{\lambda}\zeta^2 + 4A_4^{\lambda}\zeta^3 + \cdots}{1 + A_1^{\lambda}\zeta + A_2^{\lambda}\zeta^2 + A_3^{\lambda}\zeta^3 + \cdots}$$

откуда чрезъ умноженіе легко находимъ

$$-\frac{\lambda}{2}-\frac{2\lambda}{3}\zeta-\frac{3\lambda}{4}\zeta^2-\frac{4\zeta}{5}\zeta^3-\cdots\cdots=A_1^{\lambda}+\frac{A_1^{\lambda}}{2}\zeta+\frac{A_1^{\lambda}}{3}\zeta^2+\frac{A_1^{\lambda}}{4}\zeta^3+\cdots$$

$$-\frac{\lambda A_1^{\lambda}}{2}\zeta-\frac{2\lambda A_1^{\lambda}}{3}\zeta^2-\frac{3\lambda A_1^{\lambda}}{4}\zeta^3-\cdots \qquad +2A_2^{\lambda}\zeta+\frac{2A_2^{\lambda}}{2}\zeta^2+\frac{2}{3}A_2^{\lambda}\zeta^3+\cdots$$

$$-\frac{\lambda A_2^{\lambda}}{2}\zeta-\frac{2\lambda A_2^{\lambda}}{3}\zeta^3-\cdots \qquad +3A_3^{\lambda}\zeta^2+\frac{3A_3^{\lambda}}{2}\zeta^3+\cdots$$

$$-\frac{\lambda A_3^{\lambda}}{2}\zeta^3-\cdots \qquad +4A_4^{\lambda}\zeta^3+\cdots$$

Сравнивая въ этомъ тождественномъ уравненіи коэффиціенты при одинакихъ степеняхъ перемѣннаго, получимъ

$$A_1^{\lambda}=-\frac{\lambda}{2}$$

(121) $$A_2^{\lambda}=-\frac{1}{2\,.\,2}(\lambda+1)A_1^{\lambda}-\frac{1}{2\,.\,3}2\lambda$$

$$A_3^{\lambda}=-\frac{1}{2\,.\,3}(\lambda+2)A_2^{\lambda}-\frac{1}{3\,.\,3}(2\lambda+1)A_1^{\lambda}-\frac{1}{3\,.\,4}\cdot 3\lambda$$

. . . .

Этимъ или другимъ способомъ мы всегда можемъ опредѣлить коэффиціенты разложенія (120), а потому всегда можемъ принять

$$\{-\lg[1-(1-\gamma x)]\}^{-\lambda}=(1-\gamma x)^{-\lambda}[1+A_1^{\lambda}(1-\gamma x)+A_2^{\lambda}(1-\gamma x)^2+\cdots]$$

Внося это въ выраженіе (119) и полагая для краткости

$$\chi(k,\mu)=\int_0^1 x^{\mu-1}(1-\gamma x)^k dx$$

Имѣемъ

(122) $$\Omega(-\lambda,\eta)=\left(\frac{\eta}{\mu}\right)^{\lambda-1}\left\{\chi(-\lambda,\mu)+A_1^{\lambda}\chi(-\lambda+1,\mu)+A_2^{\lambda}\chi(-\lambda+2,\mu)+\cdots\right\}$$

И такъ для вычисленія $\Omega(-\lambda,\eta)$ остается взять интегралъ

$$\chi(-\lambda,\mu)=\int_0^1 x^{\mu-1}(1-\gamma x)^{-\lambda}dx.$$

При выполненіи интегрированія представляются два случая: въ одномъ γ мало отличается отъ единицы, въ другомъ γ есть малая величина, а потому чтобы получить наиболѣе сходящійся рядъ для представленія функціи $\chi(-\lambda,\mu)$, употребимъ при интегрированіи два различные пріема.

Для интегрированія въ обоихъ случаяхъ мы введемъ новое перемѣнное z подъ условіемъ $1 - \gamma x = z$, откуда

$$x = \frac{1-z}{\gamma}; \qquad dx = -\frac{dz}{\gamma}$$

Что касается предѣловъ интеграла по новому перемѣнному, то замѣтимъ, что при $x = 0$, $z = 1$, а при $x = 1$, $z = 1 - \gamma$; и такъ низшимъ предѣломъ интеграла будетъ единица, а высшимъ $1 - \gamma$. Слѣдовательно

$$\chi(-\lambda,\mu) = \frac{1}{\gamma^\mu}\int_{1-\gamma}^{1} \frac{(1-z)^{\mu-1}}{z^\lambda}\, dz$$

Для того случая, когда γ есть малая величина, меньшая чѣмъ 0.5, будемъ выполнять интегрированіе по частямъ и легко найдемъ

$$\int \frac{(1-z)^{\mu-1} dz}{z^\lambda} = -\frac{(1-z)^\mu}{\mu} \cdot z^{-\lambda} - \frac{\lambda}{\mu}\int (1-z)^\mu \cdot z^{-(\lambda+1)} dz$$

Точно такимъ же образомъ послѣдовательно получимъ

$$\int \frac{(1-z)^\mu dz}{z^{(\lambda+1)}} = -\frac{(1-z)^{\mu+1}}{\mu+1} \cdot z^{-(\lambda+1)} - \frac{\lambda+1}{\mu+1}\int (1-z)^{\mu+1} z^{-(\lambda+2)} dz$$

$$\int \frac{(1-z)^{\mu+1} dz}{z^{(\lambda+2)}} = -\frac{(1-z)^{\mu+2}}{\mu+2} z^{-(\lambda+2)} - \frac{\lambda+2}{\mu+2}\int (1-z)^{\mu+2} z^{-(\lambda+3)} dz$$

и т. д.

а потому внося каждое послѣдующее выраженіе въ предыдущее, имѣемъ

$$\int \frac{(1-z)^{\mu-1} dz}{z^\lambda} = -\frac{1}{\mu}(1-z)^\mu \cdot z^{-\lambda}$$

$$+ \frac{\lambda}{\mu(\mu+1)}(1-z)^{\mu+1} \cdot z^{-(\lambda+1)} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\mu(\mu+1)(\mu+2)}(1-z)^{\mu+2} z^{-(\lambda+2)} + \dots\dots$$

$$\pm \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\dots\dots(\lambda+k-1)}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+k)}(1-z)^{\mu+k} z^{-(\lambda+k)}$$

$$\mp \frac{\lambda(\lambda+1)\dots\dots(\lambda+k)}{\mu(\mu+1)\dots\dots(\mu+k)}\int (1-z)^{\mu+k} z^{-(\lambda+k+1)} dz$$

Взявъ этотъ интегралъ между предѣлами $1 - \gamma$ и 1, получимъ

$$\int_{1-\gamma}^{1} \frac{(1-z)^{\mu-1}}{z^{\lambda}} \cdot dz =$$

$$\frac{\gamma^{\mu}}{\mu}(1-\gamma)^{-\lambda} - \frac{\lambda}{\mu(\mu+1)}\gamma^{\mu+1}(1-\gamma)^{-(\lambda+1)} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{\mu(\mu+1)(\mu+2)}\gamma^{\mu+2}(1-\gamma)^{-(\lambda+2)} - \ldots\ldots$$

$$\pm\frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+k)}\gamma^{\mu+k}(1-\gamma)^{-(\lambda+k)} \mp \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+k)}\int_{1-\gamma}^{1}(1-z)^{\mu+k} z^{-(\lambda+k+1)} dz$$

а потому если положимъ $1 - \gamma = \delta$, то

$$\chi(-\lambda,\mu) = \frac{1}{\mu\delta^{\lambda}}\left\{1 - \frac{\lambda}{(\mu+1)}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) + \frac{\lambda(\lambda+1)}{(\mu+1)(\mu+2)}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2 - \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^3 + \ldots\right.$$

$$\left.\pm\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+k-1)}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+k)}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^k\right\} \mp \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+k)}\gamma^{-\mu}\int_{1-\gamma}^{1}(1-z)^{\mu+k} z^{-(\lambda+k+1)} dz$$

чѣмъ менѣе γ, тѣмъ быстрѣе будетъ сходиться этотъ рядъ. Извѣстнымъ пріемомъ можно доказать, что членъ зависящій отъ не выполненнаго интеграла всегда менѣе предшествующаго ему члена. Для этого выразимъ послѣдній интегралъ по прежнему перемѣнному x и, не обращая вниманія на знакъ, получимъ

$$\int_{1-\gamma}^{1} \frac{(1-z)^{\mu+k}}{z^{(\lambda+k+1)}} \cdot dz = \gamma^{k+\mu+1}\int_{0}^{1} \frac{x^{k+\mu} dx}{(1-\gamma x)^{\lambda+k+1}}$$

но если предѣлами по перемѣнному x служатъ 0 и 1, то понятно что

$$\frac{x^{k+\mu}}{(1-\gamma x)^{\lambda+k+1}} < \frac{x^{k+\mu}}{(1-\gamma)^{\lambda+k+1}}.$$

а потому

$$\int_{1-\gamma}^{1}(1-z)^{\mu+k} z^{-(\lambda+k+1)} dz < \gamma^{k+\mu+1}\int_{0}^{1}\frac{x^{k+\mu} dx}{(1-\gamma)^{\lambda+k+1}}$$

или

$$\int_{1-\gamma}^{1}(1-z)^{\mu+k} z^{-(\lambda+k+1)} dz < \frac{\gamma^{k+\mu+1}}{(1-\gamma)^{\lambda+k+1}(k+\mu+1)}.$$

если умножимъ обѣ части неравенства на

$$\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots\ldots(\lambda+k)}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots\ldots(\mu+k)}\gamma^{-\mu}$$

то найдемъ

$$\frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+k)}\gamma^{-\mu}\int_{1-\gamma}^{1}\frac{(1-z)^{\mu+k}dz}{z^{(\lambda+k+1)}}<\left[\frac{1}{\mu\delta^{\lambda}}\right]\frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+k+1)}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{k+1}.$$

но понятно что при $\gamma<0{,}5$

$$\left[\frac{1}{\mu\delta^{\lambda}}\right]\frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k)}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+k+1)}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{k+1}<\left[\frac{1}{\mu\delta^{\lambda}}\right]\frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\gamma+k-1)}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+k)}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{k}$$

а слѣдовательно во всякомъ случаѣ

$$\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+k)}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+k)}\gamma^{-\mu}\int_{1-\gamma}^{1}\frac{(1-z)^{\mu+k}dz}{z^{(\lambda+k+1)}}<\left[\frac{1}{\mu\delta^{\lambda}}\right]\frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+k)}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{k}$$

что мы и хотѣли доказать.

Такимъ образомъ при $\gamma<0{,}5$ мы всегда можемъ представить функцію $\chi(-\lambda,\mu)$ сходящимся рядомъ вида

$$\chi(-\lambda,\mu)=\frac{1}{\mu\delta^{\lambda}}\left\{1-\frac{\lambda}{(\mu+1)}\cdot\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\lambda(\lambda+1)}{(\mu+1)(\mu+2)}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{2}-\ldots\ldots\right\}\qquad(123)$$

Если γ есть величина близкая къ единицѣ, то для вычисленія функціи

$$\chi(-\lambda,\mu)=\frac{1}{\gamma^{\mu}}\int_{1-\gamma}^{1}\frac{(1-z)^{\mu-1}}{z^{\lambda}}dz$$

Разложимъ $(1-z)^{\mu-1}$ по строкѣ Ньютона и будемъ интегрировать каждый членъ разложенія отдѣльно. Такъ какъ

$$(1-z)^{\mu-1}=$$

$$1-(\mu-1)z+\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2}z^{2}-\ldots+(-1)^{\lambda-1}\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda+1)}{1.2\ldots(\lambda-1)}z^{\lambda-1}$$

$$+(-1)^{\lambda}\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda)}{1.2\ldots\lambda}z^{\lambda}+(-1)^{\lambda+1}\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda-1)}{1.2.3\ldots(\lambda+1)}z^{\lambda+1}+\ldots$$

то

$$\int \frac{(1-z)^{\mu-1}}{z^{\lambda}}\,dz =$$

$$-\frac{z^{-(\lambda-1)}}{\lambda-1}+\frac{\mu-1}{\lambda-2}z^{-(\lambda-2)}-\ldots+(-1)^{\lambda-1}\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda+1)}{1.2\ldots(\lambda-1)}\lg z$$

$$+(-1)^{\lambda}\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda)}{1.2.3\ldots\lambda}z+(-1)^{\lambda+1}\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda-1)}{1.2.3\ldots(\lambda+1)}\frac{z^2}{2}+\ldots$$

Взявъ этотъ интегралъ между предѣлами δ и 1, гдѣ $\delta = 1-\gamma$, легко получимъ

$$\int_{\delta}^{1}\frac{(1-z)}{z^{\lambda}}dz=\frac{1}{\delta^{\lambda-1}}\left\{\frac{1}{\lambda-1}-\frac{\mu-1}{1}\frac{\delta}{\lambda-2}+\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2}\frac{\delta^2}{(\lambda-3)}-\ldots\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{\lambda-1}-\frac{\mu-1}{1}\frac{\delta}{\lambda-2}+\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2}\frac{1}{\lambda-3}-\ldots\right\}$$

$$+(-1)^{\lambda-1}\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda+1)}{1.2\ldots(\lambda-1)}\lg\left(\frac{1}{\delta}\right)+$$

$$+(-1)^{\lambda}\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda)}{1.2.3\ldots\lambda}\left\{1-\frac{\mu-\lambda-1}{\lambda+1}\frac{1}{2}+\frac{(\mu-\lambda-1)(\mu-\lambda-2)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\frac{1}{3}-\ldots\right\}$$

$$-(-1)^{\lambda}\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda)}{1.2.3\ldots\lambda}\delta\left\{1-\frac{\mu-\lambda-1}{\lambda+1}\frac{\delta}{2}+\frac{(\mu-\lambda-1)(\mu-\lambda-2)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\frac{\delta^2}{3}-\ldots\right\}$$

Положимъ для краткости

(124)
$$G(\theta)=\frac{1}{\lambda-1}-(\mu-1)\frac{\theta}{\lambda-2}+\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2}\frac{\theta^2}{\lambda-3}-\ldots$$
$$H(\theta)=\theta\left\{1-\frac{\mu-\lambda-1}{\lambda+1}\frac{\theta}{2}+\frac{(\mu-\lambda-1)(\mu-\lambda-2)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\frac{\theta^2}{3}-\ldots\right\}$$

Тогда предыдущій интегралъ представляется въ видѣ

$$\int_{\delta}^{1}\frac{(1-z)^{\mu-1}}{z^{\lambda}}dz=\frac{1}{\delta^{\lambda-1}}G(\delta)-G(1)+(-1)^{\lambda-1}\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda+1)}{1.2.3\ldots(\lambda-1)}\lg\left(\frac{1}{\delta}\right)$$

$$+(-1)^{\lambda}\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda)}{1.2.3\ldots\lambda}\left\{H(1)-H(\delta)\right\}$$

а потому въ случаѣ, когда γ мало разнится отъ единицы, или вообще въ случаѣ $\gamma > 0{,}5$ функція $\chi(-\lambda,\mu)$ должна быть вычислена по выраженію

(125)
$$\chi(-\lambda,\mu)=\frac{1}{\gamma^{\mu}}\left[\frac{G(\delta)}{\delta^{\lambda-1}}-G(1)+(-1)^{\lambda-1}\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda+1)}{1.2.3\ldots(\lambda-1)}\lg\left(\frac{1}{\delta}\right)\right.$$
$$\left.+(-1)^{\lambda}\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda)}{1.2.3\ldots\lambda}\left\{H(1)-H(\delta)\right\}\right]$$

Такимъ образомъ мы можемъ вычислять функцію $\chi(-\lambda,\mu)$ или по выраженію (123), или по выраженію (125). Однако этими пріемами достаточно опредѣлять величину разсматриваемой функціи только для одного какаго нибудь значеоія аргумента; всѣ другія значенія функціи, соотвѣтствующія другимъ величинамъ аргумента, найдутся тогда изъ весьма простаго соотношенія существующаго между значеніями функціи $\chi(\lambda,\mu)$ соотвѣтствующими различнымъ аргументамъ. Въ самомъ дѣлѣ представимъ функцію $\chi(\lambda,\mu)$ въ видѣ

$$\chi(\lambda,\mu)=\int_0^1 x^{\mu-1}(1-\gamma x)^{\lambda-1}(1-\gamma x)\,.\,dx$$

слѣдовательно

$$\chi(\lambda,\mu)=\int_0^1 x^{\mu-1}(1-\gamma x)^{\lambda-1}\,dx-\gamma\int_0^1 x^{\mu}(1-\gamma x)^{\lambda-1}\,.\,dx$$

или

$$\chi(\lambda,\mu)=\chi(\lambda-1,\mu)-\gamma\int_0^1 x^{\mu}(1-\gamma x)^{\lambda-1}\,dx$$

взявъ послѣдній интегралъ по частямъ, получимъ

$$\int x^{\mu}(1-\gamma x)^{\lambda-1}\,dx=-\frac{(1-\gamma x)^{\lambda}\,.\,x^{\mu}}{\lambda\gamma}+\frac{\mu}{\lambda\gamma}\int x^{\mu-1}(1-\gamma x)^{\lambda}\,.\,dx.$$

или

$$\int_0^1 x^{\mu}(1-\gamma x)^{\lambda-1}\,.\,dx=-\frac{(1-\gamma)^{\lambda}}{\gamma\lambda}+\frac{\mu}{\lambda\gamma}\cdot\chi(\lambda,\mu)$$

внося это въ выраженіе (124), найдемъ

$$\chi(\lambda,\mu)=\frac{(1-\gamma)^{\lambda}}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\chi(\lambda-1,\mu)\tag{127}$$

выраженіе справедливое какъ для положительныхъ, такъ и для отрицательныхъ значеній λ и не примѣнимое только въ томъ случаѣ, когда $\mu=-\lambda$. Уравненіемъ (127) мы и можемъ пользоваться для вычисленія значеній функціи $\chi(\lambda,\mu)$, соотвѣтствующихъ какимъ нибудь аргументамъ λ, какъ скоро извѣстно значеніе этой функціи соотвѣтствующее одному какому либо аргументу.

Остается сдѣлать еще одно замѣчаніе объ опредѣленіи функціи $\Omega(-\lambda,\mu)$ по уравненію (122). Если λ есть большое число, то опредѣленіе упомянутой функціи по выраженію (122) представляетъ то неудобство, что приходится вычислять функцію

$\Omega(-\lambda, \mu)$ по разностямъ большихъ чиселъ. Устранить это неудобство можно слѣдующимъ пріемомъ. Разсмотримъ отдѣльно нѣсколько первыхъ членовъ строки; означимъ для краткости постоянныя коеффиціенты этихъ членовъ чрезъ $A, B, C, D \ldots$, такъ что

$$A_1^\lambda = A, \quad A_2^\lambda = B, \quad A_3^\lambda = C \quad \text{и т. д.}$$

означимъ кромѣ того остальную часть строки чрезъ K. Если мы разсматриваемъ отдѣльно n первыхъ членовъ строки, то k будетъ представлять остальную сумму начиная съ $n+1$ члена, имѣющаго коефиціентомъ A_{n+1}^λ. Принимая такія означенія мы представимъ выраженіе (122) въ видѣ

$$\Omega(-\lambda, \eta) = \binom{\eta}{\mu}^{\lambda-1}\left[\chi(-\lambda, \mu) + A\chi(-\lambda+1, \mu) + B\chi(-\lambda+2, \mu) + \cdots\right] + K.$$

или въ видѣ

$$\Omega(-\lambda, \eta) = \binom{\eta}{\mu}^{\lambda-1}\int_0^1\left[\frac{x^{\mu-1}}{(1-\gamma x)^\lambda} + A\frac{x^{\mu-1}}{(1-\gamma x)^{\lambda-1}} + B\frac{x^{\mu-1}}{(1-\gamma x)^{\lambda-2}} + \cdots\right]dx + K.$$

Если приведемъ отдѣльныя дроби къ одному знаменателю и расположимъ строку по степенямъ γ, то получимъ выраженіе

(128)
$$\Omega(-\lambda, \eta) = \binom{\eta}{\mu}^{\lambda-1}\left\{M\int_0^1\frac{x^{\mu-1}dx}{(1-\gamma x)^\lambda} + N\gamma\int_0^1\frac{x^{\mu}dx}{(1-\gamma x)^\lambda}\right.$$
$$\left. + P\gamma^2\int_0^1\frac{x^{\mu+1}dx}{(1-\gamma x)^\lambda} + \cdots\right\} + K$$

гдѣ очевидно

(129)
$$\begin{aligned} M &= 1 + A + B + C + D + \cdots \\ -N &= A + 2B + 3C + 4D + \cdots \\ P &= B + 3C + 6D + \cdots \\ -Q &= C + 4D + \cdots \\ R &= D + \cdots \end{aligned}$$

Выраженіе (128) и слѣдуетъ предпочитать выраженіе (129) при вычисленіи функціи $\Omega(-\lambda, \eta)$ въ тѣхъ случаяхъ, когда λ есть большая величина. Что касается до интеграловъ входящихъ въ выраженіе (128), то они могутъ быть вычисляемы или посредствомъ строки (123), или посредствомъ строки (125).

Въ выраженіе (128) входятъ функціи $\chi(\lambda, \mu)$ различныхъ аргументовъ по μ между этими функціями также существуетъ нѣкоторая зависимость. Въ самомъ дѣлѣ

$$\int (1-\gamma x)^{-\lambda} x^{\mu-1} dx = \int (1-\gamma x)^{-\lambda-1} (1-\gamma x) x^{\mu-1} dx$$

$$= \int (1-\gamma x)^{-\lambda-1} x^{\mu-1} dx - \gamma \int x^{\mu} (1-\gamma x)^{-\lambda-1} . dx$$

выполняя эти интегралы по частямъ, имѣемъ

$$\int (1-\gamma x)^{-\lambda-1} x^{\mu-1} dx = \frac{x^{\mu-1}}{\gamma.\lambda (1-\gamma x)^{\lambda}} - \frac{\mu-1}{\gamma.\lambda} \int \frac{x^{\mu-2}}{(1-\gamma x)^{\lambda}} \cdot dx$$

$$\int (1-\gamma x)^{-\lambda-1} x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu}}{\gamma.\lambda (1-\gamma x)^{\lambda}} - \frac{\mu}{\gamma.\lambda} \int \frac{x^{\mu-1} . dx}{(1-\gamma x)^{\lambda}}$$

если внесемъ это въ предыдущее выраженіе, то легко получимъ

$$(\lambda-\mu) \int (1-\gamma x)^{-\lambda} x^{\mu-1} dx = \frac{x^{\mu-1} (1-\gamma x)}{\gamma (1-\gamma x)^{\lambda}} - \frac{\mu-1}{\gamma} \int \frac{x^{\mu-2} dx}{(1-\gamma x)^{\lambda}}$$

взявъ этотъ интегралъ между предѣлами 0 и 1, имѣемъ

$$\chi(-\lambda,\mu) = -\frac{1}{\gamma(\mu-\lambda)(1-\gamma)^{\lambda-1}} + \frac{\mu-1}{\gamma(\mu-\lambda)} \chi(-\lambda,\mu-1) \qquad (130)$$

этимъ соотношеніемъ и можно пользоваться для вычисленія функціи χ различныхъ аргументовъ по μ, когда значеніе функціи по одному какому нибудь аргументу извѣстно.

Мы видѣли что коеффиціенты $K_i(m, n, \gamma)$, входящіе въ выраженіе рефракціи, зависили отъ производныхъ функціи $\Omega(\eta, \lambda)$ взятыхъ по η, а потому намъ остается еще показать способъ, посредствомъ котораго могутъ быть находимы числовыя величины этихъ производныхъ.

Если возмемъ тождественное выраженіе

$$\int_0^\infty (1+y)^{\lambda+1} e^{-\eta y} dy = \int_0^\infty (1+y)^{\lambda} e^{-\eta y} dy + \int_0^\infty y (1+y)^{\lambda} e^{-\eta y} . dy$$

то по означенію (106) можетъ представить его въ видѣ

$$\Omega(\lambda+1,\eta) = \Omega(\lambda,\eta) - \frac{d\Omega(\lambda,\eta)}{d\eta}$$

откуда

$$\frac{d\Omega(\lambda,\eta)}{d\eta} = \Omega'(\lambda,\eta) = -\left\{ \Omega(\lambda+1,\eta) - \Omega(\lambda,\eta) \right\} \qquad (131)$$

дифференцируя это второй разъ по η, имѣемъ

$$\frac{d^2\Omega(\lambda,\eta)}{d\eta^2} = \Omega''(\lambda,\eta) = -\left\{ \Omega'(\lambda+1,\eta) - \Omega'(\lambda,\eta) \right\}$$

но на основаніи предыдущаго уравненія это представляется въ видѣ

(132) $\Omega''(\lambda,\eta) = \Omega(\lambda+2,\eta) - \Omega(\lambda+1,\eta) - [\,\Omega(\lambda+1,\eta) - \Omega(\lambda,\eta)\,]$

и т. д.

Такимъ образомъ мы видимъ, что составляя разности начальныхъ функцій Ω съ различными аргументами по λ, получимъ искомыя послѣдовательныя производныя взятыя отъ функціи Ω по аргументу η.

Замѣтимъ наконецъ, что между производными одинаковаго порядка взятыми по аргументу η, но зависящими отъ различныхъ аргументовъ по λ существуетъ зависимость. Въ самомъ дѣлѣ если обратимся къ выраженію (117), то изъ него находимъ

(133)
$$\frac{d\Omega(\lambda,\eta)}{d\eta} = \Omega'(\lambda,\eta) = -\frac{1}{\eta^2} - \frac{2\lambda}{\eta^3} - \frac{3\lambda(\lambda-1)}{\eta^4} - \ldots\ldots$$

Но тоже уравненіе (117) даетъ

(134)
$$\frac{1}{\eta}\,\Omega(\lambda,\eta) = \frac{1}{\eta^2} + \frac{\lambda}{\eta^3} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\eta^4}$$

а по предыдущему уравненію составляемъ

$$\frac{d\Omega(\lambda-1,\eta)}{\delta\eta} = \Omega'(\lambda-1,\eta) = -\frac{1}{\eta^2} - \frac{2(\lambda-1)}{\eta^3} - \frac{3(\lambda-1)(\lambda-2)}{\eta^4} - \ldots\ldots$$

откуда находимъ

$$\frac{\lambda}{\eta}\,\Omega'(\lambda-1,\eta) = -\frac{\lambda}{\eta^3} - \frac{2\lambda(\lambda-1)}{\eta^4} - \ldots\ldots$$

вычитая это выраженіе изъ выраженія (134), получаемъ

$$\frac{1}{\eta}\,\Omega(\lambda,\eta) - \frac{\lambda}{\eta}\,\Omega'(\lambda-1,\eta) = \frac{1}{\eta^2} + \frac{2\lambda}{\eta^3} + \frac{3\lambda(\lambda-1)}{\eta^4} + \ldots\ldots$$

Сравнивая это съ выраженіемъ (133), имѣемъ

(135)
$$\Omega'(\eta,\lambda) = -\frac{1}{\eta}\,\Omega(\lambda,\eta) + \frac{\lambda}{\eta}\,\Omega'(\lambda-1,\eta).$$

Это и есть то соотношеніе, о которомъ мы говорили.

Если возмемъ вторую производную отъ выраженія (117) по η, то рядомъ соображеній, подобныхъ тому, какія мы теперь дѣлали, найдемъ соотношеніе между вторыми производными взятыми по η отъ функціи Ω для различныхъ значеній аргумента λ.

15. Многія величины входящія въ выраженія рефракціи (103) или (113) измѣняются съ измѣненіемъ состоянія атмосферы. Чтобы вычислить по этимъ выраженіямъ величину рефракціи соотвѣтствующую данному состоянію атмосферы, мы должны обратить вниманіе на измѣненія упомянутыхъ величинъ. Для упрощенія вычисленія и здѣсь, совершенно подобно тому какъ сдѣлалъ Бессель, можно составить таблицы для вычисленія средней рефракціи и для перехода отъ этой послѣдней къ истинной.

Въ принятомъ теперь выраженіи закона уменьшенія температуры съ высотою мы находимъ три величины, которыя представляютъ состояніе атмосферы и должны

считаться независимыми перемѣнными. Эти три величины суть: температура t нижнихъ слоевъ воздуха, т. е. температура въ мѣстѣ наблюденія; давленіе воздуха въ мѣстѣ наблюденія, измѣряющееся барометрическою высотою b и уменьшеніе температуры по мѣрѣ возрастанія высоты опредѣляющееся величиною β. Сообразно съ этимъ для перехода отъ средней рефракціи къ истинной намъ предстоитъ опредѣлить три производныхъ

$$\frac{d\delta z}{dt}, \quad \frac{d\delta z}{db}, \quad \frac{d\delta z}{d\beta}.$$

Величины t, b, β входятъ неявно въ уравненіе (112), но содержатся въ величинахъ α, g, ω, β' и c слѣдующимъ образомъ: α зависитъ отъ t и b; количество g содержитъ t и β и наконецъ ω, β' и c зависятъ только отъ β. Слѣдовательно производныя, которыя намъ предстоитъ теперь вычислить, имѣютъ слѣдующій составъ

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta z}{dt} &= \frac{d\delta z}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\delta z}{dg}\cdot\frac{dg}{dt} \\
\frac{d\delta z}{db} &= \frac{d\delta z}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{db} \\
\frac{d\delta z}{d\beta} &= \frac{d\delta z}{dg}\cdot\frac{dg}{d\beta} + \frac{d\delta z}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{d\beta} + \frac{d\delta z}{d\beta'}\cdot\frac{d\beta'}{d\beta} + \frac{d\delta z}{dc}\cdot\frac{dc}{d\beta}
\end{aligned} \tag{136}$$

Опредѣлимъ сначала входящія сюда производныя отъ α, g, ω, β' и c по перемѣннымъ t, b, β.

Означимъ для отличія отъ введенной здѣсь c постоянную входящую въ выраженіе (39) чрезъ c' и примемъ

$$2\alpha = \frac{c'\rho_0}{1 + c'\rho_0}$$

Кромѣ того замѣтимъ, что, назвавъ чрезъ t_0 и B температуру и высоту барометра принимаемыя за нормальныя, по соотношенію между ρ и ρ_0 данному на стр. 78 имѣемъ,

$$\rho_0 = \frac{(\rho_0)\dfrac{b}{B}}{1 + m(t - t_0)}$$

Но такъ какъ c' есть малая величина, кромѣ того въ большинствѣ случаевъ не велика также и разность $t - t_0$, наконецъ и отклоненіе отъ единицы отношенія $\dfrac{b}{B}$ не значительно, то на основаніи соображеній высказанныхъ при выводѣ выраженія (83) можемъ принять

$$\alpha = \alpha_0 \frac{\rho}{(\rho_0)} = \frac{\dfrac{\alpha_0 b}{B}}{1 + m(t - t_0)}$$

откуда находимъ

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\dfrac{\alpha_0 b}{B}\cdot m}{[1 + m(t - t_0)]^2} = -\frac{\alpha m}{1 + m(t - t_0)}$$

или ограничиваясь первою степенью m, имѣемъ

(137) $$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha m$$

точно также было найдено

(138) $$\frac{d\alpha}{db} = \frac{\alpha}{b}$$

Мы приняли

$$\frac{a.\omega}{l} = g$$

гдѣ

$$\omega = \frac{2}{\beta}; \qquad l = l_0[1 + m(t - t_0)]$$

а потому

$$g = \frac{2a}{\beta l_0[1 + m(t - t_0)]}$$

откуда

(139) $$\frac{dg}{dt} = -gm; \qquad \frac{dg}{d\beta} = -\frac{g}{\beta} = -\frac{\omega g}{2}$$

Легко видѣть также, что

(140) $$\frac{d\omega}{d\beta} = -\frac{2}{\beta^2} = -\frac{\omega^2}{2}$$

Какъ видно изъ уравненія (112)

$$\beta' = \frac{2(1 - 2\omega)}{\omega} = \beta - 4$$

а потому

(141) $$\frac{d\beta'}{d\beta} = 1$$

Остается еще опредѣлить производную $\frac{dc}{d\beta}$, но c содержитъ β только въ зависимость отъ q, слѣдовательно

(142) $$\frac{dc}{d\beta} = \frac{dc}{dq} \cdot \frac{dq}{d\beta}$$

такъ какъ

$$q = \frac{4c}{(1 + c)^2}$$

то

(143) $$\frac{dc}{dq} = \frac{(1 + c)^3}{4(1 - c)}$$

что касается до производной $\frac{dq}{d\beta}$, то

$$\frac{dq}{d\beta} = \frac{dq}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{d\beta}$$

а дифференцируя второе изъ уравненій (101), имѣемъ

$$\frac{dq}{d\omega}=\frac{2\sin^2 z\,.\cos^2 z}{(\cos^2 z+2\omega\sin^2 z)^2}$$

внося это вмѣстѣ съ выраженіемъ (140) въ предыдущее, находимъ

$$\frac{dq}{d\beta}=-\frac{\omega^2\,.\sin^2 z\,.\cos^2 z}{(\cos^2 z+2\omega\,.\sin^2 z)^2}$$

послѣ умноженія втораго изъ уравненій (101) на уравненіе (111) имѣемъ

$$\frac{\omega\,.\sin^2 z\,.\cos^2 z}{(\cos^2 z+2\omega\,.\sin^2 z)^2}=\frac{2c\,(1-c)^2}{(1+c)^4}$$

а потому

$$\frac{dq}{d\beta}=-\frac{2\omega\,.\,c\,(1-c)^2}{(1+c)^4}.$$

внося это вмѣстѣ съ выраженіемъ (143) въ выраженіе (142), получимъ

$$\frac{dc}{d\beta}=-\frac{c\,(1-c)}{\beta\,(1+c)}. \qquad (144)$$

Послѣ этого переходимъ къ опредѣленію производныхъ $\frac{d\delta z}{d\alpha}$, $\frac{d\delta z}{dg}$ и т. д., входящихъ въ уравненія (136). При опредѣленіи этихъ производныхъ будемъ считать, какъ это сдѣлано при изложеніи соотвѣтствующей части методы Бесселя, производителя $(1-\alpha)$ за величину постоянную. При этомъ условіи изъ уравненія (115), находимъ

$$(1-\alpha)\frac{d\delta z}{d\alpha}=R^{(0)}+2\alpha\,R^{(1)}+3\alpha^2\,R^{(2)}+\cdots\cdots$$

откуда опредѣляется производная $\frac{d\delta z}{d\alpha}$. Представивъ уравненіе (103) въ видѣ

$$\delta z=\frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{q}{2\omega}}\sum P^{(n)}p^n A^{(n)}$$

гдѣ подъ $P^{(n)}$ разумѣемъ извѣстные биноміальные коэффиціенты, замѣтимъ что δz содержитъ g только въ зависимости отъ $A^{(n)}$, а потому

$$\frac{d\delta z}{dg}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{q}{2\omega}}\sum P^{(n)}p^n\frac{dA^{(n)}}{dg}$$

Такъ какъ $\underset{\gamma}{F}^{n,n}$ содержитъ g, то изъ выраженія (104) получаемъ

$$\frac{dA^{(n)}}{dg}=\underset{2}{F}^{n,0}-n\underset{2}{F}^{n,1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\underset{2}{F}^{n,2}-\cdots\cdots$$

$$+g\left[\frac{d\underset{2}{F}^{n,0}}{dg}-n\frac{d\underset{2}{F}^{n,1}}{dg}+\frac{n(n-1)}{1.2}d\underset{2}{F}^{n,2}-\cdots\right]$$

$$-2\left[\frac{d\underset{1}{F}^{n,0}}{dg}-n\frac{d\underset{1}{F}^{n,1}}{dg}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d\underset{1}{F}^{n,2}}{dg}-\cdots\right]$$

Наконецъ для опредѣленія производной $\frac{dF_\gamma^{n,m}}{dg}$ обратимся къ уравненію (108) и изъ него находимъ

$$\frac{dF_\gamma^{n,m}}{dg} = \frac{dK_0(n,m,\gamma)}{dg} + c\,\frac{dK_1(n,m,\gamma)}{dg} + c^2\,\frac{dK_2(n,m,\gamma)}{dg} + \cdots\cdots$$

но по уравненіе (109*) имѣемъ

$$\frac{dK_i\,(n,m,\gamma)}{dg} = Q_{i,0}^{(n)}\,\frac{d\Omega\,(\lambda,\eta)}{d\eta}\;\frac{d\eta}{dg} - Q_{i,1}^{(n)}\,\frac{d\Omega\,(\lambda+1,\eta)}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{dg} - \cdots\cdots$$

такъ какъ

$$\eta = (m+1)\,g$$

то

$$\frac{d\eta}{dg} = (m+1)$$

слѣдовательно

$$\frac{dK_i\,(n,m,\gamma)}{dg} = (m+1)\,Q_{i,0}^{(n)}\,\Omega'(\lambda,\eta) - (m+1)\,Q_{i,1}^{(n)}\,\Omega'(\lambda+1,\eta) + \cdots\cdots$$

Чтобы взять производныя отъ δz взятыя по c и ω расположимъ выраженіе (113) по степенямъ c и представимъ его въ видѣ

$$(145)\qquad \delta z = \sqrt{\frac{2}{\omega}}\left[C^{(0)}\,c^{\frac{1}{2}} + C^{(1)}\,c^{\frac{3}{2}} + C^{(2)}.\,c^{\frac{5}{2}} + \cdots\cdots\right]$$

Чтобы опредѣлить форму коеффиціентовъ $C^{(0)}$, $C^{(1)}$ и т. д. обратимся къ выраженіе (103), имѣющему видъ

$$\delta z = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{q}{2\omega}}\left\{A^{(0)} + \frac{1}{2}pA^{(1)} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\,.\,2}p^2A^{(2)} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}p^3A^{(3)} + \cdots\cdots\right\}$$

откуда послѣ исключенія q посредствомъ соотношенія

$$q = \frac{4c}{(1+c)^2}$$

имѣемъ

$$(A)\qquad \delta z = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{\omega}}\,\frac{\sqrt{c}}{1+c}\left\{A^{(0)} + \frac{1}{2}pA^{(1)} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\,.\,2}p^2.A^{(2)} + \cdots\cdots\right\}$$

но такъ какъ

$$p = 2\alpha\left[1 + \frac{\beta' c}{(1+c)^2}\right],$$

то

$$p^n = (2\alpha)^n\left[1 + n\,\frac{\beta' c}{(1+c)^2} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,\frac{\beta'^2 c^2}{(1+c)^4} + \cdots\cdots\right]$$

Слѣдовательно

$$\frac{p^n}{(1+c)}=(2\alpha)^n\left[\frac{1}{1+c}+n\frac{\beta' c}{(1+c)^3}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\beta'^2.c^2}{(1+c)^5}+\cdots\cdots\right]$$

Что очевидно представляется также въ формѣ

$$\frac{p^n}{1+c}=(2\alpha)^n\left\{\left[1-c+c^2-c^3+\cdots\right]\right.$$
$$+n\beta' c\left[1-3c+\frac{3.4}{1.2}c^2-\frac{3.4.5}{1.2.3}c^3+\cdots\right]$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\beta'^2c^2\left[1-5c+\frac{5.6}{1.2}c^2-\frac{5.6.7}{1.2.3}c^3+\cdots\right]$$
$$\left.+\cdots\cdots\cdots\cdots\right\},$$

давая въ этомъ выраженіи n послѣдовательно всѣ цѣлыя значенія, начиная отъ единицы и внося получаемыя такимъ образомъ величины въ отдѣльные члены ряда (A), находимъ

$$\delta z=\frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{\omega}}\sqrt{c}\left\{A^{(0)}+a_1^{(0)}A^{(1)}+a_2^{(0)}A^{(2)}+a_3^{(0)}A^{(3)}+\cdots\right.$$
$$-c\left[A^{(0)}+a_1^{(1)}A^{(1)}+a_2^{(1)}A^{(2)}+a_3^{(1)}A^{(3)}+\cdots\right]$$
$$+c^2\left[A^{(0)}+a_1^{(2)}A^{(1)}+a_2^{(2)}A^{(2)}+a_3^{(2)}A^{(3)}+\cdots\right] \qquad (B)$$
$$-c^3\left[A^{(0)}+a_1^{(3)}A^{(1)}+a_2^{(3)}A^{(2)}+a_3^{(3)}A^{(3)}+\cdots\right]$$
$$\left.+\cdots\cdots\cdots\cdots\right\}$$

гдѣ, какъ легко видѣть

$$a_n^{(0)}=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\frac{(2\alpha)^n}{1.2\ldots.n}$$

$$a_n^{(1)}=a_n^{(0)}\left[1-n\beta'\right]$$

$$a_n^{(2)}=a_n^{(0)}\left[1-3.n\beta'+\frac{(n-1)n}{1.2}\beta'^2\right]$$

$$a_n^{(3)}=a_n^{(0)}\left[1-\frac{3.4}{1.2}n\beta'+\frac{(n-1)n}{1,2}5\beta'^2-\frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3}\beta'^3\right]$$

$$a_n^{(4)}=a_n^{(0)}\left[1-\frac{3.4.5}{1.2.3}n\beta'+\frac{(n-1).n}{1.2}\cdot\frac{5.6}{1,2}\beta'^2-\frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3}7\beta'^3\right.$$
$$\left.+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{1.2.3.4}\beta'^4\right]$$

и т. д.

Что касается до $A^{(0)}$, $A^{(1)}$ и т. д., то они сами суть функціи c и разложеніе этихъ коэффиціентовъ по степенямъ c представляется рядомъ, который получимъ, внося въ выраженіе (104) вмѣсто $\underset{\gamma}{F^{m,n}}$ его величину изъ выраженія (108). И такъ величина $A^{(n)}$ можетъ быть представлена въ видѣ

$$A^{(n)} = G_0^{(n)} + G_1^{(n)}c + G_2^{(n)}c^2 + \cdots\cdots$$

составъ коэффиціентовъ $G_0^{(n)}$ легко опредѣляется посредствомъ выраженій (104) и (108). И такъ

$$A^{(n)} = \sum_{l=0}^{l=\infty} G_l^{(n)} c^l$$

Такъ какъ выраженіе (B) имѣетъ видъ

$$\delta z = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{\omega}}\sqrt{c} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k c^k \sum_{n=0}^{n=\infty} A^{(n)} a_n^{(k)}$$

то коэффиціенты $C^{(0)}$, $C^{(1)}$ и т. д. ряда (145) найдутся изъ выраженія

$$\delta z = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{\omega}}\sqrt{c} \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{l=0}^{l=\infty} (-1)^k a_n^{(k)} G_l^{(n)} c^{k+l}$$

сравненіе котораго съ выраженіемъ (145) даетъ

$$C^{(0)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n^{(0)} G_0^{(n)}$$

$$C^{(1)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{n=0}^{n=\infty} [a_n^{(0)} G_1^{(n)} - a_n^{(1)} G_0^{(n)}]$$

$$C^{(2)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{n=0}^{n=\infty} [a_n^{(0)} G_2^{(n)} - a_n^{(1)} G_1^{(n)} + a_n^{(2)} G_0^{(n)}]$$

$$C^{(3)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{n=0}^{n=\infty} [a_n^{(0)} G_3^{(n)} - a_n^{(1)} G_2^{(n)} + a_n^{(2)} G_1^{(n)} - a_n^{(3)} G_0^{(n)}]$$

и т. д.

Замѣтимъ еще, что изъ состава выраженія (B) видно, что $a_0^{(k)} = 1$.

Изъ разложенія (145) имѣемъ

$$\frac{d\delta z}{d\omega} = -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\omega^{\frac{3}{2}}}\left[C^{(0)} c^{\frac{1}{2}} + C^{(1)} c^{\frac{3}{2}} + \cdots\cdots\right]$$

а слѣдовательно

$$\frac{d\delta z}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{d\beta}=\frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{2}{\omega}}\left\{C^{(0)}c^{\frac{1}{2}}+C^{(1)}c^{\frac{3}{2}}+\cdots\cdots\right\} \tag{146}$$

изъ выраженія (145) кромѣ того имѣемъ

$$\frac{d\delta z}{dc}=\frac{1}{2c}\sqrt{\frac{2}{\omega}}\left[C^{(0)}c^{\frac{1}{2}}+3\,C^{(1)}c^{\frac{3}{2}}+5\,C^{(2)}c^{\frac{5}{2}}+\cdots\cdots\right]$$

откуда обращая вниманіе на уравненіе (144), получаемъ

$$\frac{d\delta z}{dc}\frac{dc}{d\beta}=-\frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{2}{\omega}}\left(\frac{1-c}{1+c}\right)\left[C^{(0)}c^{\frac{1}{2}}+3\,C^{(1)}c^{\frac{3}{2}}+5\,C^{(2)}c^{\frac{5}{2}}+\cdots\cdots\right]$$

разлагая $\frac{1}{1+c}$ по строкѣ Ньютона, отсюда находимъ

$$\begin{aligned}\frac{d\delta z}{dc}\frac{dc}{d\beta}=-\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{2}{\omega}}\Big[&\frac{1}{2}\,C^{(0)}c^{\frac{1}{2}}\\ &+\left\{\frac{3}{2}\,C^{(1)}-C^{(0)}\right\}c^{\frac{3}{2}}\\ &+\left\{\frac{5}{2}\,C^{(2)}-3\,C^{(1)}+C^{(0)}\right\}c^{\frac{5}{2}}\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\Big]\end{aligned}$$

Если сложимъ это выраженіе съ выраженіемъ (140), то прямо имѣемъ

$$\begin{aligned}\frac{d\delta z}{d\omega}\frac{d\omega}{d\beta}+\frac{d\delta z}{dc}\frac{dc}{d\beta}=-\sqrt{\frac{2}{\omega}}\frac{\sqrt{c}}{\beta}\Big[&(C^{(1)}-C^{(0)})\,c\\ &+(2\,C^{(2)}-3\,C^{(1)}+C^{(0)})\,c^2\\ &+(3\,C^{(3)}-5\,C^{(2)}+3\,C^{(1)}-C^{(0)})\,c^3\\ &+\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\Big]\end{aligned} \tag{147}$$

и наконецъ изъ выраженія (113) находимъ

$$\frac{d\delta z}{d\beta'}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{\frac{2}{\omega}}\sqrt{c}\left[\frac{\alpha c}{(1+c)^3}\,A^{(1)}+3\alpha^2\left\{\frac{c}{(1+c)^3}+\frac{\beta' c^2}{(1+c)^5}\right\}A^{(2)}+\cdots\right] \tag{148}$$

Такимъ образомъ опредѣлены всѣ составныя части производныхъ (136), необходимыхъ для перехода отъ средней рефракціи къ истинной при данномъ состояніи атмосферы

Для составленія по изложенной теоріи таблицъ рефракціи Гильдейнъ руководствовался тѣми же соображеніями какъ и Бессель. Назовемъ чрезъ t_0, b_0, β_0 температуру въ мѣстѣ наблюденія, барометрическую высоту и значеніе величины β, соотвѣтствующія состоянію атмосферы, условно принятому за нормальное и означимъ

при этомъ чрезъ δz среднюю рефракцію вычисленную для постоянныхъ t_0, b_0 и β_0 по выраженію (115). Сдѣлавъ такія означенія, можемъ принять

$$\delta z = f(b_0, t_0, \beta_0)$$

подобно тому какъ истинная рефракція

$$r = f(b, t, \beta)$$

Пусть

$$b = b_0 + \Delta b, \qquad t = t_0 + \Delta t, \qquad \beta = \beta_0 + \Delta\beta$$

тогда

$$r = \delta z + \frac{d\delta z}{dt}(t - t_0) + \frac{d\delta z}{db}(b - b_0) + \frac{d\delta z}{d\beta}\Delta\beta.$$

Первые три члена тѣмъ же самымъ способомъ, какой употребилъ въ подобномъ случаѣ Бессель, могутъ быть приведены къ виду

$$\delta z (BT)^A . \gamma^\lambda$$

Такъ что

$$r = \delta z . \gamma^\lambda (BT)^A + \frac{d\delta z}{d\beta}\beta \cdot \frac{\Delta\beta}{\beta}$$

гдѣ какъ прежде

$$\lambda = -\frac{1}{m . \delta z}\frac{d\delta z}{dt}$$

$$A = -\frac{b_0}{\delta z}\frac{d\delta z}{db}$$

Представимъ предыдущее выраженіе истинной рефракціи въ видѣ

$$r = \delta z . \gamma^\lambda (BT)^A \left[1 + \frac{\beta}{N}\frac{d\delta z}{d\beta} \cdot \frac{\Delta\beta}{\beta}\right]$$

гдѣ

$$N = \delta z . \gamma^\lambda (BT)^A$$

Слѣдовательно

$$\lg r = \lg \delta z + A \lg (BT) + \lambda \lg \gamma + \lg\left[1 + \frac{\beta}{N}\frac{d\delta z}{d\beta}\frac{\Delta\beta}{\beta}\right]$$

Но разлагая послѣдній членъ въ рядъ и ограничиваясь первою степенью малой величины $\Delta\beta$, имѣемъ

$$\lg r = \lg \delta z + A \lg (BT) + \lambda \lg \gamma - \frac{\beta}{N}\frac{d\delta z}{d\beta}\frac{\Delta\beta}{\beta} \text{Mod.}$$

или

$$\lg r = \lg \delta z + \frac{b_0}{\delta z}\frac{d\delta z}{db}\lg (BT) - \frac{1}{m . \delta z}\frac{d\delta z}{dt}\lg \gamma - \frac{\beta}{N}\frac{d\delta z}{d\beta}\frac{\Delta\beta}{\beta} \cdot \text{Mod.}$$

Обращая вниманіе на уравненіе (136), приводимъ это къ виду

$$\lg r = \lg \delta z + \frac{b_0}{\delta z}\frac{d\delta z}{d\alpha}\frac{d\alpha}{db}\lg(BT) - \frac{1}{m.\delta z}\left[\frac{d\delta z}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\delta z}{dg}\frac{dg}{dt}\right]\lg\gamma - \frac{\beta}{N}\frac{d\delta z}{d\beta}\frac{\Delta\beta}{\beta}\cdot \text{Mod.}$$

обращая вниманіе на уравненія (137), (138) и первое изъ уравненій (139), отсюда имѣемъ

$$\lg r = \lg \delta z + \frac{\alpha}{\delta z}\frac{d\delta z}{d\alpha}\lg(BT) - \frac{1}{\delta z}\left[\alpha\frac{d\delta z}{d\alpha} + g\frac{d\delta z}{dg}\right]\lg\gamma - \frac{\beta}{N}\frac{d\delta z}{d\beta}\frac{\Delta\beta}{\beta}\ \text{Mod.}$$

Чтобы получить отсюда выраженіе истинной рефракціи въ той формѣ, для которой Гильдейнъ составилъ таблицы, придадимъ и вычтемъ въ предыдущемъ выраженіи члены $\lg(BT)$ и $\lg\gamma$, тогда выраженію $\lg r$ можемъ дать видъ

$$\lg r = \lg\delta z + \lg(B.T) + \left(\frac{\alpha}{\delta z}\frac{d\delta z}{d\alpha} - 1\right)\lg(B.T) + \lg\gamma$$
$$+ \left(\frac{\alpha}{\delta z}\frac{d\delta z}{d\alpha} - 1\right)\lg\gamma + \frac{g}{\delta z}\frac{d\delta z}{dg}\lg\gamma - \frac{\beta}{N}\frac{d\delta z}{d\beta}\frac{\Delta\beta}{\beta}\cdot\text{Mod.}$$

Если положимъ

$$\begin{aligned} R &= \delta z \\ S &= \alpha\frac{d\delta z}{d\alpha} - \delta z \\ T &= g\frac{d\delta z}{dg} \\ U &= -\beta\frac{d\delta z}{d\beta}\cdot\text{Mod} \end{aligned} \qquad (149)$$

то

$$\lg r = \lg\delta z + \lg(B.T) + \frac{S}{R}\lg(BT) + \lg\gamma + \frac{S}{R}\lg\gamma + \frac{T}{R}\lg\gamma + \frac{U}{N}\frac{\Delta\beta}{\beta}\,^{*)} \qquad (150)$$

но легко видѣть, что

$$1 + \frac{S}{R} = A$$

$$A + \frac{T}{R} = \lambda$$

а потому если положимъ еще

$$\delta z = \mu\,.\,\text{tang}\, z; \qquad \sigma = \frac{U}{N}$$

то выраженіе (150) представится въ видѣ

$$\lg r = \lg\mu + \lg\text{tang}\, z + A\left[\lg B + \lg T\right] + \lambda\,.\lg\gamma - \frac{\sigma\Delta\beta}{\beta} \qquad (151)$$

*) Въ послѣднемъ членѣ этого выраженія удовлетворительно принять $N = \delta z$, гдѣ подъ δz разумѣемъ среднюю рефракцію.

Для вычисленія истинной рефракціи по этому выраженію первоначально самъ Гильдейнъ, а потомъ астрономы Пулковской обсерваторіи составили таблицы рефракціи въ болѣе развитомъ видѣ. Таблицы вычисленныя Гильдейномъ помѣщены въ концѣ его мемуара Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre. Въ этихъ таблицахъ расположенныхъ по аргументу зенитнаго разстоянія даются величины $\lg \mu$, λ, A и σ. Отъ 0° до 30° аргументъ въ таблицахъ Гильдейна измѣняется отъ 5° до 5°, далѣе до 75° измѣненіе аргумента идетъ отъ 1° до 1° и наконецъ отъ 75° до 87° аргументъ измѣняется отъ 10′ до 10′. Величины $\lg \mu$ даны для всѣхъ значеній аргумента таблицъ, величины λ — для значеній аргумента, начиная съ 45° зенитнаго разстоянія, величины A — начиная съ 77° и наконецъ величины σ — начиная отъ 85°; но такъ какъ измѣненія величины β нельзя считать вполнѣ изслѣдованными, то при вычисленіи рефракціи по методѣ Гильдейна послѣдній членъ выраженія (151) приходится пока опускать *). Величины $\lg B$, $\lg T$ и $\lg \gamma$ даются въ двухъ особыхъ таблицахъ расположенныхъ по аргументу показаній барометра, внутренняго и внѣшняго термометра. Аргументъ, по которому даются величины $\lg B$, выраженъ въ двадцатыхъ доляхъ англійскаго дюйма; аргументъ же величинъ $\lg T$ и $\lg \gamma$ представленъ въ градусахъ Реомюрова термометра.

Таблицы вычисленныя по методѣ Гильдейна астрономами пулковской обсерваторіи изданы отдѣльно подъ заглавіемъ „Tabulae refractionum in usum Speculae pulcovensis congestae". Въ нихъ дается не только $\lg \mu$, но прямо $\lg \mu + \lg \operatorname{tg} z$ для зенитныхъ разстояній измѣняющихся отъ минуты до минуты въ предѣлахъ 0° и 90°. Въ этихъ болѣе развитыхъ таблицахъ величины λ, A и σ даны для табличныхъ значеній аргумента, начиная только съ 80° и притомъ сначала для каждыхъ пяти минутъ, а потомъ начиная съ 83° для всѣхъ табличныхъ значеній аргумента, т. е. отъ минуты до минуты.

Замѣтимъ наконецъ, что при вычисленіи таблицъ рефракціи по теоріи Гильдейна было принято

$$a = 3274720 \text{ туазовъ}$$

и здѣсь подъ a разумѣется меридіанный радіусъ кривизны для пулковской обсерваторіи. Далѣе было принято

$$l = 4235.63\,[1 + m\,(t - 7^\circ{,}44\,\mathrm{R})]$$
$$\beta = 120$$
$$g = 12.882608$$
$$\alpha = 0.00027985$$

Эта величина α выведена изъ пулковскихъ наблюденій и соотвѣтствуетъ 29,5966 англ. дюймамъ состоянія барометра и 7°,44 R состоянія термометра.

За величины аргумента η при вычисленіи функціи Ω были приняты

$$g, \quad 2g, \quad \text{и} \quad 3g$$

За аргументъ λ при вычисленіи функціи $\Omega(\lambda, g)$ принимались числа $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$. За тотъ же аргументъ при вычисленіи функціи

---

*) Если бы для большихъ зенитныхъ разстояній мы хотѣли ввести въ вычисленіе этотъ членъ, то для опредѣленія $\Delta\beta$ могли бы пользоваться выраженіемъ (A) nº 12; при этомъ за $\Delta\beta$ слѣдуетъ считать разность величины β вычисленной по выраженію (A) для дня наблюденія и значенія $\beta = 120$.

$\Omega(\lambda, 2g)$ были приняты числа $-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5$ и наконецъ при вычисленіи $\Omega(\lambda, 3g)$ принималось $\lambda = -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6$ и $+7$.

Чтобы пояснить на частномъ примѣрѣ употребленіе таблицъ рефракціи основанныхъ на теоріи предложенной Гильдейномъ, разсмотримъ тотъ же частный случай, который мы привели для поясненія Бесселевыхъ таблицъ рефракціи,—освободимъ отъ вліянія рефракціи видимое зенитное разстояніе равное $78^0\,25'\,35''$ найденное изъ наблюденій при показаніи барометра 773,5 миллим.,—внутренняго термометра $+18,3C$ и внѣшняго $+16,0R$. Для вычисленія рефракціи будемъ пользоваться пулковскими таблицами рефракціи (Tabulae refractionum in usum speculae pulcovensis congestae) и изъ нихъ по аргументу даннаго видимаго зенитнаго разстоянія находимъ

$$\lg\mu + \lg \operatorname{tg} z = 2.43768$$
$$\lambda = 1.0313$$
$$A = 1.0034$$
$$\sigma = 0.$$

Далѣе съ аргументомъ барометрическаго и термометрическихъ показаній находимъ

$$\lg B = +0.01253, \qquad \lg T = -0.00127, \qquad \lg\gamma = -0.01626 \text{ *)}$$

Слѣдовательно

$$A(\lg B + \lg T) = 0.01129; \qquad \lambda \lg\gamma = 0.01676$$

внося все это въ выраженіе (151), имѣемъ

$$\lg r = 2.43221; \qquad r = 270''.5 = 4'\,30''.5$$

Эта величина рефракціи весьма близко подходитъ къ той, которую мы нашли выше по методѣ Бесселя.

Что касается до величины рефракціи при горизонтѣ, то для полученія ея по теоріи Гильдейна обратимся къ выраженію (113). Какъ видно изъ уравненія

$$q = \frac{4c}{(1+c)^2}$$

для горизонта, гдѣ $z = 90^0$, $c = 1$; а потому вычисляя выраженіе (113) для принятыхъ значеній постоянныхъ и величины $c = 1$, находимъ горизонтальную рефракцію равною $2056''.9$ или $34'\,16''.9$; такая величина горизонтальной рефракціи гораздо болѣе согласается съ величиною выводимою изъ наблюденій, нежели таже величина, получающаяся по теоріи Бесселя.

16. Въ предыдущей главѣ мы показали какимъ образомъ по данному склоненію вычисляются времена восхожденія и захожденія свѣтила. Эти времена полученныя указаннымъ тамъ путемъ должны быть исправлены еще отъ вліянія рефракціи. Отъ рефракціи, какъ мы знаемъ, всѣ зенитныя разстоянія свѣтилъ уменьшаются, а слѣдовательно по причинѣ рефракціи всѣ свѣтила представляются намъ чрезъ атмосферу выше тѣхъ мѣстъ, которыя они дѣйствительно занимаютъ надъ горизонтомъ; отъ этого происходитъ то, что мы видимъ свѣтила прежде ихъ восхожденія и продолжаемъ ихъ видѣть нѣкоторое время спустя послѣ захода. Всѣ видимыя зенитныя разстоянія

*) Въ разсматриваемыхъ таблицахъ рефракціи величины $\lg B$, $\lg T$ и $\lg\gamma$ выражены въ единицахъ пятаго десятичнаго знака.

свѣтилъ менѣе истинныхъ на величину рефракціи, а потому если истинное зенитное разстояніе свѣтила равно въ извѣстный моментъ $90^\circ + \rho$, гдѣ подъ ρ разумѣемъ величину рефракціи при горизонтѣ, то видимое зенитное разстояніе можно считать равнымъ 90° и свѣтило будетъ представляться намъ восходящимъ или заходящимъ. Опредѣленіе измѣненія временъ восхожденія и захожденія свѣтилъ вліяніемъ рефракціи приводится къ вычисленію измѣненія часоваго угла, соотвѣтствующаго измѣненію зенитнаго разстоянія на величину рефракціи при горизонтѣ.

Изъ параллактическаго треугольника мы имѣемъ соотношеніе

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

если будемъ дифференцировать это уравненіе, принимая за перемѣнныя t и z, то найдемъ

$$\sin z \, . \, dz = \cos \varphi . \cos \delta . \sin t \, . \, dt$$

сдѣлаемъ здѣсь $z = 90^\circ$ и поставимъ вмѣсто dz измѣненіе зенитнаго разстоянія свѣтила рефракціей при горизонтѣ, тогда получимъ уравненіе, изъ котораго опредѣлится измѣненіе часоваго угла dt, соотвѣтствующее измѣненію зенитнаго разстоянія на величину рефракціи. Мы видѣли, что рефракція при горизонтѣ можетъ быть принята равною $35'$, это число обращенное въ секунды времени составляетъ 140^s, а потому искомое измѣненіе часоваго угла будетъ

$$dt = \frac{140^s}{\cos \varphi \cos \delta \, . \sin t} \tag{152}$$

Слѣдовательно чтобы опредѣлить времена восхожденія или захожденія свѣтила измѣненныя рефракціей, можно поступить слѣдующимъ образомъ: сначала изъ уравненія (18) — опредѣлить величину часоваго угла t соотвѣтствующаго точкамъ восхожденія или захожденія, затѣмъ для этой величины t изъ выраженія (152) опредѣлить поправку dt. Если эту поправку придадимъ къ прежде вычисленнымъ временамъ восхожденія и захожденія, то найдемъ времена измѣненныя рефракціей.

Впрочемъ времена восхожденій и захожденій свѣтилъ, принимая во вниманіе рефракцію, могутъ быть найдены прямо изъ уравненія

$$\cos z = \sin \varphi \, . \sin \delta + \cos \varphi \, . \cos \delta \, . \cos t$$

если примемъ въ немъ $z = 90^\circ \, 35'$. Но для вычисленія $\cos t$ по этой величинѣ z удобнѣе всего преобразовать предыдущее уравненіе въ другой видъ. Мы имѣемъ

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin \varphi \, . \sin \delta}{\cos \varphi \, . \cos \delta}$$

вычитая обѣ части уравненія изъ единицы, находимъ

$$2 \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos (\varphi - \delta) - \cos z}{\cos \varphi \, . \cos \delta}$$

придавая въ томъ же уравненіи къ обѣимъ частямъ по единицѣ, получимъ

$$2 \cos^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos (\varphi + \delta) + \cos z}{\cos \varphi \, . \cos \delta}$$

Эти два выраженія легко представляются въ видѣ

$$\sin^2\frac{t}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(z+\varphi-\delta)\sin\frac{1}{2}(z-\varphi+\delta)}{\cos\varphi\,.\cos\delta}$$

$$\cos^2\frac{t}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(z+\varphi+\delta)\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta-z)}{\cos\varphi\,.\cos\delta}$$

если примемъ

$$z+\varphi+\delta=2s$$

то

$$\frac{z+\varphi-\delta}{2}=s-\delta;\qquad \frac{z-\varphi+\delta}{2}=s-\varphi;\qquad \frac{\varphi+\delta-z}{2}=s-z$$

слѣдовательно

$$\sin\frac{t}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-\delta)\sin(s-\varphi)}{\cos\varphi\,.\cos\delta}};\qquad \cos\frac{t}{2}=\sqrt{\frac{\cos s\,.\cos(s-z)}{\cos\varphi\,.\cos\delta}}\qquad (153)$$

Если положимъ въ этихъ уравненіяхъ $z=90^\circ\,35'$, то изъ нихъ прямо опредѣлимъ часовой уголъ точекъ восхожденія или захожденія свѣтила измѣненный рефракціей.

Для поясненія сказаннаго на частномъ примѣрѣ опредѣлимъ время захожденія солнца 5 октября 1877 года для Кіевской обсерваторіи. Такъ какъ склоненія солнца измѣняются, то вопросъ долженъ быть рѣшенъ послѣдовательными приближеніями. Найдемъ сначала время захожденія солнца въ упомянутый день, не обращая вниманія на рефракцію. 5 октября солнце еще близко къ экватору, а потому восходитъ и заходитъ не далеко отъ перваго вертикала; имѣя это въ виду, примемъ въ первомъ приближеніи за искомое время захожденія $5^h\ 2^m$ истиннаго Кіевскаго времени и для этого момента изъ Nautical Almanac находимъ склоненіе солнца равное $-4^\circ\,55'.5$. Полагая что широта Кіевской обсерваторіи есть $50^\circ\,27'\,10''$, по этимъ даннымъ изъ уравненія (18) вычислимъ t, для этого находимъ

$$\lg\cos t=9.01852$$
$$t=84^\circ\,0'.7=5^h\,36^m$$

это есть приближенное истинное время захожденія солнца. Опредѣляя для этого момента склоненіе солнца, изъ Nautical Almanac находимъ $\delta=-4^\circ\,56'.0$. Снова вычисляя съ этой величиной δ по уравненію (18) истинное время захожденія солнца въ разсматриваемый день, получаемъ

$$t=84^\circ\,0'.1=5^h\,36^m.0$$

Но такъ какъ уравненіе времени соотвѣтствующее этому моменту есть $11^m\,42^s$ и его слѣдуетъ вычитать изъ истиннаго времени для перехода къ среднему, то среднее время захожденія солнца, опредѣленное, не обращая вниманія на рефракцію, будетъ $5^h\,24^m,3$. Для опредѣленія поправки зависящей отъ рефракціи обратимся къ выраженію (152); внося въ него вмѣстѣ съ другими величинами послѣднюю найденную величину t, имѣемъ $dt=221^s.9=3^m,7$. Слѣдовательно исправленное отъ рефракціи среднее время захожденія центра солнца 5 октября 1877 года для кіевской обсерваторіи будетъ $5^h\,28^m,0$. Тотъ же самый результатъ получается изъ вычисленія по одному изъ вы-

раженій (153). Въ самомъ дѣлѣ принимая какъ выше $\delta = -4^\circ 56'.0$ и полагая $z = 90^\circ 35'$, составляемъ

$$s = 68^\circ 3'.1; \qquad s - z = 22^\circ 31'.9$$

для этихъ величинъ второе изъ выраженій (153) дастъ

$$\lg \cos \frac{t}{2} = 9.86789; \qquad t = 84^\circ 55'.7 = 5^h 39^m.7,$$

а слѣдовательно вычисленное, обращая вниманіе на рефракцію, среднее время захожденія центра солнца, какъ и прежде, будетъ $5^h 28^m,0$. Временемъ захожденія солнца въ общежитіи называется тотъ моментъ, въ который послѣдняя точка свѣтлаго солнечнаго диска исчезаетъ подъ горизонтомъ. Чтобы опредѣлить этотъ моментъ для разсматриваемаго случая, слѣдуетъ обратиться къ выраженію (31), но по малости λ можно принять эту величину равною нулю и пользоваться для нашей цѣли уравненіемъ (27). Уравненіе (29) для разсматриваемаго случая дастъ

$$\log \cos p = 9.88870; \qquad p = 39^\circ 17'.5$$

Чтобы вычислить dt по уравненію (27), изъ Nautical Almanac для 5-го октября 1877 года находимъ $R = 16' 2''$. Внося все это въ выраженіе (27), получаемъ

$$dt = 1^m 41^s.6$$

Слѣдовательно захожденіе верхняго края солнца послѣдуетъ въ разсматриваемый день для кіевской обсерваторіи въ $5^h 29^m.7$ средняго времени.

Кромѣ явленія рефракціи существованіемъ атмосферы обусловливается еще явленіе *зари* или *сумерекъ*. Понятно, что для высшихъ слоевъ атмосферы солнце заходитъ позже нежели для наблюдателя находящагося на поверхности земли, который будетъ по этому видѣть верхніе слои атмосферы освѣщенными еще нѣкоторое время послѣ захожденія солнца вечеромъ и за нѣсколько времени до его восхожденія по утру. Этотъ свѣтъ отраженный верхними слоями атмосферы до восхожденія солнца и послѣ его захода и производятъ явленіе зари или сумерекъ. Изъ наблюденій извѣстно, что солнце перестаетъ освѣщать верхніе слои части атмосферы, находящейся надъ горизонтомъ наблюдателя, въ то время, когда оно опустится подъ горизонтъ приблизительно на 18° по кругу высоты; а потому тотъ моментъ, когда солнце достигаетъ зенитнаго разстоянія равнаго 108°, служитъ началомъ или концомъ астрономическихъ сумерекъ, смотря по тому имѣетъ ли солнце такое зенитное разстояніе передъ своимъ восхожденіемъ или послѣ захода. Отсюда понятно, что для тѣхъ широтъ земной поверхности, въ которыхъ солнце около лѣтняго солнцестоянія въ сѣверномъ полушаріи и около зимняго въ южномъ не погружается подъ горизонтъ болѣе 18°, считая по кругу высоты, сумерки не прекращаются въ теченіи всей ночи. Такимъ образомъ для извѣстныхъ широтъ въ сѣверномъ полушаріи земли въ теченіи нѣкотораго времени до и послѣ лѣтняго солнцестоянія заря продолжается во всю ночь. Въ общежитіи за начало или конецъ сумерекъ принимается тотъ моментъ, когда солнце достигаетъ 96° 30′ зенитнаго разстоянія.

Чтобы опредѣлить моментъ начала сумерекъ передъ восхожденіемъ солнца или конца послѣ его захода, назовемъ чрезъ t_0 часовой уголъ солнца при его восхожденіи или захожденіи, чрезъ τ продолжительность сумерекъ и чрезъ c разстояніе солнца отъ горизонта считаемое по кругу высоты въ моментъ начала сумерекъ передъ восхож-

деніемъ солнца и конца послѣ захода. При такомъ означеніи зенитному разстоянію солнца равному $90^\circ + c$ будетъ соотвѣтствовать часовой уголъ этого свѣтила равный $t_0 + \tau$ *); по этому изъ параллактическаго треугольника имѣемъ

$$-\sin c = \sin\varphi . \sin\delta + \cos\varphi . \cos\delta \cos(t_0 + \tau)$$

откуда

$$\cos(t_0 + \tau) = -\frac{\sin c + \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi . \cos\delta}$$

Вычитая обѣ части этого уравненія изъ единицы, имѣемъ

$$2\sin^2\frac{t_0+\tau}{2} = \frac{\cos(\varphi-\delta) + \sin c}{\cos\varphi . \cos\delta}$$

или

$$2\sin^2\frac{t_0+\tau}{2} = \frac{\sin(90^\circ - \varphi + \delta) + \sin c}{\cos\varphi . \cos\delta}$$

и слѣдовательно

$$\sin^2\frac{t_0+\tau}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(90 - \varphi + \delta + c)\cos\frac{1}{2}(90^\circ - \varphi + \delta - c)}{\cos\varphi . \cos\delta}.$$

Если положимъ здѣсь

$$90^\circ - \varphi + \delta = H$$

то найдемъ

$$\sin\frac{t_0+\tau}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(H+c)\cos\frac{1}{2}(H-c)}{\cos\varphi . \cos\delta}} \qquad (154)$$

изъ этого выраженія, зная часовой уголъ солнца, соотвѣтствующій времени восхожденія или захожденія этого свѣтила и принимая $c = 18^\circ$ или $c = 6^\circ 30'$, смотря по тому хотимъ ли вычислять продолжительность астрономическихъ или гражданскихъ сумерекъ, найдемъ искомую величину τ.

Для поясненія сказаннаго на частномъ примѣрѣ вычислимъ продолжительность сумерекъ въ Кіевѣ послѣ захожденія солнца 5-го октября 1877 года. Такъ какъ склоненіе солнца во время захожденія этого свѣтила въ упомянутый день есть $-4^\circ 55'.9$, то $H = 34^\circ 36'.9$, а потому для вычисленія продолжительности астрономическихъ сумерекъ имѣемъ $H + c = 52^\circ 36'.9$; $H - c = 16^\circ 36'.9$; для продолжительности гражданскихъ сумерекъ $H + c = 41^\circ 6'.9$, $H - c = 28^\circ 6'.9$. Внося это вмѣстѣ съ другими данными въ выраженіе (154), находимъ изъ него для астрономическихъ сумерекъ $t_0 + \tau = 112^\circ 30'.0$ и для гражданскихъ $t_0 + \tau = 94^\circ 14'.4$. Но выше было найдено что $t_0 = 84^\circ 55'.6$, слѣдовательно для двухъ разсматриваемыхъ случаевъ $\tau = 27^\circ 34'.4$ и $\tau = 9^\circ 18'.8$. Отсюда заключаемъ, что въ Кіевѣ 5-го октября 1877 года послѣ захожденія солнца астрономическія сумерки будутъ продолжаться $1^h 50^m.3$, а гражданскія $37^m.2$. Такъ какъ послѣдняя точка солнечнаго диска въ разсматриваемый день въ Кіевѣ исчезаетъ подъ горизонтомъ позже захожденія солнечнаго центра на $1^m.6$, то будетъ вѣрнѣе считать, что астрономическія сумерки будутъ продолжаться въ разсматриваемый день $1^h 48^m,7$ а гражданскія $35^m,6$.

*) Мы предполагаемъ, что τ выражено въ дугѣ.

IV.

Параллаксъ.

17. Одна изъ главныхъ задачъ астрономіи заключается въ опредѣленіи для всякаго времени положенія свѣтила на сводѣ небесномъ, т. е. въ опредѣленіи того направленія, по которому видимо свѣтило въ данное время. Астрономическія наблюденія, съ какою бы цѣлію они не производились, имѣютъ главнымъ предметомъ опредѣленіе этого направленія для даннаго момента времени. Если наблюдаемое свѣтило удалено отъ земли на такое разстояніе, въ сравненіи съ которымъ размѣры земнаго сфероида представляются исчезающими, то такое свѣтило въ одинъ и тотъ же моментъ изъ всѣхъ точекъ земной поверхности будетъ представляться по одному и тому же направленію. Такой случай дѣйствительно имѣетъ мѣсто для неподвижныхъ звѣздъ; въ сравненіи съ разстояніями этихъ свѣтилъ отъ земли, размѣры земнаго сфероида дѣйствительно должны быть принимаемы за величины исчезающія; а потому, не обращая вниманія на рефракцію, при одновременныхъ наблюденіяхъ одной и той же звѣзды изъ различныхъ точекъ земнаго сфероида эта звѣзда будетъ видна по одному и тому же направленію. Если же разстояніе отдѣляющее свѣтило отъ земли не такъ велико, чтобы въ сравненіи съ нимъ размѣры земнаго сфероида можно было считать величинами исчезающими, то направленія, по которымъ одновременно видимо это свѣтило изъ разныхъ точекъ земли, между собою различны и это различіе тѣмъ болѣе, чѣмъ разсматриваемое свѣтило ближе къ землѣ. Такой случай имѣетъ мѣсто для луны, солнца, планетъ и кометъ.

Хотя разность направленій, по которымъ изъ различныхъ точекъ земли одновременно видимо свѣтило, въ большинствѣ случаевъ весьма не велика, но тѣмъ не менѣе по причинѣ ея существованія сравненіе между собою наблюденій, одновременно произведенныхъ въ различныхъ точкахъ земли надъ положеніемъ свѣтила, не можетъ вести къ опредѣленнымъ результатамъ. Чтобы съ успѣхомъ пользоваться наблюденіями одного и того же свѣтила, произведенными въ разныхъ мѣстахъ земной поверхности, необходимо научиться приводить ихъ къ одной опредѣленной точкѣ земнаго сфероида, за которую условно принимается центръ земли.

Уголъ между направленіями, по которымъ одновременно видимо свѣтило изъ центра земли и изъ какой либо точки ея поверхности, называется *параллаксомъ* этого свѣтила. Понятно что подъ тѣмъ же угломъ видѣнъ съ разсматриваемаго свѣтила радіусъ земли проведенный въ мѣсто наблюденія, а потому параллаксомъ свѣтила мы будемъ называть уголъ, подъ которымъ видѣнъ съ этого свѣтила опредѣленный ра-

діусъ земли; такъ напр. параллаксомъ луны мы будемъ называть уголъ, подъ которымъ видѣнъ изъ центра луны радіусъ земли проведенный въ мѣсто наблюденія. Уголъ, подъ которымъ видѣнъ радіусъ земли изъ центра свѣтила находящагося на горизонтѣ, мы будемъ называть *горизонтальнымъ параллаксомъ* этого свѣтила. Наконецъ уголъ, подъ которымъ видѣнъ со свѣтила находящагося на горизонтѣ какой нибудь экваторіальной точки земли экваторіальный радіусъ послѣдней, мы будемъ называть *горизонтальнымъ экваторіальнымъ параллаксомъ* свѣтила. Вслѣдствіе параллакса координаты свѣтилъ отнесенныя къ какой бы то не было системѣ координатныхъ плоскостей и соотвѣтствующія одному и тому же моменту времени будутъ различны для центра земли и для опредѣленной точки ея поверхности. Эта разность координатъ называется ихъ параллаксомъ; такъ напр. параллаксомъ прямаго восхожденія мы называемъ разность прямаго восхожденія свѣтила видимаго съ поверхности земли и прямаго восхожденія видимаго изъ ея центра или, какъ будемъ говорить, геоцентрическаго прямаго восхожденія.

Посмотримъ теперь какимъ образомъ по различнымъ системамъ координатъ опредѣляется разность видимыхъ и геоцентрическихъ положеній свѣтилъ,—разность обусловливающаяся положеніемъ наблюдателя на поверхности земли и называемая параллаксомъ.

Опредѣлимъ прежде всего вліяніе параллакса на высоту и азимутъ свѣтила и постараемся представить возможно общее рѣшеніе вопроса, предполагая, что земля ограничена поверхностью эллипсоида вращенія около малой оси.

Пусть линія $QPOE$ (фиг. 8) представляетъ сѣченіе земной поверхности плоскостію меридіана мѣста наблюденія, которое, предположимъ, находится въ O. Примемъ касательную плоскость проведенную чрезъ мѣсто наблюденія къ поверхности земли за плоскость координатъ $x'y'$. Эта плоскость $Ox'y'$ будетъ очевидно плоскостію видимаго горизонта мѣста наблюденія. Пусть въ этой системѣ координатъ ось Ox' будетъ направлена по меридіану мѣста къ югу. Ось Oy', перпендикулярная къ оси Ox', пусть будетъ направлена къ западу. Примемъ наконецъ нормаль проведенную черезъ мѣсто наблюденія къ поверхности земли и продолженную къ зениту этого мѣста за ось z'. На нашемъ чертежѣ эта ось представляется прямою Oz'. За начало этой системы осей координатъ мы принимаемъ мѣсто наблюденія O. Предположимъ, что въ S находится то свѣтило, вліяніе параллакса на высоту и азимутъ котораго мы хотимъ теперь опредѣлить. Назовемъ координаты свѣтила относительно принятой системы осей чрезъ x', y', z'. Пусть разстояніе свѣтила отъ мѣста наблюденія будетъ Δ', такъ что $OS = \Delta'$. Если примемъ, что проложеніе свѣтила на плоскость $x'y'$ находится въ точкѣ M', то уголъ $x'OM'$ будетъ азимутомъ свѣтила наблюдаемаго изъ точки O. Этотъ азимутъ мы будемъ называть *видимымъ азимутомъ* въ отличіе отъ геоцентрическаго и означимъ его чрезъ A', такъ что $x'OM' = A'$. Уголъ $z'OS$ будетъ очевидно зенитнымъ разстояніемъ свѣтила наблюдаемымъ съ поверхности земли изъ точки O. Это зенитное разстояніе мы также будемъ называть видимымъ и означимъ его чрезъ ζ', такъ что $z'OS = \zeta'$. Принимая эти означенія, имѣемъ на нашемъ чертежѣ

$$OR' = x' = \Delta' \sin \zeta' \cos A'$$

$$M'R' = y' = \Delta' \sin \zeta' \sin A'$$

$$SM' = z' = \Delta' \cos \zeta'$$

Отнесемъ теперь положеніе свѣтила къ другой системѣ осей координатъ параллельныхъ выше упомянутымъ, но имѣющихъ начало въ центрѣ земли. Пусть оси этой системы будутъ Cx, Cy, Cz. Означимъ разстояніе разсматриваемаго свѣтила отъ центра земли чрезъ Δ, такъ что $CS = \Delta$. Если геоцентрическія, или представляющіеся изъ центра земли, зенитное разстояніе и азимутъ свѣтила означимъ чрезъ ζ и A и примемъ, что проложеніе свѣтила на плоскость xy находится въ точкѣ M, то очевидно, что углы $xCM = A$ и $zCS = \zeta$. Означивъ координаты свѣтила, отнесенныя къ этой второй системѣ осей чрезъ x, y, z, найдемъ, что

$$CR = x = \Delta \,.\, \sin\zeta \,.\, \cos A$$
$$MR = y = \Delta \,.\, \sin\zeta \,.\, \sin A$$
$$SM = z = \Delta \,.\, \cos\zeta$$

Разность координатъ x, y, z и x', y', z' очевидно будетъ равна координатамъ мѣста наблюденія относительно системы осей, имѣющей начало въ центрѣ земли; такъ что если назовемъ эти послѣднія координаты чрезъ x_0, y_0, z_0, то

$$(155) \qquad x - x' = x_0 ; \qquad y - y' = y_0 ; \qquad z - z' = z_0$$

Назовемъ радіусъ земли проведенный въ мѣсто наблюденія чрезъ ρ. Уголъ, который составляетъ этотъ радіусъ съ экваторіальною осью CE земнаго сфероида, называется *геоцентрическою* или *геодезическою* широтою мѣста наблюденія. Если означимъ эту широту чрезъ φ', то $\varphi' = OCE$. Уголъ, который составляетъ нормаль къ поверхности земли проведенная въ мѣсто наблюденія съ тою же экваторіальною осью называется обыкновенно *астрономическою широтою* мѣста наблюденія. Если означимъ астрономическую широту чрезъ φ, то уголъ $ONE = \varphi$. Такъ какъ мы принимаемъ, что плоскость zx, также какъ и плоскость $z'x'$ расположены въ плоскости меридіана мѣста наблюденія, то это послѣднее будетъ находиться въ плоскости xz и координатами его относительно центра земли будутъ линіи $Cn = x_0$; $y_0 = 0$, $On = z_0$. Если разсмотримъ треугольникъ CON, то найдемъ, что въ немъ уголъ $CON = \varphi - \varphi'$, а потому $Cn = \rho \,.\, \sin(\varphi - \varphi')$; $On = \rho \,.\, \cos(\varphi - \varphi')$. И такъ координаты мѣста наблюденія относительно центра земли будутъ

$$x_0 = \rho \,.\, \sin(\varphi - \varphi')$$
$$y_0 = 0$$
$$z_0 = \rho \,.\, \cos(\varphi - \varphi')$$

Внося найденныя выраженія координатъ x, y, z; x', y', x'; x_0, y_0, z_0 въ уравненія (155) получимъ

$$(156) \qquad \begin{aligned} &\Delta.\sin\zeta.\cos A - \Delta'.\sin\zeta'.\cos A' = \rho\,.\,\sin(\varphi - \varphi') \\ &\Delta.\sin\zeta.\sin A - \Delta'.\sin\zeta'.\sin A' = 0 \\ &\Delta.\cos\zeta \qquad - \Delta'.\cos\zeta' \qquad = \rho\,.\,\cos(\varphi - \varphi') \end{aligned}$$

Эти три уравненія и даютъ возможность вычислить разности $A - A'$ и $\zeta - \zeta'$; другими словами, — опредѣлить вліяніе параллакса на азимутъ и зенитное разстояніе свѣтила.

Чтобы получить упомянутыя разности, умножимъ сначала первое изъ предыдущихъ уравненій на $\sin A$, второе на $\cos A$ и вычтемъ первое произведеніе изъ вто-

раго; затѣмъ умножимъ первое уравненіе на $\cos A$, второе на $\sin A$ и произведенія сложимъ; выполнивъ это, имѣемъ

$$\begin{aligned} \Delta'.\sin\zeta'\sin(A'-A) &= \rho.\sin(\varphi-\varphi')\sin A \\ \Delta'.\sin\zeta'\cos(A'-A) &= \Delta.\sin\zeta - \rho.\sin(\varphi-\varphi')\cos A \end{aligned} \qquad (157)$$

Умножимъ теперь первое изъ этихъ уравненій на $\sin\frac{1}{2}(A'-A)$ второе на $\cos\frac{1}{2}(A'-A)$ и сложивъ произведенія, получимъ

$$\Delta'.\sin\zeta'\cos\tfrac{1}{2}(A'-A) = \Delta.\sin\zeta\cos\tfrac{1}{2}(A'-A) - \rho\sin(\varphi-\varphi')\cos\tfrac{1}{2}(A+A')$$

или

$$\Delta'.\sin\zeta' = \Delta.\sin\zeta - \rho.\sin(\varphi-\varphi')\frac{\cos\frac{1}{2}(A'+A)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)}.$$

Если положимъ для краткости

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A'+A)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)}\tan(\varphi-\varphi') = \tan\gamma \qquad (158)$$

то предыдущее приметъ видъ

$$\Delta'.\sin\zeta' = \Delta.\sin\zeta - \rho.\cos(\varphi-\varphi')\tan\gamma \qquad (159)$$

Кромѣ этого по третьему изъ уравненій (156) имѣемъ еще

$$\Delta'.\cos\zeta' = \Delta.\cos\zeta - \rho.\cos(\varphi-\varphi') \qquad (160)$$

Умножимъ первое изъ этихъ двухъ уравненій на $\cos\zeta$, второе на $\sin\zeta$ и вычтемъ второе произведеніе изъ перваго; затѣмъ умножимъ первое уравненіе на $\sin\zeta$ и сложимъ его со вторымъ умноженнымъ на $\cos\zeta$. Выполнивъ это, находимъ

$$\begin{aligned} \Delta'.\sin(\zeta'-\zeta) &= \rho.\cos(\varphi-\varphi')[\sin\zeta - \tan\gamma.\cos\zeta] \\ \Delta'.\cos(\zeta'-\zeta) &= \Delta - \rho.\cos(\varphi-\varphi')[\tan\gamma\sin\zeta + \cos\zeta] \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Delta'.\sin(\zeta'-\zeta) &= \rho.\cos(\varphi-\varphi')\frac{\sin(\zeta-\gamma)}{\cos\gamma} \\ \Delta'.\cos(\zeta'-\zeta) &= \Delta - \rho.\cos(\varphi-\varphi')\frac{\cos(\zeta-\gamma)}{\cos\gamma} \end{aligned} \qquad (161)$$

Умножимъ наконецъ первое изъ этихъ уравненій на $\sin\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta)$, второе на $\cos\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta)$ и сложивъ произведенія, получимъ

$$\Delta'.\cos\tfrac{1}{2}(\zeta'-\zeta) = \Delta.\cos\tfrac{1}{2}(\zeta'-\zeta) - \frac{\rho.\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\gamma}\cos\left[\tfrac{1}{2}(\zeta'-\zeta)-\gamma\right]$$

или

$$\Delta' = \Delta - \frac{\rho.\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\gamma}\cdot\frac{\cos[\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta)-\gamma]}{\cos\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta)} \qquad (162)$$

Уравненія (157), (161) и (162) служатъ для рѣшенія нашего вопроса объ опредѣленіи

вліянія параллакса на высоты и азимуты свѣтилъ. Въ самомъ дѣлѣ изъ уравненій (157) имѣемъ возможность вычислить разность видимаго и геоцентрическаго азимутовъ, какъ скоро даны геоцентрическій азимутъ и геоцентрическое зенитное разстояніе свѣтила. Уравненіями (161) опредѣляется разность видимаго и геоцентрическаго зенитныхъ разстояній. Наконецъ изъ уравненія (162) вычисляется разстояніе свѣтила отъ мѣста наблюденія, если разстояніе свѣтила отъ центра земли дано. Рѣшеніе обратнаго вопроса, т. е. опредѣленіе геоцентрическихъ координатъ по видимымъ, получается пріемомъ совершенно подобнымъ предыдущему изъ тѣхъ же уравненій (156); для этого стоитъ только найти выраженія разностей видимыхъ и геоцентрическихъ координатъ въ зависимости отъ координатъ видимыхъ. Такъ напримѣръ для опредѣленія геоцентрическаго азимута по даннымъ азимуту и зенитному разстоянію видимымъ будемъ имѣть систему уравненій

$$(157_*)\qquad \begin{aligned} \Delta\,.\sin\zeta.\cos(A-A') &= \Delta'.\sin\zeta' + \rho.\sin(\varphi-\varphi')\cos A' \\ \Delta\,.\sin\zeta.\sin(A-A') &= -\rho.\sin(\varphi-\varphi')\sin A' \end{aligned}$$

точно также подобно предыдущему для вычисленія геоцентрическаго зенитнаго разстоянія по данному видимому будемъ имѣть уравненія

$$(161_*)\qquad \begin{aligned} \Delta.\sin(\zeta-\zeta') &= \rho.\cos(\varphi-\varphi')\frac{\sin(\gamma-\zeta')}{\cos\gamma} \\ \Delta.\cos(\zeta-\zeta') &= \Delta' + \rho.\cos(\varphi-\varphi')\frac{\cos(\gamma-\zeta')}{\cos\gamma} \end{aligned}$$

Вмѣсто уравненій (157) и (161) для вычисленія разностей $A'-A$ и $\zeta'-\zeta$ на практикѣ удобнѣе пользоваться другими выраженіями, хотя приближенными, но болѣе простыми по формѣ. Эти выраженія могутъ быть получены слѣдующимъ образомъ: раздѣливъ первое изъ уравненій (157) на второе, имѣемъ

$$(163)\qquad \operatorname{tang}(A'-A) = \frac{\dfrac{\rho\,.\sin(\varphi-\varphi')}{\Delta\,.\sin\zeta}\sin A}{1-\dfrac{\rho\,.\sin(\varphi-\varphi')}{\Delta.\sin\zeta}\cos A}$$

Такъ какъ отношеніе $\frac{\rho}{\Delta}$ есть всегда малая величина, то вторая часть предыдущаго уравненія можетъ быть разложена въ весьма быстро сходящійся рядъ по степенямъ этого отношенія. Это разложеніе легко находится для всѣхъ выраженій подобнаго вида *). Въ самомъ дѣлѣ уравненіе (163) имѣетъ форму

$$\operatorname{tang} x = \frac{m\,.\sin z}{1-m\,.\cos z}$$

взявъ отсюда производную по m, получимъ

$$(a)\qquad \sec^2 x\cdot\frac{dx}{dm} = \frac{\sin z}{(1-m\,.\cos z)^2}$$

но

$$\sec^2 x = 1+\operatorname{tang}^2 x$$

*) См. *М. Ковальскій*. О затмѣніяхъ. стр. 10.

внося сюда вмѣсто $\tang^2 x$ его величину изъ начальнаго уравненія, имѣемъ

$$\sec^2 x = \frac{1 + m^2 - 2m \, . \cos z}{(1 - m \, . \cos z)^2}$$

слѣдовательно уравненію (a) можно дать видъ

$$\frac{dx}{dm} = \frac{\sin z}{1 + m^2 - 2m \, . \cos z} \qquad \text{(b)}$$

Называя чрезъ e основаніе Непоровыхъ логариѳмовъ и полагая $\sqrt{-1} = i$, имѣемъ

$$\frac{1}{1 - m e^{iz}} = 1 + m e^{iz} + m^2 e^{2iz} + m^3 e^{3iz} + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1 - m e^{-iz}} = 1 + m e^{-iz} + m^2 e^{-2iz} + m^3 e^{-3iz} + \cdots$$

вычитая второй изъ этихъ рядовъ изъ перваго, получимъ

$$\frac{m\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}{1 + m^2 - m\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)} = m\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) + m^2\left(e^{2iz} - e^{-2iz}\right) + m^3\left(e^{3iz} - e^{-3iz}\right) + \cdots$$

но извѣстно, что

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2 \, . \cos z$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \, . \sin z$$

$$e^{2iz} - e^{-2iz} = 2i \, . \sin 2z$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

а потому предыдущій рядъ приводится къ виду

$$\frac{m \, . \sin z}{1 + m^2 - 2m \, . \cos z} = m \, . \sin z + m^2 . \sin 2z + m^3 . \sin 3z + \cdots\cdots$$

Сравнивая это съ выраженіемъ (b), находимъ

$$\frac{dx}{dm} = \sin z + m \, . \sin 2z + m^2 . \sin 3z + \cdots\cdots$$

Интегрируя это, находимъ искомое разложеніе въ видѣ

$$x = m \, . \sin z + \frac{m^2}{2} \sin 2z + \frac{m^3}{3} \sin 3z + \cdots\cdots \qquad (164)$$

Такъ какъ вторая часть этого выраженія представлена въ линейной мѣрѣ, а первая— въ дугѣ, то для однородности выраженія первая его часть должна быть умножена на $\sin 1''$. Мы предполагаемъ, что x выражено въ секундахъ дуги.

Для примѣненія этого ряда къ разложенію въ нашемъ случаѣ положимъ $x = A' - A$; $z = A$ и

$$m = \frac{\rho \, . \sin(\varphi - \varphi')}{\Delta \, . \sin \zeta}$$

и тогда находимъ

$$(165)\quad (A - A')\sin 1'' = \frac{\rho}{\Delta}\cdot\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin\zeta}\cdot\sin A + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\Delta}\cdot\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin\zeta}\right)^2\sin 2A + \cdots$$

Раздѣливъ уравненія (161) одно на другое, получимъ

$$(166)\qquad \operatorname{tang}(\zeta'-\zeta) = \frac{\frac{\rho}{\Delta}\frac{\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\gamma}\sin(\zeta-\gamma)}{1-\frac{\rho}{\Delta}\frac{\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\gamma}\cos(\zeta-\gamma)}$$

Это выраженіе имѣетъ ту же форму какъ и выраженіе (163), а потому разлагая его но строкѣ (164), имѣемъ

$$(167)\quad (\zeta'-\zeta)\sin 1'' = \frac{\rho}{\Delta}\cdot\frac{\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\gamma}\sin(\zeta-\gamma) + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\Delta}\cdot\frac{\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\gamma}\right)^2\sin 2(\zeta-\gamma) + \cdots$$

Изъ рядовъ (165) и (166) для ближайшаго къ намъ свѣтила луны достаточно вычислять только два первыхъ члена; для всѣхъ же другихъ свѣтилъ отношеніе $\frac{\rho}{\Delta}$ такъ мало, что будетъ совершенно удовлетворительно при опредѣленіи разностей $A'-A$ и $\zeta'-\zeta$ ограничиться вычисленіемъ одного только перваго члена въ той и другой строкѣ.

Для опредѣленія упомянутыхъ разностей въ зависимости отъ видимыхъ азимута и зенитнаго разстоянія, совершенно подобный предыдущему пріемъ разложенія долженъ быть примѣненъ къ выраженіямъ (157_*) и (161_*).

Если бы земля не имѣла формы эллипсоида вращенія, а была бы ограничена сферическою поверхностію, то нормаль къ поверхности земли, проведенная въ мѣсто наблюденія проходила бы черезъ центръ земли, а потому астрономическая широта мѣста наблюденія, равнялась бы геодезической широтѣ. Такимъ образомъ если будемъ разсматривать поверхность земли какъ поверхность сферы, то должны будемъ принять $\varphi = \varphi'$, тогда изъ уравненія (163) получаемъ

$$\operatorname{tang}(A'-A) = 0 \quad \text{и} \quad A'-A = 0,$$

другими словами, если бы земля была ограничена сферическою поверхностію, то параллаксъ не вліялъ бы на азимутъ свѣтила, — дѣйствіемъ параллакса свѣтило не выводилось бы изъ вертикальной плоскости или изъ того круга высоты, который проходитъ черезъ геоцентрическое положеніе свѣтила.

Замѣтимъ еще, что во время кульминаціи и при эллипсоидальной фигурѣ земли дѣйствіемъ параллакса свѣтило не выводится изъ вертикальной плоскости, въ этомъ случаѣ—изъ плоскости меридіана мѣста. Въ самомъ дѣлѣ, если свѣтило кульминируетъ, то азимутъ его равенъ нулю, слѣдовательно $A = 0$ и тогда, какъ видно изъ выраженія (165), $A = A'$, ибо вся строка обращается въ нуль.

Если пренебрегаемъ эксцентриситетомъ меридіана мѣста наблюденія и разсматриваемъ землю какъ ограниченную сферическою поверхностію, то мы должны принять $\varphi = \varphi'$, но при этомъ, какъ показываетъ уравненіе (158), $\gamma = 0$, слѣдовательно уравненіе (166) въ этомъ случаѣ принимаетъ видъ

$$\operatorname{tang}(\zeta' - \zeta) = \frac{\frac{\rho}{\Delta}\sin\zeta}{1 - \frac{\rho}{\Delta}\cos\zeta} \tag{168}$$

разлагая это по строкѣ (164) и ограничиваясь первымъ членомъ разложенія, имѣемъ

$$(\zeta' - \zeta)\,.\sin 1'' = \frac{\rho}{\Delta}\cdot\sin\zeta$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что для всѣхъ свѣтилъ за исключеніемъ луны параллаксъ зенитнаго разстоянія можно считать пропорціональнымъ синусу зенитнаго разстоянія.

Предполагая, что земля ограничена поверхностью сферы, мы можемъ получить уравненіе (168) болѣе простымъ способомъ. Въ самомъ дѣлѣ предположимъ, что въ C (фиг. 9) находится центръ земли, въ O—мѣсто наблюденія. Пусть въ S будетъ разсматриваемое свѣтило. Продолженнымъ радіусомъ CO опредѣлится направленіе CZ' къ геоцентрическому зениту. Наблюдатель изъ O (безъ вліянія рефракціи) увидитъ свѣтило по направленію OS, а изъ C по линіи CS. Уголъ SOZ', который означимъ чрезъ ζ', представитъ собою видимое зенитное разстояніе свѣтила, а уголъ $Z'SC$—геоцентрическое; назовемъ это послѣднее чрезъ ζ. Если означимъ уголъ OSC чрезъ q, то очевидно, что $q = \zeta' - \zeta$. Уголъ q выражаетъ вліяніе параллакса на зенитное разстояніе свѣтила. Назовемъ разстояніе свѣтила отъ центра земли чрезъ Δ, а разстояніе мѣста наблюденія отъ центра земли пусть будетъ ρ, тогда $CS = \Delta$; $OC = \rho$. Изъ треугольника SOC имѣемъ

$$\sin q = \frac{\rho}{\Delta}\sin\zeta' \tag{169}$$

Но такъ какъ $\zeta' = \zeta + q$, то

$$\sin q = \frac{\rho}{\Delta}\sin(\zeta + q)$$

откуда

$$\sin q = \frac{\rho}{\Delta}\sin\zeta\,.\cos q + \frac{\rho}{\Delta}\cos\zeta\,.\sin q$$

или

$$\sin q\left(1 - \frac{\rho}{\Delta}\cos\zeta\right) = \frac{\rho}{\Delta}\sin\zeta\cos q.$$

а потому

$$\operatorname{tang} q = \frac{\frac{\rho}{\Delta}\sin\zeta}{1 - \frac{\rho}{\Delta}\cos\zeta}$$

Такъ какъ $q = \zeta' - \zeta$, то это уравненіе тождественно съ уравненіемъ (168). Если Oh' (фиг. 9) представляетъ собою видимый горизонтъ и Ch — истинный, то уголъ $SOh' = 90 - \zeta'$ есть видимая, а уголъ $SCh = 90 - \zeta$ истинная высота свѣтила, и уголъ q, равный разности истинной и видимой высоты свѣтила, называется также *параллаксомъ высоты* свѣтила.

Изъ уравненія (169) видно, что уголъ q достигаетъ наибольшей величины при $\zeta' = 90^0$; эту наибольшую величину q называютъ *горизонтальнымъ параллаксомъ* свѣтила. Если означимъ горизонтальный параллаксъ чрезъ π, то, какъ видно изъ уравненія (169),

(170) $$\sin\pi = \frac{\rho}{\Delta}\ ,$$

слѣдовательно вообще

$$\sin q = \sin\pi \,.\, \sin\zeta'$$

Параллаксы всѣхъ свѣтилъ за исключеніемъ луны весьма малы, а потому можемъ принимать $\sin q = q \,.\, \sin 1''$, и тогда

$$q = \frac{\sin\pi}{\sin 1''} \cdot \sin\zeta'$$

или просто

$$q = \pi \,.\, \sin\zeta'$$

Отсюда опять видимъ, что параллаксъ высоты можно считать пропорціональнымъ синусу зенитнаго разстоянія свѣтила. Изъ уравненія (170) мы видѣли, что горизонтальный параллаксъ свѣтила измѣняется съ измѣненіемъ положенія наблюдателя на земной поверхности, т. е. съ измѣненіемъ ρ. При эллипсоидальной фигурѣ земли π получаемъ наибольшую величину подъ экваторомъ. Эта наибольшая величина называется *экваторіальнымъ параллаксомъ*. Если назовемъ горизонтальный экваторіальный параллаксъ свѣтила чрезъ Π, а экваторіальный радіусъ земли чрезъ a, то, какъ видно изъ уравненія (170),

(171) $$\sin\Pi = \frac{a}{\Delta}$$

Чтобы видѣть соотношеніе между горизонтальнымъ и горизонтальнымъ экваторіальнымъ параллаксомъ свѣтила, помножимъ и раздѣлимъ вторую часть уравненія (170) на a, тогда, обращая вниманіе на уравненіе (171), найдемъ

(172) $$\sin\pi = \frac{\rho}{a} \cdot \sin\Pi.$$

Если примемъ экваторіальный радіусъ земли за единицу, то очевидно, что

$$\sin\Pi = \frac{1}{\Delta}$$

а потому уравненіямъ (165) и (167) служащимъ для опредѣленія вліянія параллакса на высоту и азимутъ свѣтила можно дать видъ

$$(A' - A)\sin 1'' = \frac{\rho\sin\Pi \,.\, \sin(\varphi - \varphi')}{\sin\zeta}\sin A + \frac{1}{2}\left[\frac{\rho.\sin\Pi\sin(\varphi - \varphi')}{\sin\zeta}\right]^2\sin 2A + \cdots$$

(173)

$$(\zeta' - \zeta)\sin 1'' = \frac{\rho.\sin\Pi\cos(\varphi - \varphi')}{\cos\gamma}\sin(\zeta - \gamma) + \frac{1}{2}\left[\frac{\rho.\sin\Pi\cos(\varphi - \varphi')}{\cos\gamma}\right]^2\sin 2(\zeta - \gamma) + \cdots$$

что касается до γ, то оно опредѣляется изъ уравненія (158).

Если свѣтило имѣетъ дискъ, то отъ параллакса измѣняются не только его координаты, но и видимый радіусъ; ибо наблюдателю съ поверхности земли радіусъ

свѣтила, вообще говоря, долженъ представляться подъ другимъ угломъ, нежели изъ центра земли. Если назовемъ геоцентрическій радіусъ свѣтила чрезъ R, то на фиг. 9 уголъ $SCB = R$, тогда какъ видимый радіусъ R' представится угломъ AOS. Если означимъ, какъ прежде, разстояніе свѣтила отъ центра земли чрезъ Δ, а отъ мѣста наблюденія—чрезъ Δ' и назовемъ радіусъ свѣтила выраженный въ линейной мѣрѣ чрезъ a', экваторіальный радіусъ земли чрезъ a, то изъ треугольниковъ AOS и SCB прямоугольныхъ при A и B получимъ

$$\sin R' = \frac{a'}{\Delta'}; \qquad \sin R = \frac{a'}{\Delta}$$

Если означимъ какъ прежде экваторіальный горизонтальный параллаксъ свѣтила чрезъ Π, то

$$\sin \Pi = \frac{a}{\Delta}$$

а потому двумъ предыдущимъ выраженіямъ можно дать видъ

$$\sin R = \frac{a'}{a} \cdot \sin \Pi; \qquad \sin R' = \frac{\Delta}{\Delta'} \cdot \sin R \tag{174}$$

Послѣднее изъ этихъ выраженій служитъ для опредѣленія видимаго радіуса свѣтила по данному геоцентрическому, какъ скоро Δ' найдено по уравненію (162).

18. Выраженія (173) зависятъ между прочимъ отъ ρ, φ и φ'. Изъ непосредственныхъ наблюденій находится обыкновенно астрономическая широта φ, по ней, зная еще элементы земнаго сфероида, т. е. его эксцентриситетъ и большую полуось a, легко вычислить величины φ' и ρ. Уравненія представляющія зависимость между ρ, a, φ' и φ могутъ быть найдены на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Пусть PAQ (фиг. 10) представляетъ собою дугу эллиптическаго меридіана земли, проведеннаго чрезъ мѣсто наблюденія A. Пусть въ O будетъ центръ земли и AN—представляетъ нормаль проведенную къ поверхности земли въ точкѣ A. Уголъ $ANQ = \varphi$ есть астрономическая широта мѣста наблюденія, уголъ $AOQ = \varphi'$ — геоцентрическая широта того же мѣста. Пусть какъ прежде $AO = \rho$; назовемъ большую полуось земнаго сфероида чрезъ a, малую чрезъ b и эксцентриситетъ эллиптическаго меридіана земли чрезъ e. Если примемъ линію OQ за ось x, а линію OP за ось y въ прямоугольной системѣ осей координатъ, имѣющей начало въ центрѣ земли, то уравненіе эллиптическаго меридіана отнесенное къ этимъ осямъ, какъ весьма извѣстно, имѣетъ видъ

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

Если подъ x и y разумѣемъ здѣсь координаты точки A, то

$$\operatorname{tang} \varphi' = \frac{y}{x}$$

Астрономическая широта есть уголъ составленный нормалью съ большою полуосью эллиптическаго меридіана, въ нашемъ случаѣ съ осью x, а потому

$$\operatorname{tang} \varphi = -\frac{dx}{dy}$$

но изъ уравненія эллипсиса имѣемъ

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 y}{b^2 x}$$

слѣдовательно

(175) $$\tang \varphi = \frac{a^2 . y}{b^2 . x}.$$

опредѣляя отсюда величину y и внося ее въ уравненіе эллипсиса, имѣемъ

$$\frac{b^4 . x^2 . \tang^2 \varphi}{a^2} + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

но для эллипсиса $b^2 = a^2 (1 - e^2)$, а потому изъ предыдущаго легко находимъ

(176) $$x = \frac{a . \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

если опредѣлимъ изъ уравненія (175) величину x и внесемъ ее въ уравненіе эллипсиса, то подобно предыдущему найдемъ

(177) $$y = \frac{a (1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 . \sin^2 \varphi}}$$

Изъ фиг. 10 легко видно, что

$$x = \rho . \cos \varphi' ; \qquad y = \rho . \sin \varphi'$$

слѣдовательно

(178) $$\rho . \cos \varphi' = \frac{a . \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 . \sin^2 \varphi}}$$

$$\rho . \sin \varphi' = \frac{a (1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 . \sin^2 \varphi}}$$

Эти уравненія и могутъ служить для вычисленія ρ и геоцентрической широты φ по даннымъ a, e и φ. Но для вычисленія φ' по данному φ удобно пользоваться соотношеніемъ

(179) $$\tang \varphi' = (1 - e^2) \tang \varphi$$

которое получимъ, если раздѣлимъ второе изъ предыдущихъ уравненій на первое.

Что касается до вычисленія ρ по данной астрономической широтѣ φ, то для этого удобнѣе всего пользоваться рядомъ расположеннымъ по косинусамъ кратныхъ дугъ астрономической широты. Чтобы имѣть такой рядъ, найдемъ разложеніе функціи $lg \sqrt{1 + 2m . \cos z + m^2}$. Возмемъ опять выраженія

$$\frac{1}{1 - me^{iz}} = 1 + me^{iz} + m^2 e^{2iz} + m^3 e^{3iz} + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1 - me^{-iz}} = 1 + me^{-iz} + m^2 e^{-2iz} + m^3 e^{-3iz} + \cdots\cdots$$

складывая эти ряды, находимъ

$$\frac{1 - m\,.\cos z}{1 + m^2 - 2m\,.\cos z} = 1 + m\,.\cos z + m^2.\cos 2z + m^3 \cos 3z + \cdots\cdots$$

или

$$\frac{m^2 - m\,.\cos z}{1 + m^2 - 2m\,.\cos z} = - m\,.\cos z - m^2\,.\cos 2z - m^3 \cos 3z - \cdots\cdots$$

умноживъ обѣ части этого уравненія на $\frac{dm}{m}$ и взявъ интегралъ по m, получимъ

$$\frac{1}{2} \lg\left(1 + m^2 - 2m\,.\cos z\right) = - m\,.\cos z - \frac{m^2}{2}\cdot\cos 2z - \frac{m^3}{3}\cos 3z - \cdots\cdots$$

или

$$\lg \sqrt{1 + m^2 - 2m\,.\cos z} = - m\,.\cos z - \frac{m^2}{2}\cdot\cos 2z - \frac{m^3}{3}\cos 3z - \cdots\cdots$$

Такъ какъ это выраженіе справедливо для всякаго z, то подставляя въ него $180-z$ вмѣсто z, имѣемъ

$$\lg \sqrt{1 + 2m\,.\cos z + m^2} = m\,.\cos z - \frac{m^2}{2}\cdot\cos 2z + \frac{m^3}{3}\cos 3z - \cdots\cdots \qquad (180)$$

Примѣнимъ это къ разложенію $\lg \rho$. Возвысимъ уравненія (178) въ квадратъ и, сложивъ ихъ, получимъ

$$\rho^2 = \frac{a^2.\cos^2\varphi + a^2(1-e^2)^2.\sin^2\varphi}{1 - e^2.\sin^2\varphi}$$

откуда легко находимъ

$$\rho^2 = \frac{a^4.\cos^2\varphi + b^4.\sin^2\varphi}{a^2.\cos^2\varphi + b^2.\sin^2\varphi} = \frac{a^4(1+\cos 2\varphi) + b^4(1-\cos 2\varphi)}{a^2.(1+\cos 2\varphi) + b^2(1-\cos 2\varphi)}$$

что легко приводится къ виду

$$\rho^2 = \frac{(a^2+b^2)^2 + (a^2-b^2)^2 + 2(a^2+b^2)(a^2-b^2)\cos 2\varphi}{(a+b)^2 + (a-b)^2 + 2(a+b)(a-b)\cos 2\varphi}$$

или

$$\rho = \frac{a^2+b^2}{a+b}\,\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 + 2\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cos 2\varphi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + 2\,\frac{a-b}{a+b}\cos 2\varphi}}$$

взявъ отъ обѣихъ частей уравненія гиперболическій логариѳмъ, получимъ

$$\operatorname{Log}\rho = \operatorname{Log}\frac{a^2+b^2}{a+b} + \operatorname{Log}\sqrt{1 + \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 + 2\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cos 2\varphi}$$

$$- \operatorname{Log}\sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + 2\,\frac{a-b}{a+b}\cos 2\varphi}$$

примѣняя къ разложенію двухъ послѣднихъ членовъ выраженіе (180), имѣемъ

$$\text{Log}\,\rho = \text{Log}\,\frac{a^2+b^2}{a+b} + \left[\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{a-b}{a+b}\right]\cos 2\varphi$$
$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right]\cos 4\varphi$$
$$+\frac{1}{3}\left[\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^3 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3\right]\cos 6\varphi$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Для перехода отъ натуральныхъ логариѳмовъ къ табличнымъ назовемъ модуль чрезъ M, такъ что $\lg M = 9.6377843$, тогда табличный логариѳмъ ρ будетъ

$$\log\rho = \log\frac{a^2+b^2}{a+b} + M\left[\left\{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{a-b}{a+b}\right\}\cos 2\varphi\right.$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right\}\cos 4\varphi$$
$$+\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^3 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3\right\}\cos 6\varphi$$
$$\left.-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

Изъ десяти градусныхъ измѣреній Бессель нашелъ слѣдующія величины a и b выраженныя въ туазахъ

$$a = 3272077.14\,; \qquad b = 3261139.33$$

Если примемъ a за единицу, выразимъ b въ этой единицѣ и найденную величину внесемъ въ предыдущее выраженіе $\lg\rho$, то получимъ

(181) $\lg\rho = 9\,9992747 + 0.0007271\cos 2\varphi - 0.0000018\cos 4\varphi + \ldots\ldots$

Этимъ выраженіемъ мы и будемъ пользоваться для вычисленія ρ по данной астрономической широтѣ. Для кіевской обсерваторіи $\varphi = 50^\circ\,27'\,10''.\,26$, а потому для этого мѣста

$$\log\rho = 9.9991389,$$

Кромѣ широты астрономической и геодезической или геоцентрической не рѣдко приходится еще вводить въ вычисленіе, такъ называемую, *приведенную широту*. Если на фиг. 10 опишемъ около начала координатъ O радіусомъ большой полуоси OQ кругъ QR, изъ разсматриваемой точки A проведемъ ординату AB, продолжимъ ее до пересѣченія съ описаннымъ кругомъ въ точкѣ A' и наконецъ соединимъ эту точку A' съ центромъ O эллиптическаго меридіана, то уголъ, который составляетъ прямая $A'O$ съ экваторіальною полуосью OQ и называется *приведенною широтою* точки A. Если означимъ приведенную широту чрезъ u, то уголъ $A'OQ = u$. Легко показать зависимость между широтами астрономической, геодезической и приведенной. Изъ фиг. 10 видно, что $OB = A'O\,.\cos u$. Если означимъ, какъ прежде, координаты точки A относительно осей совпадающихъ съ осями эллиптическаго меридіана чрезъ x и y,

экваторіальную полуось сфероида чрезъ a, то предыдущее равенство приметъ видъ $x = a . \cos u$. Рѣшая уравненіе эллиптическаго меридіана относительно y, получимъ

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

изъ чертежа мы видимъ, что

$$a^2 - x^2 = A'B^2$$

или

$$a^2 - x^2 = a^2 \sin^2 u$$

и такъ

$$y = b . \sin u$$

слѣдовательно

$$x = a . \cos u ; \qquad y = a\sqrt{1 - e^2} . \sin u$$

сравнивая это съ выраженіями (176) и (177), видимъ, что

$$\left.\begin{aligned} \cos u &= \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 . \sin^2 \varphi}} \\ \sin u &= \frac{\sqrt{1 - e^2} . \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 . \sin^2 \varphi}} \end{aligned}\right\} \qquad (182)$$

откуда чрезъ дѣленіе получаемъ

$$\operatorname{tang} u = \sqrt{1 - e^2} . \operatorname{tang} \varphi$$

Умноживъ обѣ части этого уравненія на $\sqrt{1 - e^2}$ и обращая вниманіе на уравненіе (179), имѣемъ

$$\operatorname{tang} \varphi' = \sqrt{1 - e^2} . \operatorname{tang} u$$

если раздѣлимъ предыдущее уравненіе на послѣднее, то получимъ

$$\operatorname{tang}^2 u = \operatorname{tang} \varphi . \operatorname{tang} \varphi' \qquad (183)$$

а потому заключаемъ, что тангенсъ приведенной широты есть средняя пропорціональная величина между тангенсами широты астрономической и геодезической.

19. Опредѣлимъ теперь вліяніе параллакса на склоненія и прямыя восхожденія свѣтилъ. Представимъ себѣ для этого прямоугольную систему осей координатъ, имѣющихъ начало въ центрѣ земли. Плоскость экватора примемъ за плоскость xy и проведемъ ось x черезъ точку весенняго равноденствія. Ось y пусть проходитъ черезъ точку экватора имѣющую прямое восхожденіе равное 90^0. Ось z пройдетъ черезъ сѣверный полюсъ экватора. Представимъ себѣ еще другую систему координатъ, оси которой пусть будутъ параллельны осямъ первой системы, а начало этихъ вторыхъ осей пусть находится на поверхности земли въ мѣстѣ наблюденія. Пусть EPQ (фиг. 11) представляетъ собою сѣченіе земнаго сфероида плоскостію yz. Пусть PMm будетъ меридіанъ мѣста наблюденія, находящагося въ точкѣ M. Пусть EmQ представляетъ сѣченіе земнаго сфероида плоскостію экватора или въ нашемъ случаѣ, плоскостію xy. Предположимъ, что въ S находится разсматриваемое свѣтило. Означимъ его геоцен-

трическое склоненіе чрезъ δ и такое же прямое восхожденіе чрезъ α. Разстояніе свѣтила отъ центра земли пусть будетъ Δ. Назовемъ тѣ же величины отнесенныя къ мѣсту наблюденія чрезъ δ', α' и Δ'. Пусть разстояніе мѣста наблюденія отъ центра земли будетъ ρ и геодезическая широта точки M пусть будетъ φ'. Звѣздное время считаемое въ точкѣ M въ разсматриваемый моментъ означимъ чрезъ θ. Если назовемъ чрезъ x, y, z координаты свѣтила относительно осей, имѣющихъ начало въ центрѣ земли, а чрезъ x', y', z' координаты того же свѣтила и для того же времени, но отнесенныя къ осямъ, имѣющимъ начало въ мѣстѣ наблюденія, то

$$\begin{aligned} x &= \Delta . \cos\delta . \cos\alpha ; & x' &= \Delta' . \cos\delta' . \cos\alpha' \\ y &= \Delta . \cos\delta . \sin\alpha ; & y' &= \Delta' . \cos\delta' . \sin\alpha' \\ z &= \Delta . \sin\delta \quad ; & z' &= \Delta' . \sin\delta' \end{aligned}$$

Координаты мѣста наблюденія относительно центра земли на нашемъ чертежѣ представляются линіями Cp, pq, Mq. Если замѣтимъ, что линія Cm находится въ плоскости меридіана мѣста, то поймемъ, что уголъ γCm есть часовой уголъ точки весенняго равноденствія или звѣздное время, а потому если назовемъ координаты мѣста наблюденія относительно центра земли чрезъ ξ, η, ζ, то найдемъ, что

$$\begin{aligned} \xi &= \rho . \cos\varphi' . \cos\theta \\ \eta &= \rho . \cos\varphi' . \sin\theta \\ \zeta &= \rho . \sin\varphi' \end{aligned}$$

Легко видѣть, что

$$x' = x - \xi ; \qquad y' = y - \eta ; \qquad z' = z - \zeta$$

Внося сюда вмѣсто линейныхъ координатъ ихъ предыдущія выраженія, получимъ

$$(184) \qquad \begin{aligned} \Delta' \cos\delta' \cos\alpha' &= \Delta \cos\delta \cos\alpha - \rho \cos\varphi' \cos\theta \\ \Delta' \cos\delta' \sin\alpha' &= \Delta \cos\delta . \sin\alpha - \rho \cos\varphi' . \sin\theta \\ \Delta' \sin\delta' &= \Delta \sin\delta - \rho \sin\varphi' \end{aligned}$$

Умножимъ сначала первое изъ этихъ уравненій на $\sin\alpha$, второе на $\cos\alpha$ и вычтемъ первое произведеніе изъ втораго, за тѣмъ помножимъ первое уравненіе на $\cos\alpha$, второе на $\sin\alpha$ и произведенія сложимъ. Выполнивъ все это, получимъ два слѣдующія уравненія

$$(185) \qquad \begin{aligned} \Delta' . \cos\delta' \sin(\alpha' - \alpha) &= \rho . \cos\varphi' \sin(\alpha - \theta) \\ \Delta' . \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha) &= \Delta . \cos\delta - \rho . \cos\varphi' \cos(\alpha - \theta) \end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{\dfrac{\rho . \cos\varphi'}{\Delta . \cos\delta} \sin(\alpha - \theta)}{1 - \dfrac{\rho \cos\varphi'}{\Delta . \cos\delta} \cos(\alpha - \theta)}$$

разлагая это въ рядъ по строкѣ (164), имѣемъ

$$(186) \quad (\alpha' - \alpha) . \sin 1'' = \frac{\rho . \cos\varphi'}{\Delta . \cos\delta} \sin(\alpha - \theta) + \frac{1}{2} \left[\frac{\rho . \cos\varphi'}{\Delta . \cos\delta}\right]^2 \sin 2(\alpha - \theta) + \ldots\ldots$$

Въ этомъ выраженіи ρ и Δ должны быть представлены въ одинакихъ единицахъ; Δ представляется по большой части въ единицахъ средняго разстоянія земли

отъ солнца и потому чтобы представить ρ въ тѣхъ же единицахъ слѣдуетъ его умножить на $\sin p$, гдѣ подъ p разумѣемъ экваторіальный горизонтальный параллаксъ солнца. И такъ если дано разстояніе свѣтила отъ земли выраженное въ единицахъ средняго разстоянія земли отъ солнца, то для вычисленія разности $\alpha' - \alpha$ будемъ имѣть выраженіе

$$(\alpha'-\alpha).\sin 1'' = \frac{\rho.\sin p.\cos\varphi'}{\Delta.\cos\delta}\sin(\alpha-\theta) + \frac{1}{2}\left[\frac{\rho.\sin p.\cos\varphi'}{\Delta.\cos\delta}\right]^2 \sin 2(\alpha-\theta) + \cdots \quad (186_1)$$

которымъ удобно пользоваться для опредѣленія вліянія параллакса на прямыя восхожденія планетъ и кометъ, если только Δ для этихъ свѣтилъ извѣстно и дано.

Во многихъ случаяхъ вмѣсто Δ дается Π, т. е. экваторіальный горизонтальный параллаксъ свѣтила. Ввести эту величину въ выраженіе (186) легко. Мы видѣли, что

$$\sin\Pi = \frac{1}{\Delta}$$

а потому выраженіе (186) можно представить въ формѣ

$$(\alpha'-\alpha)\sin 1'' = \frac{\rho.\sin\Pi.\cos\varphi'}{\cos\delta}\sin(\alpha-\theta) + \frac{1}{2}\left[\frac{\rho.\sin\Pi.\cos\varphi'}{\cos\delta}\right]^2 \cdot \sin 2(\alpha-\theta) + \cdots \quad (186_2)$$

которою удобно между прочимъ пользоваться для вычисленія вліянія параллакса на положеніе луны.

Только для ближайшаго къ намъ свѣтила—луны придется изъ ряда (186) вычислять два или даже три члена, для всѣхъ же другихъ свѣтилъ достаточно будетъ ограничиться однимъ членомъ. Такъ что для всѣхъ свѣтилъ за исключеніемъ луны вліяніе параллакса на прямое восхожденіе можно представить въ видѣ

$$(\alpha'-\alpha).\sin 1'' = \frac{\rho.\sin p.\cos\varphi'}{\Delta.\cos\delta}\sin(\alpha-\theta)$$

Если свѣтило находится въ меридіанѣ, то въ этотъ моментъ звѣздное время равно прямому восхожденіе свѣтила; слѣдовательно въ этомъ случаѣ $\alpha = \theta$ и всѣ члены строки (186) обращаются въ нуль, а потому заключаемъ, что во время кульминаціи свѣтила его прямое восхожденіе не измѣняется отъ параллакса.

Для опредѣленія вліянія параллакса на склоненіе свѣтила, замѣнимъ во второмъ изъ уравненій (185) величину $\cos(\alpha'-\alpha)$ чрезъ $1 - 2\sin^2\frac{(\alpha'-\alpha)}{2}$; тогда упомянутое уравненіе приметъ видъ

$$\Delta'\cos\delta' = \Delta\cos\delta - \rho\cos\varphi'\cos(\alpha-\theta) + 2\Delta'\cos\delta'\sin^2\frac{(\alpha'-\alpha)}{2}$$

или

$$\Delta'.\cos\delta' = \Delta.\cos\delta - \rho\cos\varphi'.\cos(\alpha-\theta) + \Delta'\cos\delta'\sin(\alpha'-\alpha)\frac{\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}}$$

замѣняя въ послѣднемъ членѣ произведеніе $\Delta'.\cos\delta'\sin(\alpha'-\alpha)$ его величиною взятою изъ перваго изъ уравненій (185), отсюда находимъ

$$\Delta'.\cos\delta' = \Delta.\cos\delta - \frac{\rho.\cos\varphi'}{\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}}\cos\left[\theta - \frac{\alpha+\alpha'}{2}\right]$$

если положимъ здѣсь

(187) $$\sin\varphi' = \beta.\sin\gamma$$

$$\frac{\cos\varphi'\cos\left[\theta - \frac{\alpha'+\alpha}{2}\right]}{\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}} = \beta.\cos\gamma$$

то послѣднее уравненіе и третье изъ уравненій (184) примутъ видъ

(188) $$\Delta'.\cos\delta' = \Delta\cos\delta - \rho\beta.\cos\gamma$$
$$\Delta'.\sin\delta' = \Delta\sin\delta - \rho\beta.\sin\gamma$$

Умножимъ сначала первое изъ этихъ уравненій на $\sin\delta$, второе на $\cos\delta$ и вычтемъ первое произведеніе изъ втораго, потомъ умножимъ первое уравненіе на $\cos\delta$, а второе на $\sin\delta$ и произведенія сложимъ. Послѣ всего этого получимъ

(189) $$\Delta'\sin(\delta'-\delta) = -\rho\beta.\sin(\gamma-\delta)$$
$$\Delta'\cos(\delta'-\delta) = \Delta - \rho\beta.\cos(\gamma-\delta)$$

откуда

(190) $$\operatorname{tang}(\delta'-\delta) = \frac{-\frac{\rho\beta}{\Delta}\sin(\gamma-\delta)}{1-\frac{\rho\beta}{\Delta}\cos(\gamma-\delta)}$$

Если разложимъ это въ рядъ по строкѣ (164) и выразимъ ρ въ единицахъ средняго разстоянія земли отъ солнца, то получимъ

(190_1) $$(\delta'-\delta)\sin 1'' = -\frac{\rho\beta.\sin p}{\Delta}\sin(\gamma-\delta) - \frac{1}{2}\left[\frac{\rho\beta.\sin p}{\Delta}\right]^2.\sin 2(\gamma-\delta) - \cdots$$

Въ томъ случаѣ когда вмѣсто Δ будетъ данъ экваторіальный горизонтальный параллаксъ свѣтила, для вычисленія разности $\delta'-\delta$ будемъ пользоваться слѣдующимъ рядомъ:

(190_2) $$(\delta'-\delta)\sin 1'' = -\rho\beta.\sin\Pi\sin(\gamma-\delta) - \frac{1}{2}\left[\rho\beta.\sin\Pi\right]^2\sin 2(\gamma-\delta) - \cdots$$

Для всѣхъ свѣтилъ за исключеніемъ луны достаточно вычислять одинъ только первый членъ выроженія (190_1).

Если свѣтило находится въ меридіанѣ, то, какъ мы видѣли выше, $\alpha' = \alpha$ и тогда уравненія (187) даютъ $\beta = 1$ и $\gamma = \varphi'$. Принимая поверхность земли за поверхность сферы, положимъ $\varphi' = \varphi$, и тогда уравненіе (190) для разсматриваемаго случая, т. е. при $\beta = 1$ и $\gamma = \varphi$ приметъ видъ

$$\operatorname{tang}(\delta'-\delta) = \frac{-\frac{\rho}{\Delta}\sin(\varphi-\delta)}{1-\frac{\rho}{\Delta}\cos(\varphi-\delta)}$$

Но въ меридіанѣ $\varphi - \delta = \zeta$ и вторыя части предыдущаго уравненія и уравненія (168) дѣлаются тождественными. Слѣдовательно во время кульминаціи вліяніе параллакса на прямое восхожденіе свѣтила уничтожается, а параллаксъ склоненія обращается въ параллаксъ высоты.

Вліяніе параллакса на видимый радіусъ свѣтила также легко можетъ быть найдено на основаніи уравненій (188). Умножимъ для этого первое изъ нихъ на $\sin\gamma$, второе на $\cos\gamma$ и, вычитая первое произведеніе изъ втораго, получимъ

$$\Delta' . \sin(\delta' - \gamma) = \Delta . \sin(\delta - \gamma)$$

откуда

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{\sin(\delta - \gamma)}{\sin(\delta' - \gamma)}$$

но такъ какъ видимые радіусы свѣтилъ находятся въ обратномъ отношеніи съ разстояніями отдѣляющими ихъ отъ глаза наблюдателя, то назвавъ радіусъ свѣтила видимый съ поверхности земли чрезъ R', а видимый изъ центра земли чрезъ R, получимъ

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{R}{R'}$$

сравнивая это съ предыдущимъ, находимъ

$$\frac{R}{R'} = \frac{\sin(\delta - \gamma)}{\sin(\delta' - \gamma)}$$

такимъ образомъ видимый радіусъ свѣтила опредѣлится по геоцентрическому изъ выраженія

$$R' = R\frac{\sin(\delta' - \gamma)}{\sin(\delta - \gamma)} \qquad (191)$$

Чтобы пояснить сказанное на частномъ примѣрѣ вычислимъ для 1877 года, 20 февраля, $10^h\, 56^m\, 22^s$ средняго кіевскаго времени по даннымъ геоцентрическимъ склоненію и прямому восхожденію луны видимыя ея координаты для кіевской обсерваторіи. Изъ Nautical Almanac для этого времени находимъ слѣдующія геоцентрическія координаты луны

$$\alpha = 3^h\, 40^m\, 11^s.21\,; \qquad \delta = 24^0\, 53'\, 34''.1$$

обращая данное среднее время въ звѣздное, находимъ $\theta = 8^h\, 59^m\, 55^s.2$. Для рѣшенія нашего вопроса необходимо знать еще экваторіальный горизонтальный параллаксъ луны, геоцентрическую широту кіевской обсерваторіи и разстояніе этой послѣдней отъ центра земли. Первую изъ этихъ величинъ беремъ изъ Nautical Almanac; для разсматриваемаго момента она есть

$$\Pi = 57'\, 47''.2$$

Если замѣтимъ, что по опредѣленію Ф. В. Бесселя $\lg e = 8.9122052$, то по уравненію (179) получаемъ для кіевской обсерваторіи

$$\varphi' = 50^0\, 15'.9$$

что касается до ρ, то для кіевской обсерваторіи оно было выше вычислено и найдено $\lg \rho = 9.99914$. На основаніи этихъ данныхъ составляемъ

$$\log\left[\frac{\rho \cdot \sin \Pi \cdot \cos \varphi'}{\cos \delta}\right] = 8.07267$$

и такъ какъ кромѣ того

$$\alpha - \theta = 18^h\, 40^m\, 16^s = 280^\circ\ 4'.0$$

то логариѳмы трехъ первыхъ членовъ строки (186_2) будутъ

$$8.06593_n, \qquad 5.38113_n, \qquad 3.67754$$

всѣ эти величины выражены въ линейной мѣрѣ, чтобы представить ихъ въ секундахъ дуги, вычтемъ изъ каждой $\lg \sin 1''$, тогда логариѳмы трехъ первыхъ членовъ строки (186_2), выраженныхъ въ секундахъ дуги будутъ

$$3.38036_n, \qquad 0.69556_n, \qquad 8.99197$$

найдя этимъ тремъ логариѳмамъ соотвѣтствующія числа и взявъ ихъ сумму, получимъ

$$\alpha' - \alpha = -2405''.8 = -40'\,5''.8$$

слѣдовательно измѣненное параллаксомъ прямое восхожденіе луны будетъ

$$\alpha' = 54^\circ\,22'\,42''.3$$

Мы видимъ, что при этомъ вычисленіи совершенно достаточно ограничиться двумя первыми членами разсматриваемой строки, ибо третій членъ столь малъ, что не достигаетъ и одной десятой доли секунды.

Для вычисленія соотвѣтствующаго видимаго склоненія луны, прежде всего изъ уравненій (187) вычислимъ β и γ. Эти уравненія даютъ

$$\lg(\beta \cdot \sin\gamma) = 9.88593; \qquad \lg(\beta \cdot \cos\gamma) = 9.03369$$

слѣдовательно

$$\gamma = 82^\circ\ 0'.0; \qquad \lg \beta = 9.89018$$

при помощи этихъ величинъ составляемъ

$$\gamma - \delta = 57^\circ\ 6'.4; \qquad \lg(\beta\rho \cdot \sin\Pi) = 8.11485$$

послѣ этого находимъ слѣдующіе логариѳмы трехъ первыхъ членовъ строки (190_2) выраженныхъ въ секундахъ дуги

$$3.35340_n, \qquad 1.20311_n, \qquad 8.36060_n$$

Здѣсь опять видимъ, что третій членъ по величинѣ не достигаетъ одной десятой доли секунды и можетъ быть отвергнутъ. Сумма первыхъ двухъ членовъ, или что все равно искомая разность есть

$$\delta' - \delta = -2272''.2 = -37'\,52''.2$$

а потому видимое съ кіевской обсерваторіи склоненіе центра луны въ упомянутый выше моментъ будетъ

$$\delta' = +24^\circ\,15'\,41''.9$$

Для опредѣленія видимаго радіуса луны, возмемъ изъ Nautical Almanac соотвѣтствующій разсматриваемому моменту геоцентрическій радіусъ, который есть

$$R = 15'.46''.4 = 946''.4$$

такъ какъ для нашего случая $\delta - \gamma = -57^\circ\ 6'.4$ и $\delta' - \gamma = -57^\circ\ 44'.3$, то для вычисленія R' по уравненію (191) находимъ

$$\lg R = 2.97607; \qquad \lg \sin(\delta' - \gamma) = 9.92717_n; \qquad \lg \sin(\delta - \gamma) = 9.92411_n$$

а потому искомый

$$\lg R' = 2.97913; \qquad R' = 953''.1 = 15'\ 53''.1$$

20. Способомъ совершенно подобнымъ предыдущему мы могли бы опредѣлить вліяніе параллакса на широты и долготы свѣтилъ, для этого стоило бы только за основную плоскость координатъ принять эклиптику. Но такъ какъ ходъ вычисленія безъ всякихъ измѣненій будетъ тотъ же самый какъ прежде, то прямо можно написать выраженія, которыми представляется вліяніе параллакса на широты и долготы свѣтилъ; для этого стоитъ только вмѣсто α, δ, φ' и θ поставить въ уравненія (186), (187) и (190) величины λ, β, b и l, гдѣ подъ λ разумѣемъ геоцентрическую долготу свѣтила, подъ β геоцентрическую широту, подъ b и l широту и долготу той точки, въ которой продолженный радіусъ земли, проведенный черезъ мѣсто наблюденія, встрѣчаетъ сферу небесную. Такъ какъ θ и φ' мы можемъ разсматривать какъ прямое восхожденіе и склоненіе той точки, въ которой упомянутый радіусъ встрѣчаетъ сферу небесную, то по даннымъ величинамъ θ и φ' по общему способу всегда легко опредѣлить координаты l и b. Если ограничимся первыми членами въ строкахъ (186_2) и (190_2) и замѣтимъ, что въ примѣненіи къ разсматриваемому случаю первое изъ уравненій (187) даетъ

$$\beta_1 = \frac{\sin b}{\sin \gamma} \tag{192}$$

то для опредѣленія вліянія параллакса на широты и долготы свѣтилъ будемъ имѣть выраженія

$$\lambda' - \lambda = \frac{\rho \cdot \sin \Pi . \cos b}{\cos \beta . \sin 1''} \sin(\lambda - l)$$

$$\beta' - \beta = -\frac{\rho . \sin \Pi . \sin b}{\sin \gamma . \sin 1''} \cdot \sin(\gamma - \beta)$$

Въ этихъ двухъ послѣднихъ выраженіяхъ β означаетъ широту свѣтила и отнюдь не должно быть смѣшиваемо съ вспомогательною величиною β, входящею въ уравненія (187) и для нашего случая представляющеюся выраженіемъ (192). Что касается до γ, то эту величину можно вычислять изъ выраженія

$$\tang \gamma = \frac{\tang b}{\cos(l - \lambda)}$$

которое получимъ изъ уравненій (187), если раздѣлимъ ихъ одно на другое и примемъ при этомъ $\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 1$ и $\frac{\alpha' + \alpha}{2} = \alpha$, гдѣ α должно быть для разсматриваемаго случая замѣнено чрезъ λ.

21. Вычисленіе разностей $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$, $\lambda' - \lambda$ и т. д. по изложенному выше способу предполагает данными или горизонтальный параллаксъ, или разстояніе отъ центра земли того свѣтила, разность видимыхъ и геоцентрическихъ координатъ котораго хотимъ опредѣлить. Если наблюдаемое свѣтило есть планета или комета, наблюдаемая въ первый разъ по ея открытіи, то нельзя предполагать извѣстнымъ ни разстоянія этого свѣтила отъ земли, ни его горизонтальнаго параллакса. Въ такомъ случаѣ для освобожденія наблюдаемаго положенія свѣтила отъ вліянія параллакса, очевидно слѣдуетъ употребить пріемъ существенно отличный отъ тѣхъ, которые мы до сихъ поръ излагали. Такой пріемъ дѣйствительно предложенъ К. Ф. Гауссомъ въ его сочиненіи „Theoria motus corporum coelestium".

Если разстояніе свѣтила отъ земли неизвѣстно, то вмѣсто того чтобы относить положеніе этого свѣтила къ центру земли, Гауссъ предлагаетъ для освобожденія наблюдаемаго положенія отъ вліянія параллакса отнести это положеніе къ нѣкоторой другой точкѣ эклиптики. Эта точка эклиптики очевидно должна быть выбрана такъ, чтобы вычисленіе ея координатъ при помощи астрономическихъ эфемеридъ было столько же возможно, какъ и вычисленіе координатъ центра земли. За такую точку эклиптики Гауссъ предлагаетъ принять то мѣсто, въ которомъ пересѣкается съ эклиптикой направленіе, по которому въ данное время видимо свѣтило изъ мѣста наблюденія, расположеннаго на поверхности земли. Эту точку Гауссъ называетъ *locus fictus observationis*;—мы будемъ называть ее *фиктивнымъ* мѣстомъ наблюденія.

Понятно что изъ фиктивнаго мѣста наблюденія свѣтило будетъ видимо въ той же самой точкѣ сферы небесной, какъ и изъ дѣйствительнаго мѣста наблюденія на поверхности земли; но при этомъ надо замѣтить, что изъ этихъ двухъ положеній свѣтило будетъ видимо въ одной и той же точкѣ сферы небесной не одновременно. Такъ какъ свѣтило, мѣсто наблюденія на поверхности земли и соотвѣтствующее этому послѣднему locus fictus observationis всегда расположены на одной прямой линіи, то понятно, что видимое положеніе свѣтила для дѣйствительнаго и фиктивнаго мѣста наблюденія будетъ одно и тоже. Слѣдовательно для того чтобы отнести свѣтило вмѣсто центра земли къ упомянутой точкѣ эклиптики (locus fictus observationis), намъ предстоитъ, не измѣняя наблюдаемыхъ координатъ свѣтила, опредѣлить координаты фиктивнаго мѣста наблюденія, соотвѣтствующаго данному дѣйствительному; кромѣ того необходимо указать еще въ какой именно моментъ времени изъ фиктивнаго мѣста наблюденія будетъ видимо свѣтило въ той же самой точкѣ сферы небесной, какъ и изъ дѣйствительнаго. Все это можетъ быть сдѣлано на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Примемъ плоскость эклиптики за плоскость xy, пусть ось x будетъ направлена въ точку весенняго равноденствія, ось y пусть пересѣкается со сферой небесной въ точкѣ, долгота которой равна 90°. Начало координатъ помѣстимъ въ центрѣ солнца. Допустимъ, для общности, что центръ земли не расположенъ въ эклиптикѣ и имѣетъ относительно принятой системы осей прямолинейныя координаты x, y, z. Если назовемъ чрезъ R разстояніе центра земли отъ центра солнца, чрезъ L_0 долготу—и чрезъ B_0 широту центра земли видимыя изъ центра солнца (эти координаты мы будемъ называть *геліоцентрическими*), то при сдѣланныхъ означеніяхъ получимъ

$$x = R \,.\cos L_0 \,.\cos B_0$$
$$y = R \,.\sin L_0 \,.\cos B_0$$
$$z = R \,.\sin B_0 \,.$$

Въ астрономическихъ таблицахъ даются обыкновенно не широты и долготы центра земли, а широты и долготы центра солнца, видимыя изъ центра земли. Если назовемъ геоцентрическую широту солнца чрезъ B, а геоцентрическую долготу его чрезъ L, то понятно, что

$$L_0 = 180 + L$$
$$B_0 = -B$$

а потому

$$x = -R.\cos L.\cos B$$
$$y = -R.\sin L.\cos B$$
$$z = -R.\sin B$$

Назовемъ прямолинейныя координаты фиктивнаго мѣста наблюденія (locus fictus observationis) относительно центра солнца чрезъ x_1, y_1, z_1. Пусть разстояніе фиктивнаго мѣста наблюденія отъ центра солнца будетъ R', долгота солнца видимая изъ фиктивнаго мѣста наблюденія пусть будетъ L'; широта этого мѣста всегда будетъ равна нулю, ибо оно находится въ эклиптикѣ. При такихъ означеніяхъ

$$x_1 = -R'.\cos L'$$
$$y_1 = -R'.\sin L'$$
$$z_1 = 0.$$

Если назовемъ координаты мѣста наблюденія относительно центра земли чрезъ ξ, η, ζ; чрезъ ρ — разстояніе мѣста наблюденія отъ того же центра и чрезъ l и b — геоцентрическую долготу и широту зенита мѣста наблюденія или той точки, въ которой продолженный радіусъ ρ встрѣчаетъ сферу небесную, то

$$\xi = \rho.\cos l.\cos b$$
$$\eta = \rho.\sin l.\cos b$$
$$\zeta = \rho.\sin b.$$

Пусть координаты дѣйствительнаго мѣста наблюденія относительно центра солнца будутъ x_2, y_2, z_2, тогда понятно, что

$$x_2 - x = \xi = \rho.\cos l.\cos b$$
$$y_2 - y = \eta = \rho.\sin l.\cos b$$
$$z_2 - z = \zeta = \rho.\sin b$$

означимъ разстояніе свѣтила отъ дѣйствительнаго мѣста наблюденія чрезъ Δ и отъ фиктивнаго чрезъ Δ'. Разстояніе между этими двумя точками будетъ очевидно равно разности $\Delta' - \Delta$. Назовемъ широту и долготу дѣйствительнаго мѣста наблюденія видимыя изъ фиктивнаго чрезъ β и λ. Понятно, что β будетъ представлять также широту, а λ долготу свѣтила видимыя изъ дѣйствительнаго мѣста наблюденія, ибо изъ фиктивнаго дѣйствительное мѣсто наблюденія и свѣтило видимы по одному и тому же направленію. Если назовемъ наконецъ чрезъ ξ_1, η_1, ζ_1 координаты дѣйствительнаго мѣста наблюденія относительно фиктивнаго, то

$$\xi_1 = (\Delta' - \Delta)\cos\beta.\cos\lambda$$
$$\eta_1 = (\Delta' - \Delta)\cos\beta.\sin\lambda$$
$$\zeta_1 = (\Delta' - \Delta)\sin\beta$$

Понятно, что геліоцентрическія координаты дѣйствительнаго мѣста наблюденія равны геліоцентрическимъ координатамъ фиктивнаго мѣста наблюденія сложеннымъ съ координатами дѣйствительнаго мѣста наблюденія относительно фиктивнаго. При нашихъ означеніяхъ эти соотношенія представятся въ видѣ

$$x_2 = x_1 + \xi_1$$
$$y_2 = y_1 + \eta_1$$
$$z_2 = z_1 + \zeta_1$$

Съ другой стороны тѣже геліоцентрическія координаты дѣйствительнаго мѣста наблюденія равны геліоцентрическимъ координатамъ центра земли сложеннымъ съ координатами дѣйствительнаго мѣста наблюденія относительно центра земли, т. е.

$$x_2 = x + \xi$$
$$y_2 = y + \eta$$
$$z_2 = z + \zeta.$$

сравнивая эти выраженія съ предыдущими, находимъ

$$x_1 + \xi_1 = x + \xi$$
$$y_1 + \eta_1 = y + \eta$$
$$z_1 + \zeta_1 = z + \zeta$$

Внося сюда вмѣсто прямолинейныхъ координатъ ихъ предыдущія выраженія, получимъ:

$$(193)\quad \begin{aligned} -R'.\cos L' + (\Delta' - \Delta)\cos\beta.\cos\lambda &= -R.\cos B.\cos L + \rho.\cos b.\cos l \\ -R'.\sin L' + (\Delta' - \Delta)\cos\beta.\sin\lambda &= -R.\cos B.\sin L + \rho.\cos b.\sin l \\ (\Delta' - \Delta)\sin\beta &= -R.\sin B + \rho.\sin b. \end{aligned}$$

три уравненія, которыя служатъ для опредѣленія искомыхъ R' и L' по даннымъ R, L, B, ρ, b, l, β и λ. Назовемъ проложеніе разстоянія $\Delta' - \Delta$ на плоскость эклиптики чрезъ μ, т. е. положимъ

$$(\Delta' - \Delta)\cos\beta = \mu$$

тогда послѣднее изъ предыдущихъ уравненій дастъ

$$(194)\quad \mu = (\rho.\sin b - R.\sin B)\operatorname{cotg}\beta$$

такъ какъ во вторую часть этого уравненія входятъ всѣ извѣстныя величины, то оно дастъ возможность вычислить μ. Первымъ двумъ изъ уравненій (193) можно дать видъ

$$R'.\cos L' = R.\cos B.\cos L - \rho.\cos b.\cos l + \mu.\cos\lambda$$
$$R'.\sin L' = R.\cos B.\sin L - \rho.\cos b.\sin l + \mu.\sin\lambda$$

Чтобы возможно упростить эти уравненія, уменьшимъ всѣ углы, считаемые въ плоскости эклиптики, на уголъ L, т. е. условимся считать эти углы не отъ точки весенняго равноденствія, а отъ другой точки, расположенной въ эклиптикѣ и имѣющей долготу L; тогда предыдущія уравненія примутъ видъ

$$(195)\quad \begin{aligned} R'.\cos(L' - L) &= R.\cos B - \rho.\cos b.\cos(l - L) + \mu.\cos(\lambda - L) \\ R'.\sin(L' - L) &= -\rho.\cos b.\sin(l - L) + \mu.\sin(\lambda - L) \end{aligned}$$

Если извѣстнымъ образомъ представимъ ρ въ тѣхъ же единицахъ, въ какихъ выражено R, то уравненіями (194) и (195) вполнѣ и совершенно точно будетъ рѣшаться вопросъ объ опредѣленіи R' и L', т. е. координатъ фиктивнаго мѣста наблюденія. На практикѣ вмѣсто этихъ точныхъ уравненій для рѣшенія нашего вопроса вполнѣ удовлетворительно пользоваться другими приближенными, которыя изъ предыдущихъ могутъ быть получены на основаніи слѣдующихъ соображеній. Положеніе эклиптики, т. е. той плоскости, въ которой движется около солнца центръ земли, отъ нѣкоторыхъ причинъ непрерывно измѣняется. Располагая плоскость xy въ плоскости эклиптики, мы имѣемъ въ виду одно какое либо опредѣленное положеніе этой послѣдней и къ нему относимъ положеніе центра земли соотвѣтствующее какому угодно моменту времени и находящееся въ движущейся эклиптикѣ. Колебанія эклиптики однако столь малы, что при рѣшеніи нашего вопроса мы можемъ принимать, что центръ земли постоянно остается въ плоскости xy и что широта $B = 0$; при такомъ допущеніи уравненіе (194) принимаетъ видъ

$$\mu = \rho \,.\, \sin b \,.\, \mathrm{cotg}\, \beta \tag{194$_*$}$$

Если наблюдаемое свѣтило, планета или комета не находится въ плоскости эклиптики или весьма близко отъ нея, то, какъ показываютъ это уравненіе, μ будетъ величиною того же порядка какъ и ρ, а изъ второго изъ уравненій (195) видимъ, что $\sin(L'-L)$ будетъ величиною того же порядка какъ μ и ρ; но, исключая упомянутаго выше случая, μ всегда столь же мало въ сравненіи съ R какъ и ρ; поэтому величина $\sin(L'-L)$ такова, что вмѣсто нея мы можемъ поставить $(L'-L)\sin 1''$ и кромѣ того можемъ считать $\cos(L'-L) = 1$. Тогда второе изъ уравненій (195) для опредѣленія $L'-L$ дастъ выраженіе вида

$$L' - L = \frac{\mu \,.\, \sin(\lambda - L) - \rho \,.\, \cos b \sin(l - L)}{R' \,.\, \sin 1''} \tag{195$_1$}$$

что касается до опредѣленія R', то, принимая $B = 0$, по первому изъ уравненій (195) при $\cos(L'-L) = 1$ имѣемъ

$$R' = R + \mu \,.\, \cos(\lambda - L) - \rho \,.\, \cos b \,.\, \cos(l - L) \tag{195$_2$}$$

Мы уже сказали, что изъ фиктивнаго и дѣйствительнаго мѣста наблюденія свѣтило будетъ видимо въ одной и той же точкѣ сферы небесной не одновременно. Изъ фиктивнаго мѣста наблюденія оно будетъ видимо позже на тотъ промежутокъ времени, который употребляетъ свѣтъ для прохожденія отъ дѣйствительнаго мѣста наблюденія до фиктивнаго.

Третье изъ уравненій (193) дастъ

$$\Delta' - \Delta = \frac{1}{\sin \beta}\left[\rho \,.\, \sin b - R \,.\, \sin B\right]$$

Извѣстно, что свѣтъ употребляетъ $497''.83$ для прохожденія средняго разстоянія земли отъ солнца, а потому если назовемъ чрезъ dt то время, которое употребляетъ свѣтъ для прохожденія отъ дѣйствительнаго до фиктивнаго мѣста наблюденія, то получимъ

$$dt = \frac{497''.83}{\sin \beta}\left[\rho \,.\, \sin b - R \,.\, \sin B\right] \tag{196}$$

ибо среднее разстояніе земли отъ солнца мы принимаемъ за единицу и въ этой единицѣ

выражаемъ какъ R, такъ равно и разстояніе $\Delta' - \Delta$. Что касается до ρ, то, будучи вычислено по выраженію (181), оно представится въ единицахъ экваторіальнаго радіуса земли; чтобы представить его въ единицахъ средняго разстоянія земли отъ солнца, мы должны будемъ эту величину полученную по выраженіе (181) умножить на синусъ экваторіальнаго горизонтальнаго параллакса солнца; это произведеніе мы и разумѣемъ вездѣ подъ ρ въ выраженіяхъ служащихъ для вычисленія координатъ фиктивнаго мѣста наблюденія.

Что касается до l и b то они могутъ быть вычислены по уравненіямъ (11) и (12), служащимъ для преобразованія склоненія и прямаго восхожденія въ широту и долготу. Если назовемъ звѣздное время наблюденія чрезъ θ, геоцентрическую широту дѣйствительнаго мѣста наблюденія чрезъ φ' и наклоненіе эклиптики къ экватору чрезъ ε, то координаты l и b опредѣлятся изъ уравненій

(197)
$$\begin{aligned} \sin b &= n \cdot \sin (N + \varepsilon) \\ \sin l \cos b &= n \cdot \cos (N + \varepsilon) \\ \cos l \cos b &= \cos \varphi' \cos \theta \end{aligned}$$

при этомъ n и N найдутся изъ уравненій

(198)
$$\begin{aligned} n \cdot \sin N &= \sin \varphi' \\ n \cdot \cos N &= \cos \varphi' \sin \theta. \end{aligned}$$

И такъ чтобы освободить наблюдаемое положеніе планеты или кометы отъ вліянія параллакса, мы оставляемъ координаты видимаго положенія свѣтила безъ измѣненія, но по уравненіямъ (195_1) и (195_2) опредѣляемъ координаты R' и L' той точки эклиптики, къ которой вмѣсто центра земли относимъ наблюдаемое съ поверхности земли положеніе свѣтила, и которую Гауссъ назвалъ locus fictus observationis. Послѣ этого вычисливъ по выраженіе (196) поправку времени Δt, придаемъ ее ко времени наблюденія, т. е. къ тому времени, которому соотвѣтствуютъ наблюдаемыя съ поверхности земли координаты свѣтила. Мы наблюдаемъ планеты и кометы съ цѣлію изслѣдованія ихъ орбитъ; опредѣляемъ координаты планеты или кометы, соотвѣтствующія извѣстному времени, для вычисленія элементовъ орбиты, а для этой цѣли рѣшительно безразлично приводится ли наблюденіе къ центру земли, или къ другой какой нибудь точкѣ лежащей въ плоскости эклиптики,—„hoc respectu, говоритъ Гауссъ, nihil interest, utrum observatio ad centrum terrae an ad quoduis aliud punctum in plano eclipticae reducatur".

V.

Затмѣнія.

22. Параллаксъ не рѣдко становится причиною весьма замѣчательныхъ явленій, вообще называемыхъ затмѣніями. Подъ именемъ затмѣній въ астрономіи разумѣются два вида явленій совершенно разнородныхъ по существу. Если источникъ свѣта солнечной системы — солнце, не теряя своего свѣта, исчезаетъ на безоблачномъ небѣ, будучи закрыто отъ нашихъ глазъ луною, то мы говоримъ, что происходитъ затмѣніе. Если луна при своемъ движеніи около земли погружается въ коническую тѣнь, отбрасываемую землею, и при этомъ значительно измѣняетъ, или совсѣмъ утрачиваетъ свой заимствованный отъ солнца свѣтъ, то это явленіе мы также называемъ затмѣніемъ. Не смотря однако на одинакое названіе и нѣкоторыя наружныя сходства, существенная разность этихъ двухъ явленій понятна всякому. При солнечномъ затмѣніи на поверхности затмѣваемаго свѣтила не происходитъ никакихъ перемѣнъ. Существованіе явленія объусловливается только извѣстнымъ положеніемъ въ пространствѣ глаза наблюдателя. Въ самомъ дѣлѣ, луна освѣщенная солнцемъ отбрасываетъ въ противуположную отъ этого свѣтила сторону коническую тѣнь, и глазъ наблюдателя тогда только увидитъ солнечное затмѣніе, когда самъ будетъ находиться внутри этой тѣни. Если бы глазъ наблюдателя не оставлялъ конуса лунной тѣни и перемѣщался въ пространствѣ вмѣстѣ съ нимъ, то для такаго наблюдателя существовалъ бы вѣчный мракъ, вѣчное затмѣніе солнца луной. На оборотъ, если бы луна была болѣе отдалена отъ земли чѣмъ теперь, именно если бы она была отдалена на столько, что ея коническая тѣнь вовсѣ не достигала бы земной поверхности, то жители земли не имѣли бы понятія о томъ величественномъ явленіи, которое мы называемъ полнымъ затмѣніемъ солнца. И такъ мы видимъ, что солнечныя затмѣнія объусловливаются относительнымъ положеніемъ въ пространствѣ луны и глаза наблюдателя. Солнце при этомъ явленіи только видимо играетъ пассивную роль, и если смотрѣть на дѣло съ болѣе вѣрной точки зрѣнія, то эту пассивную роль слѣдуетъ приписать землѣ, или наблюдателю находящемуся на ней;—не солнце лишается своего свѣта въ затмѣніи, а наблюдатель, при существованіи извѣстныхъ условій, лишается дневнаго солнечнаго свѣта.

Не таковы по своему существу лунныя затмѣнія. Земля подобно лунѣ освѣщается солнцемъ и въ противуположную сторону отъ солнца отбрасываетъ также коническую тѣнь, и если луна при своемъ движеніи около земли погружается въ земную тѣнь, то она лишается заимствованнаго отъ солнца свѣта, и тогда, гдѣ бы не находился наблюдатель въ пространствѣ, онъ увидитъ лунное затмѣніе. Если въ извѣст-

ное время луна погружается въ земную тѣнь, то для возможности наблюдать лунное затмѣніе съ поверхности земли необходимо выполненіе только одного условія, именно того чтобы при безоблачномъ небѣ луна во время затмѣнія находилась надъ горизонтомъ мѣста наблюденія. Если погруженія луны въ земную тѣнь мы называемъ лунными затмѣніями, то явленія, называемыя нами теперь солнечными затмѣніями, правильнѣе было бы назвать затмѣніями извѣстныхъ частей земной поверхности луною. Съ солнечными затмѣніями имѣютъ сходство, если не по внѣшнему виду, то по существу еще два явленія, именно: покрытія звѣздъ и планетъ луною и прохожденія, такъ называемыхъ, нижнихъ планетъ по солнцу. Первое изъ этихъ явленій, точно также какъ и солнечныя затмѣнія, зависитъ отъ относительнаго положенія луны и глаза наблюдателя въ пространствѣ, второе обусловливается извѣстнымъ относительнымъ положеніемъ видимо проходящей по солнцу нижней планеты и глаза наблюдателя. Съ лунными затмѣніями имѣютъ полное сходство затмѣнія юпитеровыхъ спутниковъ,—явленія обусловливающіяся тѣмъ, что спутники, погружаясь въ тѣнь планеты, утрачиваютъ заимствованный отъ солнца свѣтъ.

Основываясь на этомъ, можно раздѣлить всѣ явленія затмѣній на двѣ категоріи: къ одной отнести затмѣнія обусловливающіяся относительнымъ положеніемъ затмѣвающаго свѣтила и глаза наблюдателя въ пространствѣ или, другими словами, затмѣнія зависящія отъ параллакса; къ другой—затмѣнія имѣющія мѣсто, при извѣстныхъ условіяхъ, для всякаго положенія глаза наблюдателя,—затмѣнія отъ параллакса независящія. Къ первой категоріи, какъ мы уже сказали, относятся: солнечныя затмѣнія, прохожденія нижнихъ планетъ по солнцу и покрытія звѣздъ и планетъ луною; ко второй—затмѣнія луны и спутниковъ вообще.

Теорія затмѣній зависящихъ отъ параллакса и особенно солнечныхъ затмѣній разработана почти исключительно Лагранжемъ, Бесселемъ и Ганзеномъ; что касается до теоріи солнечныхъ затмѣній, приписываемой Урзиномъ Гауссу, то по точности она ни какъ не можетъ быть сравниваема съ теоріями Бесселя и Ганзена. Если та теорія солнечныхъ затмѣній, которую излагаетъ въ своей диссертаціи Урзинъ *), дѣйствительно принадлежитъ Гауссу, то безъ сомнѣнія этотъ великій ученый ясно видѣлъ ее недостатки, и въ этомъ вѣроятно заключается причина, по которой онъ никогда не публиковалъ ее подъ своимъ именемъ, хотя также и не возражалъ Урзину, заявлявшему о существованіи теоріи затмѣній, принадлежащей Гауссу. Теорія затмѣній предложенная Бесселемъ въ его сочиненіи Analyse der Finsternisse есть развитіе теоріи Лагранжа помѣщенной первоначально въ Berliner Astr. Jahrb. für 1782 и перепечатанной потомъ въ Connaissance des temps pour l'an 1817 подъ заглавіемъ: „Sur le calcul des eclipses sujettes aux parallaxes“. Бесселева теорія затмѣній отличается большимъ изяществомъ аналитической формы, но въ практическомъ примѣненіи представляетъ то значительное неудобство, что предвычисленіе по ней различныхъ обстоятельствъ затмѣнія зависитъ отъ вычисленія быстро измѣняющихся линейныхъ координатъ луны. Это обстоятельство затрудняетъ ихъ интерполяцію для извѣстныхъ моментовъ времени. Теорія затмѣній предложенная П. А. Ганзеномъ и окончательно развитая имъ въ сочиненіи „Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen“ въ настоящее время должна считаться наиболѣе простою и удобною для предвычисленія солнечныхъ

*) *G. F. Ursin.* De eclipsi solari die 7 Septembris 1820 apparitura (secundum methodum geometriae analyticae tractata). Hafniae 1820.

затмѣній. Одинъ изъ существенныхъ недостатковъ Бесселевой теоріи Ганзенъ устранилъ тѣмъ, что основныя уравненія своей теоріи затмѣній привелъ въ зависимость не прямо отъ линейныхъ координатъ луны, но отъ нѣкоторыхъ ихъ функцій, измѣняющихся гораздо медленнѣе, чѣмъ самыя координаты. Обращая вниманіе на тѣ преимущества, которыя имѣетъ предъ всѣми другими Ганзенова теорія затмѣній, мы посвятимъ изложенію ея съ малыми измѣненіями бо́льшую часть главы о затмѣніяхъ.

Чтобы солнечное затмѣніе было видимо въ какой нибудь части земной поверхности, необходимо, чтобы во время геоцентрическаго соединенія центровъ солнца и луны, центръ луны находился вблизи узла лунной орбиты, т. е. вблизи точки пересѣченія лунной орбиты съ эклиптикой. Такимъ образомъ чтобы судить о томъ произойдетъ ли во время даннаго геоцентрическаго соединенія солнца и луны затмѣніе солнца, необходимо для времени этого геоцентрическаго соединенія знать разстояніе луны отъ узла ея орбиты и смотрѣть удовлетворяетъ ли это разстояніе по величинѣ извѣстнымъ условіямъ. Посмотримъ прежде всего какимъ образомъ можетъ быть найдено изъ астрономическихъ эфемеридъ время геоцентрическаго соединенія центровъ солнца и луны. Мы будемъ разсматривать соединенія двухъ родовъ: соединенія по прямому восхожденію и соединенія по долготѣ. Временемъ геоцентрическаго соединенія по прямому восхожденію называется тотъ моментъ, въ который центры солнца и луны представляются изъ центра земли расположенными въ одномъ кругѣ склоненія. Временемъ соединенія по долготѣ мы называемъ тотъ моментъ, когда для наблюдателя изъ центра земли центры солнца и луны находятся въ одномъ кругѣ широты. Чтобы опредѣлить время геоцентрическаго соединенія солнца и луны по прямому восхожденію, означимъ для какого нибудь момента t, считаемаго подъ меридіаномъ эфемеридъ, прямыя восхожденія солнца и луны чрезъ A и α. Означимъ искомое время соединенія чрезъ T. Часовыя измѣненія упомянутыхъ прямыхъ восхожденій пусть будутъ ΔA и $\Delta\alpha$, тогда прямое восхожденіе солнца для времени T выразится чрезъ

$$A + (T - t)\,\Delta A$$

а прямое восхожденіе луны для того же момента можно представить суммою

$$\alpha + (T - t)\,\Delta\alpha$$

Такъ какъ во время соединенія прямыя восхожденія свѣтилъ, приходящихъ въ соединеніе, равны, то для опредѣленія искомаго T имѣемъ уравненіе

$$A + (T - t)\,\Delta A = \alpha + (T - t)\,\Delta\alpha$$

откуда

$$T = t + \frac{A - \alpha}{\Delta\alpha - \Delta A} \qquad (199)$$

Если подъ A и α будемъ разумѣть здѣсь долготы центровъ солнца и луны, а подъ ΔA и $\Delta\alpha$ ихъ часовыя измѣненія, то T, вычисляемое изъ предыдущаго выраженія, представитъ собою время геоцентрическаго соединенія солнца и луны по долготѣ.

Чтобы во время опредѣленнаго геоцентрическаго соединенія луны и солнца произошло солнечное затмѣніе, для этого необходимо, чтобы луна въ это время находилась вблизи эклиптики, или точнѣе, вблизи одного изъ узловъ своей орбиты; именно на такомъ разстояніи отъ одного изъ узловъ, при которомъ разстояніе центровъ обоихъ свѣтилъ не превышало бы извѣстной величины. Посмотримъ какимъ образомъ можно

опредѣлить величину наименьшаго разстоянія центровъ солнца и луны для даннаго геоцентрическаго соединенія обоихъ свѣтилъ по долготѣ. Разсмотримъ для этого треугольникъ между узломъ лунной орбиты и центрами солнца и луны въ то время, какъ оба свѣтила находятся въ соединеніи по долготѣ. Такъ какъ мы имѣемъ въ виду случай соединенія вблизи узла, то стороны этого треугольника будутъ имѣть незначительную длину, а потому такой треугольникъ, собственно говоря, сферическій мы можемъ разсматривать какъ прямолинейный. Пусть въ M и S (фиг. 12) будутъ находиться центры луны и солнца во время соединенія этихъ свѣтилъ по долготѣ. Пусть въ N будетъ узелъ лунной орбиты. Если назовемъ чрезъ β широту луны въ моментъ соединенія, то $SM=\beta$. Положимъ что по прошествіи времени t послѣ соединенія центръ луны, перемѣщаясь по своей орбитѣ, придетъ въ точку M', а центръ солнца— въ точку S'. Назовемъ уголъ SMS' чрезъ γ, тогда $SS'=\beta\,.\,\text{tang}\,\gamma$. Перемѣщеніе луны по долготѣ въ промежутокъ времени t выражается линіею SP, а перемѣщеніе солнца по долготѣ линіею — SS'. Назовемъ отношеніе движенія луны по долготѣ къ движенію солнца по долготѣ чрезъ λ, тогда

$$\frac{SP}{SS'}=\lambda$$

откуда

$$SP=\lambda\,.\,SS'; \qquad SP=\lambda\,.\,\beta\,.\,\text{tang}\,\gamma$$

слѣдовательно

$$S'P=SP-SS'=\beta\,(\lambda-1)\,\text{tang}\,\gamma.$$

Чтобы опредѣлить другой катетъ прямоугольнаго треугольника $S'M'P$, проведемъ линію $M'Q$ параллельно NS и назовемъ наклоненіе лунной орбиты къ эклиптикѣ чрезъ J, тогда

$$M'P=MS-MQ=\beta-M'Q\,.\,\text{tang}\,J=\beta-\lambda\,SS'.\,\text{tang}\,J$$

или

$$M'P=\beta-\lambda\beta\,.\,\text{tang}\,\gamma\,.\,\text{tang}\,J$$

слѣдовательно искомое разстояніе Δ центровъ солнца и луны по прошествіи промежутка времени t послѣ соединенія будетъ

(200) $$\Delta^2=\beta^2\left[(\lambda-1)^2\,\text{tang}^2\,\gamma+(1-\lambda\,\text{tang}\,J\,.\,\text{tang}\,\gamma)^2\right]$$

Чтобы найти величину γ, при которой это разстояніе достигаетъ minimum своего значенія, возьмемъ отъ предыдущаго уравненія производную по γ и тогда получимъ

$$\frac{d\Delta}{d\gamma}=\frac{\beta^2}{\Delta\cos^2\gamma}\left[(\lambda-1)^2\,\text{tang}\,\gamma-\lambda\,(1-\lambda\,\text{tang}\,J\,.\,\text{tang}\,\gamma)\,\text{tang}\,J\right]$$

очевидно, что условіе minimum приведется къ

$$(\lambda-1)^2\,\text{tang}\,\gamma-\lambda\,(1-\lambda\,\text{tang}\,J\,.\,\text{tang}\,\gamma)\,\text{tang}\,J=o$$

откуда

$$\text{tang}\,\gamma=\frac{\lambda\,.\,\text{tang}\,J}{(\lambda-1)^2+\lambda^2\,\text{tang}^2\,J}$$

Этимъ опредѣляется величина γ, при которой Δ достигаетъ minimum своего значенія. Подставляя найденное выраженіе $\operatorname{tang}\gamma$ въ уравненіе (200), получимъ

$$\Delta^2 = \frac{\beta^2 (\lambda - 1)^2}{(\lambda - 1)^2 + \lambda^2 . \operatorname{tang}^2 J}$$

если положимъ здѣсь для краткости

$$\frac{\lambda . \operatorname{tang} J}{\lambda - 1} = \operatorname{tang} J'$$

то величина наименьшаго геоцентрическаго разстоянія центровъ солнца и луны около времени соединенія этихъ свѣтилъ по долготѣ будетъ

$$\Delta = \beta . \cos J'$$

Для наблюдателя съ поверхности земли это разстояніе измѣнится приблизительно на разность параллаксовъ солнца и луны и въ извѣстномъ случаѣ уменьшится на величину разности этихъ параллаксовъ, поэтому если назовемъ горизонтальный параллаксъ луны чрезъ π, а горизонтальный параллаксъ солнца чрезъ π', то наименьшее разстояніе Δ_1 центровъ солнца и луны видимое съ поверхности земли можно представить въ видѣ

$$\Delta_1 = \Delta - (\pi - \pi')$$

Если это разстояніе Δ_1 будетъ равно суммѣ видимыхъ радіусовъ солнца и луны, то очевидно, что для наблюдателя находящагося на поверхности земли наибольшій фазъ затмѣнія будетъ состоять въ простомъ прикосновеніи краевъ солнца и луны; а потому, назвавъ видимые радіусы луны и солнца чрезъ s и s', выразимъ условіе существованія затмѣнія неравенствомъ

$$\Delta - (\pi - \pi') < s + s'$$

или

$$\Delta < \pi - \pi' + s + s'$$

или

$$\beta < (\pi - \pi' + s + s') \sec J'$$

Для различныхъ затмѣній J' измѣняется мало; за среднюю величину $\sec J'$ можно считать 1.00472, ибо наибольшее значеніе J есть $5^\circ\, 20'\, 6''$, а наименьшее $4^\circ\, 57'\, 22''$; наибольшее значеніе λ есть 16.19, наименьшее 10.89. И такъ затмѣніе будетъ имѣть мѣсто, если

$$\beta < (\pi - \pi' + s + s')\, 1.00472$$

или если

$$\beta < (\pi - \pi' + s + s') + (\pi - \pi' + s + s')\, 0.00472$$

Послѣдній членъ неравенства измѣняется отъ $20''$ до $30''$, а потому, взявъ его среднюю величину, съ достаточною точностію для всѣхъ случаевъ затмѣній будемъ имѣть такое условіе существованія явленія

$$\beta < \pi - \pi' + s + s' + 25''$$

Если въ это неравенство вносомъ наибольшія значенія для π, s, s' и наименьшее значеніе для π', то получимъ высшій предѣлъ, котораго можетъ достигать лунная широта во время соединенія обоихъ свѣтилъ и затмѣніе еще будетъ имѣть мѣсто. Такъ какъ наибольшія значенія π', s и s' суть

$$\pi = 1^\circ\ 1'\ 32'', \qquad s = 16'\ 46''; \qquad s' = 16'\ 18''$$

а наименьшее значеніе π' есть $8''$, то упомянутый высшій предѣлъ для β будетъ

$$1^\circ\ 34'\ 33''$$

Если же въ предыдущее неравенство поставимъ наименьшія величины π, s, s' и наибольшую величину для π', т. е. если сдѣлаемъ

$$\pi = 52'\ 50'', \qquad s = 14'\ 24'', \qquad s' = 15'\ 45'', \qquad \pi' = 9''$$

то найдемъ, что низшимъ предѣломъ лунной широты во время соединенія, для котораго затмѣніе можетъ не случится, будетъ величина

$$1^\circ\ 23'\ 15''$$

Отсюда заключаемъ, что солнечное затмѣніе необходимо произойдетъ, если широта луны во время ея геоцентрическаго соединенія съ солнцемъ будетъ менѣе $1^\circ\ 23'\ 15''$; напротивъ солнечное затмѣніе будетъ невозможно, если во время упомянутаго соединенія широта луны будетъ болѣе $1^\circ\ 34'\ 53$. Если же окажется, что во время геоцентрическаго соединенія широта луны заключается между предѣлами $1^\circ\ 34'\ 53''$ и $1^\circ\ 23'\ 15''$. то существованіе затмѣнія будетъ сомнительно.

Убѣдившись, что затмѣніе при данномъ геоцентрическомъ соединеніи центровъ солнца и луны по долготѣ существуетъ, можемъ приступить къ подробному предвычисленію затмѣнія.

23. Луна освѣщенная солнцемъ въ противуположную сторону отъ этого свѣтила отбрасываетъ коническую тѣнь и подобной же формы полутѣнь. Наблюдатель на поверхности земли тогда только можетъ видѣть затмѣніе солнца, когда будетъ находиться внутри одной изъ этихъ коническихъ поверхностей; слѣдовательно возможность солнечнаго затмѣнія для наблюдателя на землѣ обусловливается извѣстнымъ положеніемъ мѣста наблюденія относительно коническихъ поверхностей тѣни и полутѣни луны. Уравненія этихъ поверхностей, представленныя въ извѣстной формѣ, принимаются за основныя уравненія теоріи затмѣній. Мы можемъ представить себѣ двѣ коническихъ поверхности обертывающихъ солнце и луну. Вершина одной изъ нихъ находится на линіи соединяющей центры обоихъ свѣтилъ и расположена между этими центрами; вершина другой конической поверхности лежитъ на продолженіи той же прямой линіи, въ сторонѣ луны и отъ солнца далѣе этой послѣдней. Часть первой поверхности ограничиваетъ собою лунную полутѣнь; часть второй поверхности служитъ границею тѣни. Когда глазъ наблюдателя находится на первой конической поверхности, на поверхности конуса полутѣни, тогда онъ видитъ внѣшнее прикосновеніе краевъ солнца и луны при началѣ или концѣ, такъ называемаго, частнаго затмѣнія солнца; если же глазъ наблюдателя вступитъ на вторую коническую поверхность, на поверхность лунной тѣни, то онъ увидитъ внутреннее прикосновеніе краевъ затмѣвающаго и затмѣваемаго свѣтилъ при началѣ или концѣ полнаго или кольцеобразнаго затмѣнія солнца. Если продолжимъ образующія линіи конуса тѣни по другую сторону вершины этой

поверхности и по направленію къ землѣ, то получимъ расходящійся конусъ тѣни. Когда глазъ наблюдателя находится на поверхности конуса тѣни между его вершиною и луною, то онъ будетъ видѣть внутреннее прикосновеніе краевъ свѣтилъ при началѣ или концѣ полнаго затмѣнія солнца. Если же глазъ наблюдателя помѣщается на поверхности расходящагося конуса тѣни, между его вершиною и землею, то онъ увидитъ внутреннее прикосновеніе краевъ при началѣ или концѣ кольцеобразнаго затмѣнія. Соображая все это, заключаемъ, что аналитическое условіе возможности видѣть начало или конецъ затмѣнія будетъ состоять въ томъ, что для этихъ фазовъ явленія разстояніе глаза наблюдателя отъ оси конуса тѣни должно равняться радіусу сѣченія конуса тѣни плоскостію проведенною чрезъ глазъ наблюдателя перпендикулярно къ оси конуса. И такъ прежде всего найдемъ уравненіе конуса тѣни и полутѣни и радіусы ихъ сѣченій упомянутою сейчасъ плоскостію.

Представимъ себѣ слѣдующее расположеніе системы прямоугольныхъ осей координатъ. Пусть начало координатъ находится въ центрѣ земли, ось z пусть идетъ параллельно общей оси обоихъ конусовъ и положительный конецъ этой оси пусть будетъ расположенъ въ той сторонѣ, гдѣ находятся солнце и луна. Пусть ось x будетъ расположена въ плоскости эклиптики, положительный конецъ этой оси пусть пересѣкается со сферой небесной въ точкѣ, имѣющей широту 0^0 и долготу $90^0 + \lambda$. Положительный конецъ оси y пусть встрѣчаетъ сферу небесную въ точкѣ, долгота которой есть λ, а широта $90^0 + \beta$. При этомъ мы принимаемъ, что точка пересѣченія оси z со сферой небесной имѣетъ долготу λ и широту β. Слѣдовательно оси z и y расположены въ одномъ кругѣ широты. Назовемъ координаты центра солнца относительно принятой системы осей чрезъ P_0, Q_0, Z_0, координаты центра луны пусть будутъ P, Q, Z и координаты мѣста наблюденія — p, q, z. Представимъ себѣ систему осей параллельныхъ предыдущимъ, но имѣющихъ начало въ мѣстѣ наблюденія. Назовемъ координаты луны относительно такой системы осей чрезъ P', Q', Z'. Понятно, что

$$P' = P - p; \qquad Q' = Q - q; \qquad Z' = Z - z$$

Координаты P мы считаемъ по оси x, а координаты Q по оси y. Чтобы имѣть въ виду опредѣленный случай, будемъ разсматривать конусъ полутѣни, вершина котораго расположена между центрами солнца и луны. Пусть линіи Tx, Ty, Tz (фиг. 13) представляютъ собою оси упомянутой системы координатъ, имѣющей начало въ центрѣ земли, въ точкѣ T. Пусть центръ луны находится въ L, центръ солнца въ S, вершина конуса полутѣни въ A, мѣсто наблюденія въ точкѣ M на поверхности конуса полутѣни. Назовемъ разстояніе глаза наблюдателя отъ вершины конуса полутѣни чрезъ Δ, т. е. положимъ $MA = \Delta$. Пусть уголъ какой либо образующей конуса полутѣни съ осью конуса будетъ f, такъ что $MAB = f$. Назовемъ чрезъ θ уголъ плоскости, проведенной чрезъ разсматриваемую образующую и ось конуса, съ плоскостію yz. Пусть наконецъ разстояніе AB вершины конуса полутѣни отъ плоскости xy будетъ s. Очевидно, что $MC = \Delta . \sin f$; $AC = s - z$, а потому

$$P - p = \Delta . \sin f \sin \theta$$
$$Q - q = \Delta . \sin f . \cos \theta$$
$$s - z = \Delta . \cos f$$

Опредѣляя Δ изъ послѣдняго уравненія и внося найденную величину въ два первыя, получимъ

$$P - p = (s - z) \tang f . \sin \theta$$
$$Q - q = (s - z) \tang f . \cos \theta$$

возвышая эти уравненія въ квадратъ и потомъ складывая, получимъ

(201) $$(P - p)^2 + (Q - q)^2 = (s - z)^2 . \tang^2 f$$

искомое уравненіе конуса полутѣни. Его можно представить нѣсколько въ иной формѣ, въ зависимости отъ радіусовъ тѣхъ сѣченій коническихъ поверхностей, о которыхъ мы говорили. Если назовемъ чрезъ u радіусъ сѣченія конуса полутѣни плоскостію перпендикулярною къ оси и проведенною чрезъ мѣсто наблюденія, то понятно, что

(201_1) $$(P - p)^2 + (Q - q)^2 = u^2$$

На нашемъ чертежѣ $MC = u$. Пусть радіусы луны и солнца, выраженные въ линейной мѣрѣ, будутъ k и k'. При этихъ означеніяхъ разстояніе AL вершины конуса отъ центра луны представится чрезъ $\frac{k}{\sin f}$, разстояніе той же вершины отъ плоскости проведенной черезъ мѣсто наблюденія, т. е. разстояніе AC выразится суммой

$$AL + LC = \frac{k}{\sin f} + Z'$$

Послѣ этого легко видѣть, что

(202) $$u = \left[Z' + \frac{k}{\sin f}\right] \cdot \tang f = \left[Z' \sin f + k\right] \sec . f$$

или наконецъ

(202_1) $$u = [k + (Z - z) \sin f] \sec f$$

Изъ фигуры 13 видно, что $NB_1 = M_1B_1 + NM_1$, но если назовемъ чрезъ u' радіусъ сѣченія конуса полутѣни плоскостью xy первоначальной системы осей координатъ и замѣтимъ, что $M_1B_1 = MC = u$; $NB_1 = u'$, то понятно, что

(203) $$u' = u + z . \tang f$$

Опредѣляя отсюда u и внося найденную величину въ уравненіе (201_1), получимъ

(204) $$(P - p)^2 + (Q - q)^2 = [u' - z . \tang f]^2$$

уравненіе конуса полутѣни въ зависимости отъ радіуса u'

Уравненіе конуса тѣни также заключается въ формѣ (201). Чтобы показать различіе формъ уравненій двухъ коническихъ поверхностей, введемъ въ уравненіе (201) радіусы солнца и луны, т. е. тѣ величины, которыя мы означили чрезъ k' и k. Для того чтобы видѣть внѣшнее прикосновеніе краевъ затмѣвающаго и затмѣваемаго свѣтилъ, глазъ наблюдателя долженъ находиться на той конической поверхности, вершина которой лежитъ между центрами солнца и луны; поэтому понятно, что для внѣшняго прикосновенія краевъ $s > Z$ и $s < Z_0$. Для того чтобы видѣть внутреннее прикосновеніе краевъ свѣтилъ, глазъ наблюдателя долженъ находиться на поверхности конуса тѣни; если разстояніе вершины конуса тѣни отъ плоскости xy опять означимъ

чрезъ s, то для внутренняго прикосновенія краевъ $s < Z_0$ и $s < Z$. Разсматривая треугольники SAa и ALb, и полагая $AB_1 = s$, имѣемъ

$$\frac{Z_0 - s}{k'} = \frac{s - Z}{k}$$

$$(s - Z) \sin f = k; \qquad (Z_0 - s) \sin f = k'$$

Если назовемъ линейное разстояніе центровъ солнца и луны чрезъ G, то послѣднія два уравненія даютъ

$$k + k' = (Z_0 - Z) \sin f = G \,.\, \sin f,$$

а изъ приведенной пропорціи находимъ

$$s = \frac{Z_0 k + Z k'}{k + k'}$$

И такъ для конуса полутѣни и внѣшняго прикосновенія краевъ

$$s = \frac{Z_0\, k + Z k'}{k + k'}; \qquad k + k' = G \,.\, \sin f \tag{205}$$

Подобнымъ же образомъ изъ треугольниковъ $Sa'B$ и $Lb'B$ имѣемъ

$$\frac{Z_0 - s}{k'} = \frac{Z - s}{k}$$

$$(Z - s) \sin f = k; \qquad (Z_0 - s) \sin f = k'$$

(здѣсь подъ s разумѣемъ линію BB_1), откуда для конуса тѣни и внутренняго прикосновенія краевъ, находимъ

$$s = \frac{k' Z - Z_0\, k}{k' - k}; \qquad k' - k = G \,.\, \sin f \tag{206}$$

но какъ эти уравненія, такъ равно и уравненія (205) заключаются въ формѣ

$$s = \frac{k' Z \pm Z_0\, k}{k' \pm k}; \qquad k' \pm k = G \,.\, \sin f \tag{207}$$

Послѣднее дастъ

$$\operatorname{tang} f = \frac{k' \pm k}{\sqrt{G^2 - (k' \pm k)^2}} \tag{208}$$

Внося эту величину $\operatorname{tang} f$ и предыдущую величину s въ уравненіе (201), получаемъ

$$(P - p)^2 + (Q - q)^2 = \frac{[k' (Z - z) \pm k (Z_0 - z)]^2}{G^2 - (k' \pm k)^2}. \tag{209}$$

уравненіе, которое представляетъ какъ поверхность тѣни, такъ равно и поверхность полутѣни. Если координаты p, q, z удовлетворяютъ этому уравненіе для верхнихъ знаковъ, то глазъ наблюдателя находится на поверхности конуса полутѣни и видитъ внѣшнее прикосновеніе краевъ солнца и луны при началѣ или концѣ частнаго затмѣнія. Если координаты p, q, z удовлетворяютъ предыдущему уравненію для нижнихъ знаковъ, то глазъ наблюдателя находится на поверхности конуса тѣни и видитъ внутреннее прикосновеніе краевъ затмѣвающаго и затмѣваемаго свѣтилъ.

Предыдущее уравненіе легко привести къ виду (204). Внесемъ въ него для этого вмѣсто Z_0 его величину $Z+G$, тогда оно приметъ видъ

$$(P-p)^2+(Q-q)^2=\frac{[Z(k'\pm k)-z(k'\pm k)\pm kG]^2}{G^2-(k'\pm k)^2};$$

полагая здѣсь

$$l=\frac{Z(k'\pm k)\pm kG}{\sqrt{G^2-(k'\pm k)^2}};\qquad i=\operatorname{tang} f=\frac{k'\pm k}{\sqrt{G^2-(k'\pm k)^2}}$$

находимъ

$$(P-p)^2+(Q-q)^2=(l-i.z)^2$$

Сравнивая это съ уравненіемъ (204), заключаемъ что $l=u'$. Но такъ какъ легко видѣть, что

$$\sec f=\frac{G}{\sqrt{G^2-(k'\pm k)^2}}$$

то предыдущее выраженіе l или, что все равно, u' можно представить въ видѣ

$$l=u'=Z.\operatorname{tang} f\pm k.\sec f$$

или

(210) $$u'=(Z\sin f\pm k)\sec f$$

гдѣ, какъ прежде, верхній знакъ соотвѣтствуетъ конусу полутѣни, а нижній—конусу тѣни.

Въ основное уравненіе (209) входитъ между прочимъ величина k', т. е. радіусъ солнца выраженный въ линейной мѣрѣ. Для вычисленія его назовемъ чрезъ H угловой радіусъ солнца, видимый на разстояніи земли отъ солнца равномъ единицѣ, т. е. на среднемъ разстояніи земли отъ солнца. Означимъ чрезъ R это среднее разстояніе выраженное въ экваторіальныхъ радіусахъ земли, тогда изъ треугольника между центрами солнца, луны и точкой прикосновенія касательной, проведенной изъ центра земли къ солнцу, получимъ

$$k'=R.\sin H$$

Означимъ чрезъ π_0 горизонтальный экваторіальный параллаксъ солнца, соотвѣтствующій среднему разстоянію земли отъ солнца, тогда

$$R=\frac{1}{\sin\pi_0}$$

слѣдовательно

$$k'=\frac{\sin H}{\sin\pi_0}$$

Для вычисленія этой постоянной величины мы будемъ принимать $H=16'\,1''.82$; такая величина для H найдена изъ большаго ряда гриничскихъ наблюденій, обнимающаго собою періодъ времени отъ 1836 до 1847 года включительно. Что касается до двухъ другихъ постоянныхъ, именно до π_0 и k, то первую мы будемъ считать равною $8''.85$, а вторая по опредѣленію Гансева есть 0.272957.

Что касается до опредѣленія f, то его можно вычислять по второму изъ выраженія (207), но удобнѣе привести это выраженіе въ зависимость отъ параллаксовъ солнца и луны. Для времени близкаго къ соединенію луны съ солнцемъ можно допустить, что G равно разности разстояній этихъ свѣтилъ отъ земли. Если назовемъ разстояніе земли отъ солнца чрезъ r' и разстояніе луны отъ земли чрезъ r, экваторіальный горизонтальный параллаксъ солнца чрезъ π' и такой же параллаксъ луны чрезъ π и примемъ экваторіальный радіусъ земли за единицу, то какъ извѣстно

$$r' = \frac{1}{\sin \pi'}; \qquad r = \frac{1}{\sin \pi}$$

слѣдовательно

$$G = r' - r = \frac{\sin \pi - \sin \pi'}{\sin \pi . \sin \pi'}$$

но такъ какъ π' и π суть малыя дуги, то можемъ допустить

$$G = \frac{\sin \pi . \cos \pi' - \cos \pi . \sin \pi'}{\sin \pi . \sin \pi'} = \frac{\sin (\pi - \pi')}{\sin \pi . \sin \pi'}$$

внося это во второе изъ уравненій (207), получимъ выраженіе

$$\sin f = \frac{(k' \pm k) . \sin \pi . \sin \pi'}{\sin (\pi - \pi')} \tag{211}$$

которымъ будемъ пользоваться для вычисленія f.

Разсмотримъ наконецъ отношеніе величинъ входящихъ въ основное уравненіе (204) къ различнымъ фазамъ солнечнаго затмѣнія; покажемъ на сколько могутъ эти величины характеризовать собою затмѣніе, какъ для всей земли вообще, такъ и для данной точки ея поверхности. Для конуса полутѣни $s - z$ есть всегда положительная величина, для конуса же тѣни разность $s - z$ можетъ быть и положительною и отрицательною. Если вершина конуса тѣни падаетъ ниже плоскости проведенной параллельно плоскости xy чрезъ мѣсто наблюденія, то $s - z$ отрицательна; но при такомъ расположеніи упомянутой вершины наблюдатель можетъ вступить въ самый конусъ тѣни и видѣть полное затмѣніе солнца.

Если же вершина конуса тѣни будетъ находиться къ лунѣ ближе, чѣмъ плоскость, проведенная черезъ мѣсто наблюденія параллельно плоскости xy, то мѣсто наблюденія вступитъ въ извѣстное время не въ самый конусъ тѣни, а въ конусъ составленный изъ продолженія образующихъ, и наблюдатель увидитъ кольцеобразное затмѣніе; но при такомъ положеніи вершины конуса тѣни разность $s - z$ будетъ положительна. Соображая все это, заключаемъ, что положительная разность $s - z$ соотвѣтствуетъ кольцеобразному затмѣнію, а отрицательная—полному. Такъ какъ

$$u = (s - z) \sin f$$

и f есть положительная величина для обоихъ конусовъ, то знакъ u будетъ зависѣть только отъ знака разности $s - z$ и для внутренняго прикосновенія краевъ u будетъ отрицательно при полномъ, а положительно при кольцеобразномъ затмѣніи солнца.

Величиною u опредѣляется разстояніе мѣста наблюденія отъ оси конуса полутѣни. Въ то время какъ это мѣсто находится на поверхности конуса, наблюдатель видитъ внѣшнее прикосновеніе краевъ затмѣвающаго и затмѣваемаго свѣтилъ. Чѣмъ

менѣе становится это разстояніе, тѣмъ болѣе приближается наблюдатель къ оси конуса, и тѣмъ болѣе становится фазъ затмѣнія. Слѣдовательно величина фаза можетъ быть характеризована величиною упомянутаго разстоянія. Легко опредѣлить величину этого разстоянія, которое назовемъ вообще чрезъ Δ, для какого нибудь фаза затмѣнія. Предположимъ, что мѣсто наблюденія вступило въ конусъ полутѣни, соединимъ его въ этомъ положеніи съ вершиной конуса и назовемъ уголъ, который составляетъ эта соединяющая линія съ осью конуса чрезъ φ. Понятно, что чѣмъ болѣе будетъ для наблюдателя фазъ затмѣнія, тѣмъ менѣе будетъ уголъ φ. Опредѣлимъ значеніе φ для какого угодно фаза. Условимся дѣлить діаметръ солнца на 12 частей (которыя будемъ называть дюймами) и выражать величину всякаго фаза въ единицахъ такихъ частей. Предположимъ, что уголъ φ соотвѣтствуетъ фазу въ i дюймовъ. Величина одного дюйма выразится чрезъ $\frac{k'}{12}$. Когда луна закроетъ i дюймовъ, то можно принять, что видимый радіусъ солнца уменьшился на величину $\frac{k'}{6}i$. Слѣдовательно если для внѣшняго прикосновенія краевъ величина f опредѣляется изъ уравненія

$$\sin f = \frac{k + k'}{G}$$

то этимъ уравненіемъ можемъ пользоваться и для опредѣленія φ если вмѣсто k' поставимъ величину $k' - \frac{k'}{6} \cdot i$, и такъ

$$\sin\varphi = \frac{k + \left(k' - \frac{k'}{6}\, i\right)}{G}$$

откуда

$$\sin\varphi = \frac{k + k'}{G} - \frac{2k'}{12.G} \cdot i = \frac{k + k'}{G} - \frac{\left(\frac{k + k'}{G}\right) - \left(\frac{k - k'}{G}\right)}{12}\, i$$

Предположимъ, что значенія f для внѣшняго и внутренняго прикосновенія краевъ найдены; означимъ величину f соотвѣтствующую внѣшнему чрезъ f_1, а внутреннему чрезъ f_2, тогда

$$\sin f_1 = \frac{k + k'}{G}\,; \quad \sin f_2 = \frac{k' - k}{G}$$

и предыдущее принимаетъ видъ

$$\sin\varphi = \sin f_1 - \frac{\sin f_1 + \sin f_2}{12}\, i \tag{212}$$

Разстояніе u глаза наблюдателя отъ оси конуса тѣни, соотвѣтствующее фазу внѣшняго прикосновенія краевъ, опредѣляется изъ уравненія

$$u = (k + Z' . \sin f) \sec f$$

Если вмѣсто f поставимъ сюда величину φ соотвѣтствующую фазу въ i дюймовъ, то получимъ выраженіе для вычисленія искомаго Δ. И такъ

$$\Delta = (k + Z' . \sin\varphi) \sec\varphi \tag{213}$$

24. Возможность затмѣнія для даннаго мѣста земной поверхности объусловливается извѣстнымъ положеніемъ конуса тѣни и полутѣни относительно этого мѣста, но положеніе конуса опредѣляется положеніемъ его оси. Посмотримъ, какимъ образомъ можетъ быть для всякаго времени опредѣлено положеніе этой прямой линіи. Рѣшеніе этого вопроса приводится къ опредѣленію координатъ β и λ по даннымъ, непосредственно получаемымъ изъ астрономическихъ эфемеридъ. Замѣтимъ еще, что опредѣленіе координатъ λ и β однозначительно съ опредѣленіемъ той точки сферы небесной, въ которой видѣнъ центръ солнца изъ центра луны въ данное время, т. е. съ опредѣленіемъ селеноцентрическихъ координатъ солнца. Примемъ эклиптику за плоскость xy, ось y направимъ въ точку весенняго равноденствія, начало координатъ пусть будетъ въ центрѣ земли. Назовемъ координаты центра солнца относительно такой системы осей чрезъ x', y', z', координаты центра луны пусть будутъ x, y, z. Проведемъ систему осей параллельныхъ предыдущимъ, но имѣющихъ начало въ центрѣ луны, и назовемъ координаты солнца относительно такой системы осей чрезъ x'', y'', z''. Такъ какъ селеноцентрическія координаты солнца равны геоцентрическимъ координатамъ солнца безъ геоцентрическихъ координатъ луны, то

$$x'' = x' - x; \qquad y'' = y' - y; \qquad z'' = z' - z$$

Назовемъ геоцентрическія долготу и широту солнца чрезъ l', b', а разстояніе центра солнца отъ центра земли—чрезъ r'. Пусть тѣ же величины для луны будутъ l, b, r; тогда понятно, что для принятаго сейчасъ расположенія осей координатъ

$$\begin{aligned} x' &= r'.\cos b'.\sin l'; & x &= r.\cos b.\sin l \\ y' &= r'.\cos b'.\cos l'; & y &= r.\cos b.\cos l \\ z' &= r'.\sin b'; & z &= r.\sin b. \end{aligned}$$

понятно также, что

$$\begin{aligned} x'' &= G\cos\beta\sin\lambda \\ y'' &= G\cos\beta\cos\lambda \\ z'' &= G\sin\beta \end{aligned}$$

слѣдовательно

$$\begin{aligned} G.\cos\beta.\sin\lambda &= r'.\cos b'.\sin l' - r.\cos b.\sin l \\ G.\cos\beta.\cos\lambda &= r'.\cos b'.\cos l' - r.\cos b.\cos l \\ G.\sin\beta &= r'.\sin b' - r.\sin b \end{aligned}$$

Перенесемъ начало долготъ на уголъ l', т. е. будемъ считать долготы не отъ оси y, а отъ проложенія r' на плоскость xy, тогда предыдущія уравненія приведутся къ виду

$$\begin{aligned} G.\cos\beta.\sin(\lambda - l') &= r.\cos b.\sin(l' - l) \\ G.\cos\beta\ \cos(\lambda - l') &= r'.\cos b' - r.\cos b.\cos(l' - l) \\ G.\sin\beta &= r'.\sin b' - r.\sin b \end{aligned}$$

Эти уравненія служатъ для вычисленія искомыхъ λ, β, G по непосредственно даннымъ l, b, l', b', r', r. Но изъ нихъ можно получить другія, хотя менѣе точныя, но совершенно удовлетворительныя для того практическаго примѣненія, которое мы имѣемъ въ виду. Раздѣливъ для этого первое изъ предыдущихъ уравненій на второе, получимъ

$$\operatorname{tang}(\lambda - l') = \frac{r . \cos b . \sin (l' - l)}{r' . \cos b' - r \cos b . \cos (l' - l)}$$

Такъ какъ разность $l' - l$ въ продолженіи солнечнаго затмѣнія не можетъ быть болѣе полутора градуса и отношеніе $\frac{r}{r'}$ равно приблизительно $\frac{1}{400}$, то, раздѣливъ числителя и знаменателя на $r' \cos b'$ и разлагая полученное выраженіе по строкѣ (164), ограничимся первымъ членомъ строки и найдемъ

(214) $$\lambda = l' - \frac{r}{r'} \frac{\cos b}{\cos b'} \frac{\sin (l - l')}{\sin 1''}$$

подобнымъ же образомъ получимъ

$$\beta = b' - \frac{r}{r'} \cdot \frac{\cos b}{\cos b'} \frac{\sin (b - b')}{\sin 1''}.$$

Имѣя координаты λ и β, можемъ приступить къ опредѣленію координатъ P, Q, Z, p, q, z, входящихъ въ основныя уравненія теоріи затмѣній.

Представимъ себѣ, что около центра земли описана сфера радіусомъ равнымъ разстоянію луны отъ земли. Пусть въ P_1 (фиг. 14) будетъ полюсъ эклиптики и кругъ $zP_1 y$ — представляетъ сѣченіе разсматриваемой сферы плоскостію yz первоначальной системы осей координатъ, имѣющей ось z параллельную оси конуса тѣни. Ось x будетъ расположена въ эклиптикѣ по прямой Tx. Пусть центръ луны будетъ находиться на упомянутой сферѣ въ точкѣ L. Такъ какъ начало координатъ находится въ центрѣ земли, то $TL = r$. Если означимъ, какъ прежде, координаты луны относительно разсматриваемой системы осей чрезъ P, Q, Z, то

$$P = r . \cos (Lx), \qquad Q = r . \cos (Ly), \qquad Z = r . \cos (Lz)$$

Если соединимъ положеніе луны L большими кругами съ полюсомъ эклиптики и концами осей x, y, z, то составятся сферическіе треугольники xP_1L, yP_1L, zP_1L, стороны которыхъ суть $zP_1 = 90 - \beta$, $LP_1 = 90 - b$, $yP_1 = \beta$, $xP_1 = 90^0$ и углы $zP_1L = l - \lambda$; $yP_1L = 180^0 - (l - \lambda)$, $xP_1L = 90^0 - (l - \lambda)$; изъ этихъ треугольниковъ имѣемъ

$$\cos (xL) = \cos b . \sin (l - \lambda)$$
$$\cos (yL) = \sin b . \cos \beta - \cos b . \sin \beta \cos (l - \lambda)$$
$$\cos (zL) = \sin b . \sin \beta + \cos b . \cos \beta . \cos (l - \lambda)$$

а потому

(215) $$\begin{aligned} P &= r \cos b . \sin (l - \lambda) \\ Q &= r [\sin b . \cos \beta - \cos b . \sin \beta . \cos (l - \lambda)] \\ Z &= r [\sin b . \sin \beta + \cos b . \cos \beta . \cos (l - \lambda)] \end{aligned}$$

Если назовемъ какъ прежде чрезъ ϱ разстояніе мѣста наблюденія отъ центра земли, чрезъ L и B широту и долготу геоцентрическаго зенита этого мѣста и удержимъ прежнія означенія для прямолинейныхъ координатъ, то совершенно подобно предыдущему найдемъ

(216) $$\begin{aligned} p &= \varrho \cos B . \sin (L - \lambda) \\ q &= \varrho [\sin B \cos \beta - \cos B \sin \beta \cos (L - \lambda)] \\ z &= \varrho [\sin B \sin \beta + \cos B . \cos \beta \cos (L - \lambda)] \end{aligned}$$

25. Уравненіе конуса полутѣни или тѣни представленное въ формѣ (201,) можетъ быть замѣнено уравненіями

$$\begin{aligned} P - p &= u \,.\, \sin\theta \\ Q - q &= u \,.\, \cos\theta \end{aligned} \qquad (217)$$

гдѣ θ имѣетъ тоже значеніе какъ прежде, т. е. представляетъ уголъ, заключающійся между плоскостію yz первоначальной системы осей и плоскостію проведенною чрезъ мѣсто наблюденія и ось конуса тѣни. Что касается до u, то оно какъ прежде имѣетъ выраженіе (202,), или представляется посредствомъ радіуса u' уравненіемъ (203), которое даетъ

$$u = u' - z \,.\, \operatorname{tang} f$$

гдѣ слѣдовательно

$$u' = (k + Z \,.\, \sin f) \sec f$$

Внося въ предыдущее выраженіе u, равно какъ и въ выраженія (217) вмѣсто координатъ P, Q, Z, p, q, z ихъ найденныя величины, получимъ

$$\begin{aligned} u &= u' - \rho\,[\sin B \sin\beta + \cos B \,.\, \cos\beta \cos(L - \lambda)] \operatorname{tang} f \\ u \,.\, \sin\theta &= r \,.\, \cos b \sin(l - \lambda) - \rho \,.\, \cos B \sin(L - \lambda) \\ u \,.\, \cos\theta &= r \,.\, [\sin b \,.\, \cos\beta - \cos b \,.\, \cos\beta \cos(l - \lambda)] \\ &\quad - \rho\,[\sin B \,.\, \cos\beta - \cos B \,.\, \cos\beta \,.\, \cos(L - \lambda)] \end{aligned} \qquad (218)$$

уравненія равносильныя основному уравненіе теоріи затмѣній.

Эти уравненія, какъ мы видимъ, содержатъ, между прочимъ, широту B и долготу L геоцентрическаго зенита мѣста наблюденія. Исключимъ ихъ и замѣнимъ склоненіемъ и прямымъ восхожденіемъ той же точки. Такое преобразованіе основныхъ уравненій можетъ быть произведено слѣдующимъ образомъ. Представимъ предыдущія уравненія въ видѣ

$$\begin{aligned} u &= u' - \rho \,.\, \sin B \sin\beta \operatorname{tang} f - \rho . \cos B \cos\beta \cos L \cos\lambda \operatorname{tang} f \\ &\qquad - \rho . \cos B \cos\beta \sin L . \sin\lambda \operatorname{tang} f. \\ u . \sin\theta &= P - \rho . \cos B \sin L \cos\lambda + \rho . \cos B \cos L \sin\lambda \\ u . \cos\theta &= Q - \rho . \sin B \cos\beta + \rho . \cos B \sin\beta \cos L \cos\lambda + \rho . \cos B \sin\beta \sin L \sin\lambda \end{aligned} \qquad (219)$$

Назовемъ чрезъ h уголъ между кругомъ склоненій и кругомъ широты проведенными чрезъ ту точку, въ которой пересѣкается со сферой небесной ось z, идущая параллельно оси конуса тѣни. Помножимъ второе изъ предыдущихъ уравненій на $\cos h$, третье—на $\sin h$ и вычтемъ послѣднее произведеніе изъ перваго; затѣмъ помножимъ второе изъ предыдущихъ уравненій на $\sin h$ и сложимъ произведеніе съ третьимъ уравненіемъ умноженнымъ на $\cos h$. Выполнивъ все это и положивъ $\theta - h = \theta'$, найдемъ

$$\begin{aligned} u \,.\, \sin\theta' &= P . \cos h - Q \,.\, \sin h + \rho \sin B \sin h \cos\beta \\ &\qquad - \rho \cos B \sin L\,[\cos h \cos\lambda + \sin h \sin\lambda \sin\beta] \\ &\qquad + \rho \cos B \cos L\,[\cos h \sin\lambda - \sin h \cos\lambda \sin\beta] \\ u \,.\, \cos\theta' &= P \,.\, \sin h + Q \,.\, \cos h - \rho \sin B \cos h \cos\beta \\ &\qquad - \rho \cos B \sin L\,[\sin h \cos\lambda - \cos h \sin\lambda \sin\beta] \\ &\qquad + \rho \cos B \cos L\,[\sin h \sin\lambda + \cos h \cos\lambda \sin\beta] \end{aligned} \qquad (220)$$

Не трудно представить себѣ геометрическое значеніе угла θ'. Пусть L' и M (фиг. 14) будутъ проэкція на плоскость xy центра луны и мѣста наблюденія. Очевидно, что линія $L'M$ будетъ проэкція на плоскость xy разстоянія луны отъ мѣста наблюденія. Плоскость, посредствомъ которой проэктируемъ это разстояніе, будетъ заключать въ себѣ и ось конуса тѣни. Уголъ этой плоскости съ плоскостію yz мы назвали чрезъ θ, но такъ какъ проэктирующая плоскость заключаетъ въ себѣ ось конуса тѣни, то она будетъ заключать и точку пересѣченія этой оси со сферой небесной, а также и точку пересѣченія со сферой небесной оси z той системы осей координатъ, которая проведена параллельно первоначальной системѣ, но имѣетъ начало въ мѣстѣ наблюденія. Такимъ образомъ проэктирующая плоскость пересѣчется со сферой небесной по большому кругу проведенному чрезъ видимое положеніе луны и конецъ оси z, т. е. по большому кругу zL; и такъ мы видимъ, что уголъ θ будетъ также равенъ углу LzP_1 или углу, заключающемуся между кругомъ широты проведеннымъ чрезъ точку z и большимъ кругомъ, соединяющимъ видимое положеніе луны съ точкою z. Такой уголъ называется угломъ положенія луны при точкѣ z, но этотъ уголъ положенія считается относительно круга широты. Такъ какъ дуга соединяющая точку z съ центромъ луны проходитъ также черезъ центръ солнца (ибо ось z взята параллельно линіи соединяющей центры солнца и луны), то уголъ θ будетъ общимъ угломъ положенія центровъ солнца и луны при точкѣ z. Если происходитъ прикосновеніе краевъ солнца и луны, то точка прикосновенія лежитъ на линіи соединяющей центры обоихъ свѣтилъ, а потому уголъ θ есть также уголъ положенія точки прикосновенія краевъ при точкѣ z; но такъ какъ ось z пересѣкается со сферой небесной въ точкѣ, въ которой виденъ центръ солнца изъ центра луны, то мы можемъ считать θ за уголъ положенія точки прикосновенія краевъ при центрѣ солнца. Вычитая изъ угла θ уголъ h, заключающійся между кругомъ склоненій и кругомъ широты, мы получаемъ уголъ θ', а потому этотъ послѣдній есть также уголъ положенія точки прикосновенія краевъ, но считаемый не отъ круга широты, а какъ обыкновенно отъ круга склоненій.

Разсмотримъ сферическій треугольникъ между полюсами экватора, эклиптики и точкой пересѣченія со сферой небесной оси z въ первоначальной системѣ осей координатъ. Если назовемъ склоненіе и прямое восхожденіе этой точки чрезъ δ и α, наклоненіе эклиптики къ экватору чрезъ ε, то упомянутый треугольникъ, какъ извѣстно, дастъ слѣдующія соотношенія

$$\begin{aligned}
&\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha \\
&\cos\beta\sin\lambda = \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\varepsilon\cos\delta\sin\alpha \\
&\sin\beta = \sin\delta\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\cos\delta\sin\alpha \\
&\cos\alpha\sin\varepsilon = \sin h\cos\beta \\
(221)\quad &\cos\alpha\cos\varepsilon = \cos h\cos\lambda + \sin h\sin\lambda\sin\beta \\
&\sin\alpha = \cos h\sin\lambda - \sin h\cos\lambda\sin\beta \\
&\cos\beta\cos h = \cos\delta\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon\sin\alpha \\
&\cos\alpha\sin\delta = \sin h\sin\lambda + \cos h\cos\lambda\sin\beta \\
&\sin h\cos\lambda - \cos h\sin\lambda\sin\beta = \cos\delta\sin\varepsilon - \sin\delta\cos\varepsilon\sin\alpha
\end{aligned}$$

Если назовемъ чрезъ φ' и μ склоненіе и прямое восхожденіе геоцентрическаго зенита мѣста наблюденія и разсмотримъ сферическій треугольникъ, заключающійся между

сѣверными полюсами экватора, эклиптики и геоцентрическимъ зенитомъ мѣста наблюденія, то сторонами этого треугольника будутъ: ε, $90^\circ - B$ и $90^\circ - \varphi'$ а углами, противуположными двумъ послѣднимъ сторонамъ, будутъ $90^\circ + \mu$ и $90^\circ - L$, гдѣ ε, L и B имѣютъ тѣже значенія какъ выше. Такой треугольникъ даетъ между прочимъ

$$\begin{aligned} \sin B &= \sin\varphi' \cos\varepsilon - \cos\varphi' \sin\varepsilon \sin\mu \\ \cos B \sin L &= \sin\varphi' \sin\varepsilon + \cos\varphi' \cos\varepsilon \sin\mu \\ \cos B \cos L &= \cos\varphi' \cos\mu \end{aligned} \tag{222}$$

Составимъ посредствомъ этихъ уравненій и предыдущихъ произведенія

$$\sin B \sin\beta\,,\quad \cos B\,.\sin L\,,\quad \cos\beta \sin\lambda\,,\quad \cos B \cos L\,,\quad \cos\beta\cos\lambda$$

и внесемъ ихъ въ первое изъ уравненій (219), тогда получимъ

$$\begin{aligned} u = u' &- \rho\,.\,\mathrm{tang}\, f\,[\sin\varphi' \cos\varepsilon - \cos\varphi' \sin\varepsilon \sin\mu]\,[\sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta \sin\varepsilon \sin\alpha] \\ &- \rho\,.\,\mathrm{tang}\, f\,[\sin\varphi' \sin\varepsilon + \cos\varphi' \cos\varepsilon \sin\mu]\,[\sin\delta \sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha] \\ &- \rho\,.\,\mathrm{tang}\, f \cos\varphi' \cos\mu \cos\delta \cos\alpha \end{aligned}$$

откуда легко находимъ

$$u = u' - \rho\,.\,\mathrm{tang}\, f\,[\sin\varphi' \sin\delta + \cos\delta \cos\varphi' \cos(\mu - \alpha)] \tag{223}$$

подобнымъ же образомъ слѣдуетъ преобразовать и уравненія (220); для этого, обращая сначала вниманіе на шесть послѣднихъ изъ уравненій (221), приводимъ уравненія (220) къ виду

$$\begin{aligned} u\,.\sin\theta' &= P.\cos h - Q\,.\sin h \\ &\quad + \rho\,[\sin B \cos\alpha \sin\varepsilon - \cos B \sin L \cos\alpha \cos\varepsilon + \cos B \cos L \sin\alpha] \\ u\,.\cos\theta' &= P.\sin h + Q.\cos h - \rho.\sin B\,[\cos\delta\cos\varepsilon + \sin\delta \sin\varepsilon \sin\alpha] \\ &\quad - \rho.\cos B \sin L\,[\cos\delta \sin\varepsilon - \sin\delta\cos\varepsilon\sin\alpha] \\ &\quad + \rho.\cos B \cos L \cos\alpha \sin\delta \end{aligned}$$

Наконецъ исключая отсюда величины $\sin B$, $\cos B.\sin L$ и $\cos B.\cos L$ посредствомъ уравненій (222), представляемъ послѣднія уравненія въ формѣ

$$\begin{aligned} u\,.\sin\theta' &= P.\cos h - Q \sin h - \rho\cos\varphi' \sin(\mu - \alpha) \\ u\,.\cos\theta' &= P.\sin h + Q.\cos h - \rho\,[\sin\varphi' \cos\delta - \cos\varphi' \sin\delta \cos(\mu - \alpha)] \end{aligned} \tag{224}$$

Уравненія (223) и (224) совершенно сходны по виду съ уравненіями (218), но имѣютъ то важное преимущество передъ ними, что въ уравненіяхъ (223) и (224) положеніе луны отнесено къ эклиптикѣ, а положеніе мѣста наблюденія къ экватору.

Что касается до вычисленія α, δ и h по даннымъ λ, β и ε, то для этого изъ сферическаго треугольника между полюсами экватора, эклиптики и той точкой сферы небесной, въ которой пересѣкается съ ней конецъ оси z, находимъ

$$\begin{aligned} \cos\delta \cos\alpha &= \cos\beta\,.\cos\lambda \\ \cos\delta \sin\alpha &= -\sin\beta \sin\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda \\ \sin\delta &= \quad\sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta \sin\varepsilon.\sin\lambda \\ \cos\beta \sin h &= \quad\sin\varepsilon\cos\alpha \end{aligned}$$

полагая

(225)
$$\begin{aligned} \sin\beta &= \sin\eta.\sin\zeta \\ \cos\beta.\sin\lambda &= \sin\eta\cos\zeta \\ \cos\beta.\cos\lambda &= \cos\eta \end{aligned}$$

приводимъ первыя три уравненія къ виду

(226)
$$\begin{aligned} \cos\delta\sin\alpha &= \sin\eta\cos(\varepsilon+\zeta) \\ \cos\delta\cos\alpha &= \cos\eta \\ \sin\delta &= \sin\eta\sin(\varepsilon+\zeta) \end{aligned}$$

Если изъ этихъ уравненій α и δ опредѣлены, то h найдется изъ уравненія

(227)
$$\sin h = \frac{\sin\varepsilon\cos\alpha}{\cos\beta}$$

Въ уравненія (224) входятъ координаты P и Q измѣняющіяся довольно быстро; интерполированіе ихъ для извѣстныхъ моментовъ можетъ осложнять вычисленіе, а потому замѣнимъ ихъ нѣкоторыми другими функціями.

Предположимъ, что для какого нибудь момента истиннаго времени T_0, считаемаго подъ меридіаномъ эфемеридъ,—момента близкаго ко времени геоцентрическаго соединенія центровъ солнца и луны по долготѣ, линейныя координаты луны будутъ P_0 и Q_0. Назовемъ часовыя измѣненія этихъ координатъ, имѣющія мѣсто вблизи времени T_0 чрезъ ΔP и ΔQ, тогда координаты луны для времени T, незначительно отдаленнаго отъ момента T_0, можно представить въ видѣ

$$\begin{aligned} P &= P_0 + (T - T_0)\,\Delta P \\ Q &= Q_0 + (T - T_0)\,\Delta Q. \end{aligned}$$

Назовемъ чрезъ T' промежутокъ времени протекшій отъ момента геоцентрическаго соединенія до момента T_0, тогда разность $T_0 - T'$ представитъ собою истинное время считаемое подъ меридіаномъ эфемеридъ въ моментъ геоцентрическаго соединенія солнца и луны по долготѣ; а разность $T - (T_0 - T')$ есть промежутокъ времени отъ момента геоцентрическаго соединенія до разсматриваемаго момента T. Означимъ координату Q соотвѣтствующую моменту геоцентрическаго соединенія чрезъ V и замѣтимъ, что для этого момента $P = 0$, ибо за плоскость yz принята плоскость круга широты проведеннаго чрезъ центръ солнца. При такихъ означеніяхъ найдемъ

(228)
$$\begin{aligned} P &= \quad\;\; [T - (T_0 - T')]\,\Delta P \\ Q &= V + [T - (T_0 - T')]\,\Delta Q \end{aligned}$$

Понятно, что если примемъ въ этихъ уравненіяхъ $T = T_0$, то P и Q обратятся въ P_0 и Q_0. Такимъ образомъ

(229)
$$\begin{aligned} P_0 &= T'.\Delta P \\ Q_0 &= V + T'.\Delta Q \end{aligned}$$

исключая посредствомъ перваго изъ этихъ выраженій T' изъ втораго, получимъ

(230)
$$V = Q_0 - \frac{\Delta Q}{\Delta P}\cdot P_0$$

Назовемъ чрезъ n часовое движеніе по плоскости xy проэкціи центра луны на эту плоскость и чрезъ N наклоненіи пути этой проэкціи къ оси y; тогда

$$\Delta P = n \, . \sin N; \qquad \Delta Q = n \, . \cos N \tag{231}$$

имѣя это, можно привести предыдущее уравненіе къ виду

$$V = Q_0 - P_0 \operatorname{cotg} N \tag{232}$$

Пусть линія AB (фиг. 15) представляетъ путь проэкціи центра луны по плоскости xy (для небольшаго промежутка времени мы принимаемъ его за прямолинейный). Назовемъ чрезъ γ кратчайшее разстояніе проэкціи центра луны на плоскость xy отъ начала координатъ, т. е. отъ центра земли. Тогда $OD = \gamma$. Такъ какъ въ моментъ соединенія по долготѣ центръ луны находится въ плоскости yz, то на нашемъ чертежѣ величина V представляется линіею AO. Слѣдовательно $\gamma = V . \sin N$. Линія AD равна произведеніе $V . \cos N$, а потому величина

$$\frac{V}{n} \cdot \cos N$$

представитъ собою то время, которое употребляетъ проэкція центра луны на плоскость xy для прохожденія отъ точки D до оси y. Пусть наконецъ проэкція центра луны находится на кратчайшемъ разстояніи отъ центра земли въ моментъ μ истиннаго времени, считаемаго подъ меридіаномъ эфемеридъ, и положимъ еще, что μ выражено въ градусахъ, тогда понятно, что

$$\mu = 15\,(T_0 - T') - \frac{15 . V}{n} \cdot \cos N \tag{233}$$

Внося въ найденныя выраженія γ и μ вмѣсто V его величину изъ уравненія (232), получимъ

$$\begin{aligned} \gamma &= Q_0 \sin N - P_0 \cos N \\ \mu &= 15\,(T_0 - T') - 15 \left[\frac{Q_0 \sin N - P_0 \cos N}{n \, . \sin N}\right] \cos N \end{aligned} \tag{234}$$

но такъ какъ $\Delta P = n . \sin N$, то первое изъ уравненій (229) дастъ

$$T' = \frac{P_0}{n \, . \sin N}$$

а слѣдовательно

$$\mu = 15\, T_0 - \frac{15}{n} \left[Q_0 \cos N + P_0 \sin N \right] \tag{235}$$

Времена T_0 и T считаются по времени меридіана эфемеридъ, чтобы выразить ихъ во времени мѣста наблюденія, назовемъ долготу этого послѣдняго представленную въ градусахъ и считаемую отъ меридіана эфемеридъ чрезъ λ. Пусть τ будетъ истинное время считаемое въ мѣстѣ наблюденія въ тотъ моментъ, когда подъ меридіаномъ эфемеридъ считается время $15\, T = t$. Если предположимъ, что τ выражено также въ дугѣ, то получимъ

$$t = \tau - \lambda$$

Имѣя все это, представимъ координаты P и Q въ зависимости отъ γ, μ, τ и λ; для этого изъ уравненія (233) имѣемъ

$$T_0 - T' = \frac{\mu}{15} + \frac{V}{n} \cdot \cos N$$

а такъ какъ

$$\gamma = V . \sin N$$

то

$$T_0 - T' = \frac{\mu}{15} + \frac{\gamma}{n} \operatorname{cotg} N$$

Если замѣтимъ кромѣ того, что

$$T = \frac{\tau - \lambda}{15}$$

то внося эти величины $T_0 - T'$ и T въ уравненія (228) и обращая при этомъ вниманіе на выраженія

$$\Delta P = n . \sin N, \qquad \Delta Q = n \cos N$$

легко находимъ

(236)
$$P = -\gamma . \cos N + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15} n . \sin N$$
$$Q = \gamma . \sin N + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15} n . \cos N$$

изъ этихъ уравненій, полагая

$$N' = N - h,$$

составляемъ

(237)
$$P \cos h - Q . \sin h = -\gamma . \cos N' + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15} n . \sin N'$$
$$P . \sin h + Q . \cos h = \gamma . \sin N' + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15} n . \cos N'$$

Въ основныя уравненія (224) входитъ еще звѣздное время μ (которое отнюдь нельзя смѣшивать съ величиною μ, входящею въ послѣднія уравненія). Замѣнимъ его истиннымъ. Для этого назовемъ геоцентрическія прямое восхожденіе и склоненіе солнца чрезъ a и d, тогда очевидно, разумѣя подъ μ упомянутое звѣздное время, будемъ имѣть

$$\mu - a = \tau$$

ибо истинное время есть часовой уголъ центра истиннаго солнца. Положимъ, что $\alpha - a = -\Delta\alpha$, тогда, вычитая это изъ предыдущаго, имѣемъ

(238) $$\mu - \alpha = \tau + \Delta\alpha$$

Если внесемъ это вмѣстѣ съ выраженіями (237) въ наши основныя уравненія (224) и въ уравненіе (223), то получимъ

$$u = u' - \rho \,.\, \mathrm{tang}\, f\,[\sin\varphi' \sin\delta + \cos\varphi' \cos\delta \cos(\tau + \Delta\alpha)]$$

$$u.\sin\theta' = -\gamma.\cos N' + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15}\, n.\sin N' - \rho\cos\varphi' \sin(\tau + \Delta\alpha)$$ (239)

$$u.\cos\theta' = \gamma.\sin N' + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15}\, n.\cos N' - \rho\left[\sin\varphi' \cos\delta - \cos\varphi' \sin\delta \cos(\tau + \Delta\alpha)\right]$$

Знаніе величинъ n и N, а слѣдовательно и зависящій отъ N величины N' обусловливается знаніемъ разностей ΔP и ΔQ. Касательно вычисленія этихъ послѣднихъ считаемъ не лишнимъ сдѣлать одно замѣчаніе. Положимъ, что для какихъ нибудь моментовъ

$$T_1 + 2^h,\quad T_1 + 1^h,\quad T_1,\quad T_1 - 1^h,\quad T_1 - 2^h$$

мы нашли посредствомъ уравненій (215) слѣдующія значенія координатъ P и Q:

$$P_2,\quad Q_2;\quad P_1,\quad Q_1;\quad P_0,\quad Q_0;\quad P_{-1},\quad Q_{-1};\quad P_{-2},\quad Q_{-2}.$$

тогда изъ этого ряда мы получимъ слѣдующія значенія ΔP и ΔQ

$$\begin{aligned}
\Delta P_2 &= \frac{P_2 - P_0}{2}; & \Delta Q_2 &= \frac{Q_2 - Q_0}{2}\\
\Delta P_1 &= P_1 - P_0; & \Delta Q_1 &= Q_1 - Q_0\\
\Delta P_{-1} &= P_0 - P_{-1}; & \Delta Q_{-1} &= Q_0 - Q_{-1}\\
\Delta P_{-2} &= \frac{P_0 - P_{-2}}{2}; & \Delta Q_{-2} &= \frac{Q_0 - Q_{-2}}{2}.
\end{aligned}$$ (240)

гдѣ ΔP_2 и ΔQ_2 соотвѣтствуютъ моменту $T_1 + 2^h$; ΔP_1 и ΔQ_1 — моменту $T_1 + 1^h$ и т. д. Если бы мы хотѣли опредѣлить по этому способу величины ΔP_0 и ΔQ_0, соотвѣтствующія моменту T_1, то нашли бы для нихъ $\frac{0}{0}$; чтобы избѣжать этой неопредѣленности, мы употребимъ интерполяціонный пріемъ, который дастъ намъ

$$\Delta P_0 = \frac{P_1 - P_{-1}}{2} + \frac{2(P_1 - P_{-1}) - (P_2 - P_{-2})}{12}$$ (241)

$$\Delta Q_0 = \frac{Q_1 - Q_{-1}}{2} + \frac{2(Q_1 - Q_{-1}) - (Q_2 - Q_{-2})}{12}.$$

Основныя уравненія (239) должны быть подвергнуты еще нѣкоторымъ преобразованіямъ. Одно изъ такихъ преобразованій заключается въ исключеніи ρ, зависящаго отъ геоцентрической широты мѣста наблюденія φ'. Это исключеніе необходимо для того, чтобы широта мѣста, которую во многихъ случаяхъ мы будемъ разсматривать какъ неизвѣстную величину, входила въ уравненія вопроса явно. Исключеніе ρ легко выполнится, если мы въ наши основныя уравненія вмѣсто геоцентрической широты введемъ широту приведенную. Означая сжатіе земли черезъ c, имѣемъ

$$c = 1 - \frac{b}{a}$$

гдѣ подъ a и b разумѣемъ большую и малую полуоси эллиптическаго меридіана земли. Мы знаемъ также, что

$$e^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

слѣдовательно

$$e^2 = 1 - (1 - c)^2; \qquad \sqrt{1 - e^2} = 1 - c$$

Связь между астрономической и геодезической или геоцентрической широтой представляется уравненіями (178). Если назовемъ приведенную широту чрезъ φ_1, то соотношеніе между, астрономической и приведенной широтой представляется по уравненіямъ (182) въ видѣ

$$\cos \varphi_1 = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 . \sin^2 \varphi}}; \qquad \sin \varphi_1 = \frac{\sin \varphi \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 . \sin^2 \varphi}}$$

Сравнивая это съ выраженіями (178), въ которыхъ примемъ $a = 1$, найдемъ

$$\rho . \cos \varphi' = \cos \varphi_1$$
$$\rho . \sin \varphi' = \sqrt{1 - e^2} \sin \varphi,$$

но такъ какъ $\sqrt{1 - e^2} = 1 - c$, то искомыя соотношенія между геоцентрической и приведенной широтой будутъ имѣть видъ

(242)
$$\rho . \cos \varphi' = \cos \varphi_1$$
$$\rho . \sin \varphi' = (1 - c) . \sin \varphi_1$$

Прежде чѣмъ воспользуемся этими уравненіями для введенія приведенной широты въ основныя уравненія теоріи затмѣній, замѣтимъ еще слѣдующее.

Во время прикосновенія краевъ солнца и луны зенитное разстояніе обѣихъ прикасающихся точекъ одинаково, а слѣдовательно одинаково и вліяніе рефракціи на видимыя положенія этихъ точекъ. Казалось бы по этому, что рефракція не должна имѣть ни какаго вліянія на условія, при которыхъ можетъ быть видимо съ земной поверхности прикосновеніе краевъ двухъ свѣтилъ или какой либо другой фазъ затмѣнія. На дѣлѣ однако это не такъ. Если бы рефракція не дѣйствовала, то выведенныя нами основныя уравненія (239) могли бы служить для точнаго опредѣленія положенія точекъ пересѣченія различныхъ образующихъ конуса тѣни и полутѣни луны съ поверхностью земли, но при существованіи около этой послѣдней атмосферы дѣйствіе такой преломляющей среды будетъ состоять въ томъ, что лучи свѣта, ограничивающіе собою поверхность того или другаго конуса, будутъ изогнуты атмосферой, и кривая линія, составляющаяся изъ точекъ пересѣченія того или другаго конуса съ поверхностью земли, пройдемъ по другимъ точкамъ этой послѣдней, а не по тѣмъ, по которымъ она должна бы пройти безъ дѣйствія рефракціи. Чтобы ввести въ основныя уравненія теоріи затмѣній члены зависящіе отъ дѣйствія рефракціи, опредѣлимъ положеніе той точки, въ которой пересѣкается касательная къ криволинейному лучу проведенная черезъ мѣсто вступленія этого луча въ атмосферу съ вертикальною линіею проведенною черезъ мѣсто наблюденія. Для этого обратимся къ уравненіе (34), въ которомъ q есть разстояніе какой либо точки атмосферы отъ центра земли, μ по-

казатель преломленія въ этой точкѣ и i уголъ паденія на соотвѣтствующій слой атмосферы. Если назовемъ разстояніе наблюдателя отъ центра земли, какъ прежде, чрезъ ρ, то можемъ положить $q = \rho\,(1 + a)$, гдѣ ρa есть разстояніе разсматриваемой точки атмосферы отъ поверхности земли, разстояніе выраженное въ тѣхъ же единицахъ какъ и ρ. Если назовемъ плотность атмосферы въ разсматриваемой точкѣ чрезъ d, то какъ мы знаемъ

$$\mu^2 - 1 = cd$$

гдѣ c есть постоянная величина. Слѣдовательно

$$\mu = \sqrt{1 + cd}$$

внося это вмѣстѣ съ q въ уравненіе (34), получимъ

$$(1 + a)\sin i\sqrt{1 + cd} = (1 + a')\sin i'\sqrt{1 + cd'}$$

предположимъ, что первая часть этого уравненія относится къ той точкѣ криволинейнаго луча, въ которой онъ достигаетъ поверхности земли, а вторая часть этого уравненія пусть соотвѣтствуетъ точкѣ, въ которой свѣтовой лучъ вступаетъ въ атмосферу; тогда a' будетъ величина, которой опредѣляется искомое разстояніе разсматриваемой точки пересѣченія отъ поверхности земли; i' есть тотъ уголъ, который мы считаемъ въ теоріи рефракціи за истинное зенитное разстояніе свѣтила. Что касается до a, то понятно, что оно для нашего случая обращается въ нуль. На предѣлахъ атмосферы $d' = o$, а потому сдѣлавъ $a' = x$, изъ предыдущаго уравненія имѣемъ

$$\sin z_0\sqrt{1 + cd} = (1 + x)\sin z$$

откуда

$$x = \frac{\sin z_0}{\sin z}\sqrt{1 + cd} - 1 \tag{243}$$

Для вычисленія x по этому выраженію величина z, т. е. истинное зенитное разстояніе должно быть найдено при помощи таблицъ рефракціи по данному видимому зенитному разстоянію z_0. Какъ скоро x извѣстно, то разстояніе искомой точки пересѣченія отъ центра земли, представляющееся въ видѣ $\rho\,(1 + x)$, также будетъ извѣстно. Легко понять, что для того чтобы обратить вниманіе при вычисленіи затмѣнія на вліяніе рефракціи, достаточно представить себѣ мѣсто наблюденія перенесеннымъ съ поверхности земли въ точку пересѣченія радіуса земли (проведеннаго черезъ мѣсто наблюденія) съ касательною линіею проведенною къ свѣтовому лучу черезъ мѣсто вступленія его въ атмосферу; ибо безъ дѣйствія рефракціи разсматриваемый лучъ свѣта достигалъ бы радіуса земли проведеннаго черезъ мѣсто наблюденія въ этой точкѣ пересѣченія, а при вліяніи рефракціи онъ достигаетъ поверхности земли въ той точкѣ, черезъ которую проведенъ упомянутый радіусъ земли. И такъ если вставимъ въ основныя уравненія теоріи затмѣній вмѣсто ρ величину $\rho\,(1 + x)$, то введемъ въ эти уравненія члены зависящіе отъ вліянія рефракціи.

И такъ поставимъ сначала въ основныя уравненія (239) вмѣсто ρ величину $(1 + x)$, а потомъ вмѣсто произведеній $\rho\,.\cos\varphi'$ и $\rho\sin\varphi'$ ихъ величины изъ уравненій (242); послѣ всего этого упомянутыя уравненія примутъ видъ

$$u = u' - (1+x)\left[(1-c)\sin\varphi_1 \sin\delta + \cos\varphi_1 \cos\delta \cos(\tau + \Delta\alpha)\right] \operatorname{tang} f$$

(244)
$$n \, . \sin\theta' = -\gamma \, . \cos N' + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15} n \, . \sin N' - (1+x)\cos\varphi_1 \sin(\tau + \Delta\alpha)$$

$$n \, . \cos\theta' = \gamma \, . \sin N' + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15} n \, . \cos N' - (1+x)\left[(1-c)\sin\varphi_1 \cos\delta - \cos\varphi_1 \sin\delta . \cos(\tau + \Delta\alpha)\right]$$

На основаніи этихъ уравненій и должны быть рѣшаемы разнообразные вопросы теоріи затмѣній.

26. Полное предвычисленіе солнечнаго затмѣнія состоитъ изъ четырехъ главныхъ частей. Оно заключаетъ въ себѣ опредѣленіе: 1) кривыхъ линій, ограничивающихъ собою со всѣхъ сторонъ то пространство земной поверхности, на которомъ будетъ видѣнъ какой либо фазъ затмѣнія, начиная отъ простаго прикосновенія краевъ затмѣвающаго и затмѣваемаго свѣтилъ до полнаго или кольцеобразнаго затмѣнія солнца; 2) опредѣленіе кривыхъ линій лежащихъ внутри этого пространства и имѣющихъ то свойство, что изъ всѣхъ ихъ точекъ видѣнъ или одинъ и тотъ же опредѣленный фазъ затмѣнія, или фазы разнообразные но величинѣ, но при одномъ и томъ же дополнительномъ условіи; 3) опредѣленіе тѣхъ точекъ земной поверхности, въ которыхъ упомянутыя кривыя линіи пересѣкаются между собою и изъ которыхъ опредѣленный фазъ затмѣнія будетъ видѣнъ въ данное время; наконецъ 4) предвычисленіе затмѣнія для даннаго мѣста на земной поверхности.

Всякое геоцентрическое соединеніе центровъ солнца и луны тогда только производитъ затмѣніе солнца, когда ось конуса тѣни на столько приближается къ центру земли, что разстояніе этой оси отъ упомянутаго центра становится менѣе суммы радіусовъ земли и сѣченія конуса полутѣни плоскостію, проведенною черезъ центръ земли перпендикулярно къ оси конуса. Если бы при извѣстномъ геоцентрическомъ соединеніи наименьшее разстояніе оси конуса отъ центра земли равнялось упомянутой суммѣ, тогда произошло бы только одно внѣшнее прикосновеніе конуса полутѣни и земли и глазъ наблюдателя помѣщеннаго въ точкѣ прикосновенія увидѣлъ бы внѣшнее прикосновеніе краевъ солнца и луны, какъ наибольшій фазъ затмѣнія для земли вообще. Если конусъ полутѣни, хотя незначительною своею частію, вступаетъ на землю, то на поверхности этой послѣдней существуютъ двѣ точки, въ которыхъ этотъ конусъ въ первый и послѣдній разъ касается земной поверхности; внѣшнее прикосновеніе краевъ солнца и луны, видимое изъ этихъ точекъ, служитъ началомъ и концомъ частнаго затмѣнія для земли вообще. И такъ за первый вопросъ теоріи затмѣній для земли вообще должно считать опредѣленіе положенія на земной поверхности двухъ упомянутыхъ точекъ и времени, въ которое изъ этихъ точекъ будетъ видимо внѣшнее прикосновеніе краевъ солнца и луны. Мѣста перваго и послѣдняго внѣшняго прикосновенія конуса лунной полутѣни съ землею лежатъ на кривой линіи, соединяющей собою точки земной поверхности, изъ которыхъ прикосновеніе краевъ солнца и луны при началѣ или концѣ затмѣнія бываетъ видимо на горизонтѣ. Такая кривая линія ограничиваетъ собою съ востока и запада то пространство земной поверхности, съ котораго можетъ быть видѣнъ какой либо фазъ затмѣнія. Опредѣленіе этой кривой линіи составляетъ второй вопросъ теоріи затмѣній для земли вообще. Упомянутая сейчасъ кривая можетъ быть или непрерывна, или состоять изъ двухъ отдѣльныхъ сомкнутыхъ вѣтвей. Первый случай имѣетъ мѣсто только тогда, когда конусъ лунной

полутѣни или только на одно мгновеніе совершенно вступаетъ на землю и имѣетъ съ ея поверхностію одно внутреннее прикосновеніе, или когда этотъ конусъ во все время затмѣнія вступаетъ на поверхность земли только одною извѣстною частію своихъ образующихъ, остальная же часть поверхности вовсѣ не пересѣкается съ поверхностію земли. Въ точкѣ единственнаго внутренняго прикосновенія конуса полутѣни и земли восточная и западная границы затмѣнія соединяются въ одну непрерывную кривую или точнѣе переходятъ одна въ другую. Второй случай имѣетъ мѣсто тогда, когда конусъ лунной полутѣни, въ теченіи болѣе или менѣе продолжительнаго времени, въ извѣстной своей части, бываетъ со всѣхъ сторонъ окруженъ землею. Пространство земли, съ котораго можетъ быть видѣнъ какой либо фазъ затмѣнія, съ сѣвера и юга ограничено кривыми линіями, имѣющими то свойство, что изъ ихъ точекъ внѣшнее прикосновеніе краевъ солнца и луны видимо какъ наибольшій фазъ затмѣнія. Если обѣ эти кривыя линіи существуютъ для одного и того же затмѣнія, то онѣ совершенно отдѣлены одна отъ другой и суть сомкнутыя кривыя не имѣющія особыхъ точекъ. При вычисленіи затмѣнія для земли вообще мы будемъ опредѣлять только тѣ части этихъ кривыхъ, которыя лежатъ между восточною и западною границами частнаго затмѣнія на сторонѣ земнаго сфероида, обращенной къ затмѣваемому и затмѣвающему свѣтиламъ. Если восточная и западная границы частнаго затмѣнія соединяются между собою, то сѣверная или южная кривая обращаются въ одну точку. Если точка соединенія восточной и западной кривой находится въ сѣверной половинѣ земнаго сфероида, то не существуетъ сѣверной границы частнаго затмѣнія и наоборотъ. Опредѣленіе сѣверной и южной границы частнаго затмѣнія составляетъ третій вопросъ теоріи затмѣній для земли вообще. Какъ скоро всѣ граничныя кривыя опредѣлены, то мы можемъ приступить къ вычисленію положенія на земной поверхности тѣхъ кривыхъ линій, которыя лежатъ внутри найденныхъ границъ. Изъ этихъ кривыхъ прежде всего должна быть найдена та, изъ точекъ которой наибольшій фазъ затмѣнія видѣнъ на горизонтѣ. Если восточная и западная границы частнаго затмѣнія суть отдѣльныя сомкнутыя кривыя, то и кривая линія наибольшаго фаза на горизонтѣ состоитъ также изъ двухъ отдѣльныхъ вѣтвей, и каждая изъ этихъ вѣтвей служитъ какъ бы діаметромъ сомкнутой кривой восточной или западной границы частнаго затмѣнія. Если же сѣверная или южная кривая обращается въ одну точку, то въ этой же точкѣ соединяются между собою и вѣтви кривой линіи наибольшаго фаза на горизонтѣ. Самую важную часть теоріи затмѣній для земли вообще составляетъ опредѣленіе положенія линіи центральнаго затмѣнія и сѣверной и южной границы полосы земли, изъ точекъ которой затмѣніе будетъ представляться полнымъ или кольцеобразнымъ. Линію центральнаго затмѣнія описываетъ на поверхности земли ось конуса тѣни, и наблюдатель, находящійся въ какой либо точкѣ этой линіи, видитъ въ извѣстный моментъ совпаденіе центровъ солнца и луны. Къ линіи центральнаго затмѣнія, если можно такъ выразиться, перпендикулярна линія наибольшаго фаза въ меридіанѣ. Изъ точки пересѣченія этой послѣдней кривой съ линіей центральнаго затмѣнія совпаденіе центровъ солнца и луны видимо въ полдень. Линіи центральнаго затмѣнія по формѣ подобны и по положенію приблизительно параллельны тѣ кривыя, изъ точекъ которыхъ данный фазъ затмѣнія видѣнъ какъ наибольшій.

Мы указали теперь на всѣ главные вопросы, входящіе въ теорію затмѣній для земли вообще. Познакомимся съ рѣшеніемъ главнѣйшихъ изъ нихъ.

27. Посмотримъ прежде всего какимъ образомъ при помощи основныхъ уравненій (244) можетъ быть найдено положеніе восточно-западной границы частнаго затмѣнія на землѣ вообще. Произведеніе $c.\text{tang}\, f$ даже для конуса полутѣни есть столь малая величина, что члены содержащіе это произведеніе безъ чувствительной погрѣшности могутъ быть отвергнуты и тогда упомянутыя уравненія приведутся къ слѣдующей формѣ

$$u = u' - (1 + x)\,[\sin\varphi_1 \sin\delta + \cos\varphi_1 \cos\delta \cos(\tau + \Delta\alpha)]\,\text{tang}\, f$$

(245)
$$n.\sin\theta' = -\gamma.\cos N' + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15}\, n.\sin N' - (1 + x)\cos\varphi_1 \sin(\tau + \Delta\alpha)$$

$$n.\cos\theta' = \gamma.\sin N' + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15}\, n\cos N' - (1 + x)\,[(1 - c)\sin\varphi_1\cos\delta - \cos\varphi_1\sin\delta\cos(\tau + \Delta\alpha)]$$

положимъ здѣсь

(246)
$$\begin{aligned} d.\sin D &= \sin\delta \\ d.\cos D &= (1 - c)\cos\delta \\ \cos\varphi_1 \sin(\tau + \Delta\alpha) &= \cos H \sin K \\ \cos\varphi_1 \cos(\tau + \Delta\alpha) &= \cos D \sin H - \sin D \cos H \cos K \\ \sin\varphi_1 &= \sin D \sin H + \cos D \cos H \cos K \end{aligned}$$

опредѣляя изъ послѣднихъ двухъ уравненій $\sin H$, находимъ

(247)
$$\sin\varphi_1 \sin D + \cos\varphi_1 \cos D \cos(\tau + \Delta\alpha) = \sin H$$

но если примемъ поверхность земли за поверхность сферы, т. е. если положимъ $c = 0$, то первыя два изъ системы предыдущихъ уравненій показываютъ, что въ этомъ случаѣ $D = \delta$; слѣдовательно можно принять

(248)
$$\sin\varphi_1 \sin\delta + \cos\varphi_1 \cos\delta \cos(\tau + \Delta\alpha) = \sin H$$

кромѣ того опредѣляя изъ двухъ послѣднихъ изъ уравненій (246) произведеніе $\cos H.\cos K$, при томъ же допущеніи находимъ

$$\sin\varphi_1 \cos\delta - \cos\varphi_1 \sin\delta \cos(\tau + \Delta\alpha) = \cos H.\cos K$$

послѣ этого уравненія (245) представляются въ видѣ

(249)
$$\begin{aligned} u &= u' - (1 + x)\sin H.\text{tang}\, f \\ u\sin\theta' &= -\gamma.\cos N' + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15}\, n\sin N' - (1 + x)\cos H.\sin K \\ u.\cos\theta' &= \gamma.\sin N' + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15}\, n.\cos N' - (1 + x)\, d.\cos H.\cos K \end{aligned}$$

помножимъ второе изъ этихъ уравненій на $\cos N'$ и вычтемъ изъ произведенія третье умноженное на $\sin N'$, потомъ умножимъ второе на $\sin N'$ и сложимъ произведеніе съ третьимъ умноженнымъ на $\cos N'$, тогда получимъ

$$u \sin(\theta' - N') = -\gamma - (1+x)\,[\cos H \sin K \cos N' - d.\cos H \cos K \sin N']$$

$$u.\cos(\theta' - N') = \frac{\tau - \lambda - \mu}{15} n - (1+x)\left[\cos H \sin K \sin N' + d.\cos H.\cos K \cos N'\right]$$

введемъ наконецъ сюда вспомогательныя величины e, ν, e', ν' подъ условіемъ

$$d.\sin N' = e.\sin(N' + \nu); \qquad \sin N' = e' \sin(N' + \nu')$$
$$\cos N' = e.\cos(N' + \nu); \qquad d.\cos N' = e' \cos(N' + \nu') \tag{250}$$

и кромѣ того положимъ

$$\theta' - N' = \psi$$

послѣ всего этого два предыдущія уравненія примутъ видъ

$$u.\sin\psi = -\gamma - (1+x)\, e \cos H \sin(K - N' - \nu)$$
$$u.\cos\psi = \frac{\tau - \lambda - \mu}{15} n - (1+x)\, e' \cos H.\cos(K - N' - \nu') \tag{251}$$

Такъ какъ восточно-западная граница характеризуется тѣмъ свойствомъ, что изъ ея точекъ прикосновеніе краевъ солнца и луны видимо на горизонтѣ, то для опредѣленія положенія этой границы мы должны ввести упомянутое условіе въ основныя уравненія приведенныя теперь къ виду (251).

Разсмотримъ сферическій треугольникъ между точкой прикосновенія краевъ солнца и луны, точкой въ которой ось z, параллельная оси конуса тѣни, пересѣкается со сферой небесной и зенитомъ мѣста наблюденія. Сторонами этого треугольника будутъ: зенитное разстояніе точки прикосновенія краевъ, которое назовемъ чрезъ ζ'; угловое разстояніе точки прикосновенія краевъ отъ точки пересѣченія оси z со сферой небесной, это разстояніе по принятому выше означенію есть f, и наконецъ зенитное разстояніе точки пересѣченія оси z со сферой небесной, которое мы означимъ чрезъ ζ. Если назовемъ параллактическій уголъ при точкѣ пересѣченія оси z со сферой небесной чрезъ p, уголъ положенія точки прикосновенія краевъ при той же точкѣ пересѣченія оси z со сферой небесной, согласно съ принятымъ означеніемъ, — чрезъ θ'; то понятно, что въ разсматриваемомъ треугольникѣ противъ стороны ζ' будетъ лежать уголъ $\theta' - p$, а потому такой треугольникъ дастъ

$$\cos\zeta' = \cos\zeta.\cos f + \sin\zeta \sin f \cos(\theta' - p)$$

если точка прикосновенія краевъ находится на горизонтѣ, то

$$0 = \cos\zeta.\cos f + \sin\zeta.\sin f.\cos(\theta' - p)$$

откуда

$$\cot\zeta = -\operatorname{tang} f.\cos(\theta' - p) \tag{252}$$

Если назовемъ часовой уголъ точки пересѣченія оси z со сферой небесной чрезъ T, астрономическую широту мѣста наблюденія чрезъ φ, то изъ параллактическаго треугольника составленнаго для точки пересѣченія оси z со сферой небесной имѣемъ

$$(253)\qquad \begin{aligned} \cos\varphi.\sin T &= \sin p \sin\zeta \\ \cos\varphi.\cos T &= \cos\zeta\cos\delta - \sin\zeta\sin\delta\cos p \\ \sin\varphi &= \cos\zeta\sin\delta + \sin\zeta\cos\delta\cos p \\ \cos\zeta &= \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos T \end{aligned}$$

Но изъ уравненія (238) видно, что $\tau + \Delta\alpha$ есть часовой уголъ точки пересѣченія оси z со сферой небесной. Кромѣ того, принимая сжатіе земли равнымъ нулю или, другими словами, поверхность земли за поверхность сферы, имѣемъ $\delta = D$ и $\varphi = \varphi_1$, а потому изъ сравненія послѣдняго изъ предыдущихъ уравненій съ уравненіемъ (248) заключаемъ, что при $c = 0$ необходимо $H = 90 - \zeta$, наконецъ изъ сравненія перваго изъ уравненій (253) съ третьимъ изъ уравненій (246) видимъ, что $p = K$, при томъ же допущеніи $c = 0$. И такъ, принимая $c = 0$, можемъ уравненію (252) дать видъ

$$\text{tang}\, H = -\text{tang}\, f \cos(\theta' - K)$$

а этимъ, какъ мы видѣли, представляется то условіе, что изъ мѣста наблюденія точка прикосновенія краевъ видна на горизонтѣ. Мы приняли $\psi = \theta' - N'$; слѣдовательно $\theta' - K = \psi + N' - K$, а потому предыдущее уравненіе можно представить еще въ формѣ

$$(254)\qquad \text{tang}\, H = -\text{tang}\, f.\cos(\psi + N' - K)$$

Если введемъ это условіе въ наши основныя уравненія, то получимъ такія выраженія, при помощи которыхъ можетъ быть найдено положеніе восточно-западной границы того пространства земли, съ котораго будетъ видѣнъ какой либо фазъ затмѣнія. Изъ выраженія (254) видимъ, что для всей восточно-западной границы H есть малая дуга, для которой можно принимать $\cos H = 1$ и пренебрегать членами содержащими произведеніе $\sin H.\text{tang}\, f$; при такомъ допущеніи первое изъ уравненій (249) дастъ $u = u'$, послѣ чего, полагая для краткости $N' - K = W$, представимъ первое изъ уравненій (251) въ видѣ

$$(255)\qquad \sin(W + \nu) = \frac{\gamma}{e(1+x)} + \frac{u'.\sin\psi}{e(1+x)}$$

или

$$(256)\qquad \sin\psi = \frac{e(1+x)}{u'}.\sin(W+\nu) - \frac{\gamma}{u'}$$

При вычисленіи восточно-западной границы за произвольную величину будемъ принимать или ψ или W. Если дадимъ въ уравненіи (255) произвольныя значенія величинѣ ψ, то получимъ соотвѣтствующія имъ значенія W и на оборотъ, если дадимъ въ уравненіи (256) произвольныя значенія величинѣ W, то найдемъ изъ этого уравненія соотвѣтствующія имъ значенія ψ. Послѣ этого для принятыхъ произвольныхъ значеній ψ или W изъ уравненія (254) опредѣлимъ соотвѣтствующія значенія H. Полагая во второмъ изъ уравненій (251) $\tau - \lambda = t$ и принимая $\cos H = 1$, находимъ

$$(257)\qquad t = \mu + \frac{15}{n}(1+x)\,e'.\cos(W+\nu') + \frac{15}{n}.u'.\cos\psi$$

Если W и ψ извѣстны, то это уравненіе служитъ для опредѣленія t; наконецъ три послѣднія изъ уравненій (246) служатъ для опредѣленія $t + \Delta\alpha$ и φ_1 по даннымъ H и W. Что касается до K, входящаго въ эти уравненія, то оно опредѣлится по W изъ соотношенія $K = N' - W$. Имѣя величины τ и t, легко получить другую координату λ для каждой изъ искомыхъ точекъ восточно-западной границы, ибо $\lambda = \tau - t$.

Итакъ за произвольную величину при вычисленіи восточно-западной границы принимаются или ψ или W, удобнѣе впрочемъ вмѣсто W за произвольную принять прямо $W + \nu$. Если за произвольную принято ψ, то каждому значенію этого перемѣннаго въ уравненіи (256) будутъ соотвѣтствовать два значенія $W + \nu$ и для каждаго $W + \nu$ въ свою очередь найдутся два значенія t. Такимъ образомъ для каждой произвольной величины ψ мы получимъ четыре точки восточно-западной кривой. Чтобы узнать какія изъ этихъ точекъ принадлежатъ восточной и какія западной кривой, замѣтимъ, что для такихъ значеній ψ, при которыхъ

$$\frac{\gamma}{e(1+x)} + \frac{u'.\sin\psi}{e(1+x)} \tag{a}$$

есть положительная величина, одно значеніе $W + \nu$ будетъ лежать въ первой четверти окружности, другое во второй; слѣдовательно одно значеніе $W + \nu$ будетъ имѣть положительный косинусъ, другое отрицательный; но t всегда болѣе для точекъ восточной части кривой, нежели для точекъ западной, и такъ какъ при однихъ и тѣхъ же значеніяхъ ψ величина t будетъ имѣть для той и другой вѣтви кривой различныя значенія единственно по той причинѣ, что для одной изъ этихъ вѣтвей $\cos(W + \nu)$ положительный, а для другой отрицательный, то отрицательный $\cos(W + \nu)$ долженъ принадлежать западной вѣтви, а положительный восточной. Итакъ для значеній ψ, дѣлающихъ упомянутую выше величину положительною, значенія $W + \nu$, лежащія въ первой четверти окружности и соотвѣтствующія имъ величины φ и λ будутъ принадлежать точкамъ восточной вѣтви кривой; значенія же $W + \nu$, лежащія во второй четверти окружности и соотвѣтствующія имъ значенія φ и λ будутъ принадлежать западной вѣтви граничной кривой. Для величинъ λ обращающихъ сумму (a) въ отрицательную величину значенія $\nu + W$ будутъ лежать въ третьей и четвертой четверти окружности, а слѣдовательно одна часть этихъ значеній будетъ имѣть положительный косинусъ, а другая—отрицательный; но мы видѣли выше, что величины $W + \nu$ имѣющія отрицательный косинусъ принадлежатъ западной кривой, а положительный — восточной, слѣдовательно значенія $W + \nu$ лежащія въ четвертой четверти окружности и соотвѣтствующія имъ значенія φ и λ будутъ принадлежать восточной границѣ частнаго затмѣнія, а значенія $W + \nu$ лежащія въ третьей четвертой окружности и соотвѣтствующія имъ значенія φ и λ будутъ принадлежать западной кривой.

Въ нѣкоторыхъ изъ точекъ восточно-западной кривой прикосновеніе краевъ затмѣвающаго и затмѣваемаго свѣтилъ видимо на горизонтѣ при началѣ частнаго затмѣнія, въ другихъ—при концѣ; отличіе однѣхъ отъ другихъ можетъ быть основано на слѣдующихъ соображеніяхъ.

Если во время t въ точкѣ земной поверхности опредѣленной координатами φ_1 и λ видимо прикосновеніе краевъ на горизонтѣ и если въ слѣдующій безконечно близкій

моментъ $t + dt$ точка (λ, φ_1) будетъ находиться внутри конуса полутѣни, т. е. если разстояніе ея u отъ оси конуса тѣни въ моментъ $t + dt$ будетъ менѣе нежели въ моментъ t, то въ этой точкѣ во время t было видно начало частнаго затмѣнія; если же въ моментъ $t + dt$ точка (λ, φ_1) находилась уже внѣ конуса полутѣни и разстояніе ея отъ оси конуса сдѣлалось болѣе u, то изъ такой точки во время t было видимо прикосновеніе краевъ на горизонтѣ при концѣ частнаго затмѣнія. И такъ если для данныхъ φ_1 и λ производная $\frac{du}{dt}$ есть величина отрицательная, то изъ точки (λ, φ_1) видимо начало затмѣнія, а при положительной производной $\frac{du}{dt}$ — конецъ, ибо извѣстно, что если главное перемѣнное получаетъ положительныя приращенія, возрастаетъ, а функція уменьшается, то первая произвоеная отрицательна и на оборотъ. Но такъ какъ при опредѣленіи восточно-западной кривой мы приняли $u = u'$, то вмѣсто производной $\frac{du}{dt}$ будемъ разсматривать производную $\frac{du'}{dt}$. Для опредѣленія этой послѣдней будемъ прежде всего дифференцировать уравненія (255) и (257), при этомъ примемъ $x = 0$. Понятно, что c не можетъ влiять на знакъ производной $\frac{du'}{dt}$, а потому прежде дифференцированія примемъ $c = 0$; изъ уравненій (250) находимъ

$$e^2 = d^2 \sin^2 N' + \cos^2 N'$$
$$e'^2 = \sin^2 N' + d^2 \cos^2 N'$$

но какъ показываютъ первыя два изъ уравненій (246), при $c = 0$ и $d = 1$, а слѣдовательно $e = 1$ и $e' = 1$ послѣ чего первое изъ уравненій (250) обращается въ $\sin(N' + \nu) = \sin N'$, что удовлетворится только при $\nu = 0$. И такъ принимая $c = 0$, мы должны положить $\nu = 0$ и $e = 1$. При сдѣланныхъ нами теперь допущеніяхъ уравненія (255) и (257) получаютъ слѣдующую простую форму

$$\sin W = \gamma + u' . \sin\psi$$
$$t = \mu + \frac{15}{n} \cos W + \frac{15}{n} u' . \cos\psi$$

эти уравненія мы и будемъ дифференцировать для опредѣленія производной $\frac{du'}{dt}$. Что касается до величинъ n, γ и μ, то понятно, что при этомъ дифференцированіи они могутъ считаться за постоянныя. И такъ

$$\cos W . dW = u' . \cos\psi . d\psi + \sin\psi . du'$$
$$dt = -\frac{15 . \sin W}{n} . dW - \frac{15 . u'}{n} . \sin\psi . d\psi + \frac{15 . \cos\psi}{n} . du'$$

Въ предыдущемъ выраженіи t всѣ члены представлены въ градусахъ и десятичныхъ доляхъ градуса, чтобы выразить ихъ въ линейной мѣрѣ, мы умножимъ всѣ ихъ на $3600 . \sin 1''$ и положимъ $15.3600 . \sin 1'' = \varkappa$, тогда послѣднее уравненіе даетъ

$$dt = -\frac{\varkappa}{n} . \sin W\, dW - \frac{\varkappa}{n} . u' . \sin\psi . d\psi + \frac{\varkappa}{n} . \cos\psi . du'$$

Исключая изъ этого уравненія и перваго изъ предыдущихъ величину $d\psi$, находимъ

$$du' = \frac{n}{\varkappa} \cos \psi \,.\, dt + \sin (\psi + W) \,.\, dW$$

Но изъ выраженія $N' - K = W$, принимая N' за постоянную величину, получаемъ $dW = - dK$, слѣдовательно

$$du' = \frac{n}{\varkappa} \cos \psi \,.\, dt - \sin (\psi + W) \,.\, dK \qquad (258)$$

чтобы представить dK въ зависимости отъ dt, будемъ дифференцировать три послѣднія изъ уравненій (246). Мы разсматриваемъ опредѣленную точку земли, слѣдовательно при этомъ дифференцированіи φ_1 и λ должны считаться за постоянныя величины. Кромѣ того для всей восточно-западной границы H есть малая величина, а потому послѣ дифференцированія можемъ принять $H = 0$, тогда упомянутыя уравненія даютъ

$$\cos \varphi_1 \cos \tau \,.\, d\tau = \cos K \,.\, dK$$
$$- \cos \varphi_1 \sin \tau \,.\, d\tau = \sin D \sin K \,.\, dK + \cos D . dH$$
$$0 = - \cos D \sin K \,.\, dK + \sin D . dH$$

Помножимъ второе изъ этихъ уравненій на $\sin D$, третье на $\cos D$ и вычтемъ второе произведеніе изъ перваго, тогда получимъ

$$- \cos \varphi_1 \sin D \,.\, \sin \tau \,.\, d\tau = \sin K \, dK$$

помножимъ это уравненіе на $\sin K$ и сложимъ произведеніе съ первымъ изъ предыдущихъ уравненій помноженнымъ на $\cos K$, тогда находимъ

$$\cos \varphi_1 \left[\cos K \cos \tau - \sin D \sin K \sin \tau\right] d\tau = dK$$

Разсмотримъ параллактическій треугольникъ построенный для той точки, въ которой пересѣкается со сферой небесной ось z первоначальной системы осей координатъ.

Замѣтимъ, что K есть параллактическій уголъ этой точки, а потому, назвавъ чрезъ M дополненіе до $180°$ азимута упомянутой точки пересѣченія, получимъ

$$\cos M = - \cos \tau \,.\, \cos K + \sin \tau . \sin K \,.\, \sin D$$

внося это въ предыдущее уравненіе, приведемъ его къ виду

$$- \cos \varphi_1 \cos M \,.\, d\tau = dK$$

но изъ того же параллактическаго треугольника находимъ

$$\cos \varphi_1 \cos M = \cos H \sin D - \sin H \cos D \cos K$$

что при $H = 0$ даетъ

$$\cos \varphi_1 \cos M = \sin D$$

слѣдовательно

$$\sin D \,.\, d\tau = - dK$$

Разсматривая λ какъ постоянную величину, изъ соотношенія $\lambda = \tau - t$ находимъ $d\tau = dt$, поэтому

$$dK = -\sin D \,.\, dt$$

если внесемъ это въ уравненіе (258), то получимъ искомую производную въ видѣ

$$\frac{du'}{dt} = \frac{n}{\varkappa} \cdot \cos\psi + \sin(\psi + W)\sin D$$

Вычисливъ это выраженіе съ тѣми величинами ψ и W, которыя соотвѣтствуютъ опредѣленной точкѣ кривой, по знаку найденной производной $\frac{du'}{dt}$ будемъ судить о томъ, видно ли изъ разсматриваемой точки въ данное время начало или конецъ частнаго затмѣнія. Впрочемъ есть еще болѣе простое средство судить объ этомъ. Для солнечныхъ затмѣній $\frac{n}{\varkappa} > 1$, приблизительно $\frac{n}{\varkappa} = 2$, между тѣмъ какъ

$$\sin(\psi + W)\sin D < 0.5$$

поэтому знакъ разсматриваемой производной зависитъ главнымъ образомъ отъ знака $\cos\psi$, слѣдовательно въ данной точкѣ земной поверхности во время прикосновенія краевъ на горизонтѣ будетъ видимо начало частнаго затмѣнія, если $\psi > 90^0$ и $\psi < 270^0$; если же для данной точки $\psi > 270^0$ и $< 90^0$, т. е. если ψ лежитъ въ четвертой или первой четверти окружности, то изъ такой точки въ данное время видѣнъ конецъ частнаго затмѣнія.

28. Точки внѣшнихъ и внутреннихъ прикосновеній конуса полутѣни и земли лежатъ на кривой линіи восточно-западной границы частнаго затмѣнія, а потому опредѣленіе координатъ тѣхъ мѣстъ земной поверхности, въ которыхъ начинается и кончается частное затмѣніе для земли вообще, находится въ связи съ рѣшеніемъ предыдущаго вопроса. Частное затмѣніе на землѣ вообще должно быть видимо между извѣстными предѣлами времени, а потому точки прикосновенія конуса полутѣни и земли опредѣлятся изъ того условія, что t достигаетъ для нихъ maximum или minimum своего значенія. Понятно, что въ этомъ случаѣ maximum t соотвѣтствуетъ концу частнаго затмѣнія, а minimum — началу. И такъ чтобы опредѣлить координаты точекъ прикосновенія конуса полутѣни и земли, мы должны взять отъ нашихъ основныхъ уравненій производныя относительно времени, положить ихъ равными нулю и изъ найденныхъ такимъ образомъ уравненій опредѣлить значенія той величины, которую мы принимали за произвольную при вычисленіи восточно-западной границы. Если для этихъ найденныхъ значеній произвольной величины вычислимъ по изложенному способу координаты соотвѣтствующихъ имъ точекъ восточно-западной кривой, то такія координаты будутъ принадлежать искомымъ точкамъ прикосновенія конуса полутѣни и земли. Когда будемъ брать отъ уравненій (249) производныя по t, то при этомъ дифференцированіи будемъ считать за перемѣнныя u, $0'$, K, H и x, послѣднее какъ зависящее отъ H. Что касается до λ и τ, то понятно, что измѣненія ихъ относительно t въ разсматриваемомъ случаѣ одинаковы; слѣдовательно послѣ дифференцированія должно принять $\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\tau}{dt}$, но это очевидно приводится къ тому, чтобы считать при самомъ дифференцированіи члены

$$\frac{\tau - \lambda - \mu}{15} \cdot n . \sin N' \quad \text{и} \quad \frac{\tau - \lambda - \mu}{15} n . \cos N'$$

за постоянныя величины. И такъ выполняя дифференцированіе уравненій (249) въ указанномъ смыслѣ, найдемъ

$$du = -\left[(1+x)\cos H + \sin H \cdot \frac{dx}{dH}\right] \operatorname{tang} f . dH$$

$$\sin\theta' . du + u . \cos\theta' . d\theta' = \left[(1+x)\sin H - \cos H \frac{dx}{dH}\right] \sin K\, dH - (1+x)\cos H . \cos K . dK$$

$$\cos\theta' . du - u . \sin\theta' . d\theta = \left[(1+x)\sin H - \cos H \frac{dx}{dH}\right] d . \cos K . dH + (1+x)\, d . \cos H . \sin K . dK$$

Полагая здѣсь

$$(1+x) . \cos H + \sin H \cdot \frac{dx}{dH} = G$$

$$(1+x) . \sin H - \cos H \frac{dx}{dH} = F$$

приводимъ эти уравненія къ виду

$$du = -G . \operatorname{tang} f . dH$$

$$\sin\theta' . du + u . \cos\theta' . d\theta' = F . \sin K . dH - (1+x)\cos H . \cos K dK$$

$$\cos\theta' . du - u . \sin\theta' . d\theta' = F . d . \cos K . dH + (1+x) . d . \cos H . \sin K . dK$$

исключая du посредствомъ перваго уравненія изъ двухъ послѣднихъ, получимъ

$$u . \cos\theta' . d\theta' = [F . \sin K + G . \operatorname{tang} f . \sin\theta'] dH - (1+x)\cos H . \cos K . dK$$

$$-u . \sin\theta' . d\theta' = [F . d . \cos K + G . \operatorname{tang} f . \cos\theta'] dH + (1+x)\, d . \cos H . \sin K . dK$$

Точки прикосновенія конуса полутѣни и земли лежатъ на кривой восточно-западной границы частнаго затмѣнія. но для всѣхъ точекъ этой кривой H есть малая величина, еще менѣе будетъ произведеніе $\sin H \cdot \frac{dx}{dH}$, а потому пренебрегая этой величиной, примемъ

$$G = (1+x) . \cos H$$

тогда два предыдущія уравненія приведутся къ виду

$$\begin{aligned} u . \cos\theta' . d\theta' &= [F . \sin K + G . \operatorname{tang} f . \sin\theta'] dH - G . \cos K . dK \\ -u . \sin\theta' . d\theta' &= [F . d . \cos K + G . \operatorname{tang} f . \cos\theta'] dH + G . d . \sin K . dK \end{aligned} \quad (259)$$

такъ какъ точки прикосновенія конуса полутѣни и земли лежатъ на восточно-западной границѣ частнаго затмѣнія, то эти уравненія должны существовать совмѣстно съ уравненіемъ, выражающимъ собою условіе, при которомъ опредѣляются упомянутыя кривыя, т. е. съ уравненіемъ

$$\operatorname{tang} H = -\operatorname{tang} f . \cos(\theta' - K)$$

Что очевидно можно представить въ видѣ

$$(1+x).\sin H = -(1+x)\cos H.\operatorname{tang} f.\cos(0'-K)$$

Но если въ выраженіи F отвергнемъ членъ $\cos H.\frac{dx}{dH}$, то оно приведется къ

$$F=(1+x).\sin H$$

а потому предыдущее уравненіе можетъ быть представлено въ формѣ

$$F = -G.\operatorname{tang} f.\cos(0'-K) \tag{260}$$

вводя это условіе въ уравненія (259), найдемъ

$$u.\cos 0'.d0' = -G.\operatorname{tang} f[\cos(0'-K)\sin K - \sin 0']\,dH - G.\cos K.dK$$
$$u.\sin 0'.d0' = \quad G.\operatorname{tang} f[d.\cos(\theta'-K)\cos K - \cos 0']\,dH - G.d.\sin K.dK$$

если мы пренебрегаемъ сжатіемъ земли, то $d=1$ и потому въ послѣднемъ уравненіи, въ коэффиціентѣ при dH вмѣсто $\cos 0'$ можно поставить $d.\cos 0'$, тогда этотъ коэффиціентъ значительно упрощается и оба предыдущія уравненія легко приводятся къ виду

$$u.\cos 0'.d0' = \quad G.\operatorname{tang} f.\sin(0'-K).\cos K.dH - G.\cos K.dK$$
$$u.\sin \theta'.d0' = d.G.\operatorname{tang} f.\sin(0'-K).\sin K.dH - G.d.\sin K.dK$$

или

$$u.\cos 0'.d0' = \left[\operatorname{tang} f.\sin(0'-K)\frac{dH}{dK}-1\right]G.\cos K dK$$

$$u.\sin 0'.d0' = \left[\operatorname{tang} f.\sin(0'-K)\frac{dH}{dK}-1\right]d.G.\sin K.dK$$

раздѣливъ одно изъ этихъ уравненій на другое, получимъ

$$\operatorname{tang} 0' = d.\operatorname{tang} K \tag{261}$$

Но $0'=\psi+N'$; $K=N'-W$, а потому послѣднее уравненіе представляется еще въ видѣ

$$\frac{\operatorname{tang}\psi+\operatorname{tang} N'}{1-\operatorname{tang}\psi.\operatorname{tang} N'} = \frac{d.\sin(N'-W)}{\cos(N'-W)}$$

откуда

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{d.\cos N'\sin(N'-W)-\sin N'\cos(N'-W)}{\cos N'\cos(N'-W)+d.\sin N'\sin(N'-W)}$$

Замѣняя здѣсь величины $d.\cos N'$, $\sin N'$, $\cos N'$, $d.\sin N'$ ихъ значеніями изъ уравненій (250), получимъ

$$\operatorname{tang}\psi = -\frac{e'}{e}.\frac{\sin(W+\nu')}{\cos(W+\nu)} \tag{262}$$

Если пренебрегаемъ сжатіемъ земли, то $e=e'=1$; $\nu'=\nu=0$. Въ такомъ случаѣ

$$\operatorname{tang}\psi = -\operatorname{tang} W$$

т. е. $\psi + W = 0$ или $\psi + W = 180^\circ$. Уравненіе (262) представляетъ собою условіе, при которомъ должно быть выбрано значеніе ψ для опредѣленія точекъ прикосновенія конуса полутѣни и земли. Прибавляя къ уравненію (262) уравненіе

$$\sin(W + \nu) = \frac{\gamma}{e} + \frac{u}{e} \cdot \sin\psi \qquad (262_*)$$

получающееся при извѣстныхъ допущеніяхъ изъ уравненія (255) и имѣющее мѣсто для всей восточно-западной границы частнаго затмѣнія, получимъ два уравненія, изъ которыхъ по способу послѣдовательныхъ приближеній могутъ быть опредѣлены величины ψ и W, соотвѣтствующія искомымъ точкамъ внутреннихъ и внѣшнихъ прикосновеній конуса полутѣни и земли. Что касается до вычисленія координатъ этихъ точекъ, то для этой цѣли мы можемъ пользоваться тѣми же уравненіями, которыя служатъ для вычисленія восточно-западной границы частнаго затмѣнія. Въ первомъ приближеніи, разсматривая поверхность земли какъ поверхность сферы, мы находимъ $\psi = -W$ и $\psi = 180^\circ - W$. Внося это въ предыдущее уравненіе, получимъ

$$\sin(W + \nu) = \frac{\gamma}{e} \pm \frac{u}{e} \cdot \sin W \qquad (263)$$

Полагая здѣсь $\nu = 0$, находимъ приближенную величину W изъ уравненія

$$\sin W = \frac{\gamma}{e \pm u} \qquad (264)$$

Если внесемъ вычисленную такимъ образомъ величину W въ уравненіе (262), то получимъ болѣе точную величину ψ, съ нею изъ уравненія (262_*) находимъ болѣе точную величину W и т. д. Если W и ψ достаточно точно опредѣлены, то, какъ мы уже замѣтили, по тѣмъ же уравненіямъ, которыя служатъ для вычисленія восточно-западной границы, находимъ H, t, τ, λ и φ_1.

Если величина дроби

$$\frac{\gamma}{e \pm u}$$

какъ для знака $+$, такъ и для знака $-$ есть величина меньшая единицы, то для каждаго изъ этихъ знаковъ мы найдемъ изъ уравненія (264) по двѣ величины W и слѣдовательно всего четыре значенія W. Въ такомъ случаѣ четыре точки прикосновенія конуса полутѣни и земли, двѣ внутреннихъ и двѣ внѣшнихъ будутъ существовать дѣйствительно. Если для одного изъ знаковъ упомянутая дробь обращается въ $+1$, то двѣ величины W сравниваются между собою и двѣ точки внутренняго прикосновенія конуса полутѣни и земли сливаются въ одну, лежащую вблизи сѣвернаго полюса земли. Если выше приведенная дробь для одного изъ знаковъ знаменателя обращается въ -1, то совпавшія точки внутренняго прикосновенія лежатъ вблизи южнаго полюса. Если же наконецъ дробь для одного изъ знаковъ знаменателя пріобрѣтаетъ числовую величину большую единицы, то W дѣлается для этого знака мнимою величиною и тогда точекъ внутренняго прикосновенія конуса полутѣни и земли вовсѣ не существуетъ.

29. Сѣченіе конуса лунной полутѣни, сдѣланное на мѣстѣ земной орбиты плоскостію перпендикулярною къ оси конуса, имѣютъ такіе размѣры, при которыхъ упо-

мянутый конусъ, встрѣчаясь съ земнымъ сфероидомъ, не можетъ облекать его со всѣхъ сторонъ. По этому во время всякаго затмѣнія солнца только изъ опредѣленной, сравнительно не большой части земной поверхности могутъ быть видимы разнообразные по величинѣ фазы затмѣнія. Если конусъ лунной полутѣни вполнѣ вступаетъ на землю, если онъ въ теченіи болѣе или менѣе продолжительнаго времени въ извѣстной своей части со всѣхъ сторонъ бываетъ окруженъ землею, то южная и сѣверная границы полосы видимости частнаго затмѣнія существуетъ въ видѣ отдѣльныхъ кривыхъ линій. Если же восточная и западная границы соединяются между собою въ одной общей точкѣ, то или сѣверная, или южная кривая перестаютъ существовать. Сѣверная и южная границы частнаго затмѣнія начинаютъ образоваться во время близкое къ моменту вступленія оси конуса тѣни на землю. Если конусъ полутѣни совершенно вступилъ на землю, то на тѣ точки земной поверхности, по которымъ проходитъ самая сѣверная и самая южная (относительно земнаго экватора) изъ образующихъ конуса полутѣни, ни прежде, ни послѣ не вступаетъ ни какая часть лунной тѣни и полутѣни. Соображая это, легко заключить, что сѣверная и южная границы полосы частнаго затмѣнія должны характеризоваться тѣмъ свойствомъ, что изъ ихъ точекъ во время даннаго затмѣнія внѣшнее прикосновеніе краевъ затмѣвающаго и затмѣваемаго свѣтила должно быть видимо какъ наибольшій фазъ затмѣнія. И такъ если къ аналитически выраженному условію того, что изъ данной точки земной поверхности видимо внѣшнее прикосновеніе краевъ двухъ свѣтилъ, прибавимъ условіе такаго рода, что прикосновеніе краевъ есть наибольшій фазъ затмѣнія, то совокупностію найденныхъ уравненій можемъ пользоваться для рѣшенія вопроса о положеніи на земной поверхности южной и сѣверной границы частнаго затмѣнія.

Если въ какое нибудь время t глазъ наблюдателя видитъ прикосновеніе краевъ солнца и луны, то онъ находится на поверхности конуса лунной полутѣни и координаты мѣста наблюденія для этого времени t удовлетворяютъ слѣдующему извѣстному намъ уравненіе конуса полутѣни

$$(P-p)^2+(Q-q)^2=(u'-z\,.\,\mathrm{tang}\,f)^2$$

Если же въ ближайшій предшествующій моментъ $t-dt$ глазъ наблюдателя былъ внѣ конуса полутѣни, то для этого предшествующаго момента

$$(P-p)^2+(Q-q)^2>(u'-z\,.\,\mathrm{tang}\,f)^2$$

а слѣдовательно въ промежутокъ времени отъ $t-dt$ до t производная отъ функціи

$$(P-p)^2+(Q-q)^3-(u'-z\,.\,\mathrm{tang}\,f)^2$$

взятая относительно времени t остается постоянно отрицательною. Если во время t въ извѣстной точкѣ земли было видимо прикосновеніе краевъ солнца и луны какъ наибольшій фазъ затмѣнія, то послѣ времени t эта точка должна постоянно удаляться отъ оси конуса тѣни, ибо въ противномъ случаѣ прикосновеніе краевъ видимое во время t не было бы для этой точки наибольшимъ фазомъ затмѣнія; наблюдатель, приближаясь къ оси конуса тѣни, видѣлъ бы все большій и большій фазъ затмѣнія. И такъ для прикосновенія краевъ какъ наибольшаго фаза затмѣнія функція

$$(P-p)^2+(Q-q)^2$$

начиная отъ времени t должна постоянно возрастать и если во время t

$$(P-p)^2+(Q-q)^2=(u'-z\,.\,\text{tang}\,f)^2$$

то во время $t+dt$ снова

$$(P-p)^2+(Q-q)^2>(u'-z\,.\,\text{tang}\,f)^2$$

а слѣдовательно во всѣ послѣдующіе за t моменты производная взятая отъ функціи

$$(P-p)^2+(Q-q)^2-(u'-z\,.\,\text{tang}\,f)^2$$

относительно времени t должна оставаться постоянно положительною, но если эта производная до времени t была отрицательна, а послѣ этого момента положительна, то, въ самый моментъ t, въ который изъ извѣстной точки земли прикосновеніе краевъ должно быть видимо какъ наибольшій фазъ затмѣнія, необходимо, чтобы эта производная равнялась нулю. И такъ условіе того, что въ опредѣленной точкѣ земли прикосновеніе краевъ свѣтилъ видимо какъ наибольшій фазъ затмѣнія выразится уравненіемъ

$$(P-p)\frac{d(P-p)}{dt}+(Q-q)\frac{d(Q-q)}{dt}-\left(u'-z\,.\,\text{tang}\,f\right)\left[\frac{du'}{dt}-\frac{d(z\,.\,\text{tang}\,f)}{dt}\right]=0$$

но мы видѣли, что

$$(P-p)=u\,.\sin\theta'=(u'-z\,.\,\text{tang}\,f)\sin\theta'$$
$$(Q-q)=u\,.\cos\theta'=(u'-z\,.\,\text{tang}\,f)\cos\theta'$$

Слѣдовательно предыдущее уравненіе можемъ представить въ видѣ

$$\frac{d(P-p)}{dt}\cdot\sin\theta'+\frac{d(Q-q)}{dt}\cdot\cos\theta'-\left[\frac{du'}{dt}-\frac{d(z\,.\,\text{tang}\,f)}{dt}\right]=0$$

Измѣненія u' и f со временемъ такъ малы, что можемъ считать эти величины за постоянныя и вмѣсто предыдущаго разсматривать уравненіе

$$\frac{d(P-p)}{dt}\cdot\sin\theta'+\frac{d(Q-q)}{dt}\cdot\cos\theta'+\frac{dz}{dt}\cdot\text{tang}\,f=0 \qquad (265)$$

Но изъ сравненія уравненій

$$P-p=u\sin\theta'$$
$$Q-q=u\cos\theta'$$
$$u=u'-z\,.\,\text{tang}\,f$$

съ уравненіями (245) легко заключить, что

$$P-p=-\gamma\,.\cos N'+\frac{\tau-\lambda-\mu}{15}n\,.\sin N'-(1+x)\cos\varphi_1\sin(\tau+\Delta\alpha)$$

$$Q-q=\quad\gamma\,.\sin N'+\frac{\tau-\lambda-\mu}{15}n\,.\cos N'$$
$$-(1+x)\left[(1-c)\sin\varphi_1\cos\delta-\cos\varphi_1\sin\delta\cos(\tau+\Delta\alpha)\right]$$

$$z=(1+x)\left[(1-c)\sin\varphi_1\sin\delta+\cos\varphi_1\cos\delta\cos(\tau+\Delta\alpha)\right]$$

Чтобы составить по этимъ уравненіямъ производныя входящія въ уравненіе (265), будемъ дифференцировать эти уравненія считая за перемѣнное только τ. Что касается до x, c и $\Delta\alpha$, то ихъ по малости прямо примемъ равными нулю. При такихъ допущеніяхъ найдемъ:

$$\frac{d(P-p)}{dt} = \frac{n}{15} \cdot \sin N' \frac{d\tau}{dt} - \cos\varphi_1 \cos\tau \frac{d\tau}{dt}$$

$$\frac{d(Q-q)}{dt} = \frac{n}{15} \cdot \cos N' \frac{d\tau}{dt} - \cos\varphi_1 \sin\delta \sin\tau \frac{d\tau}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\cos\varphi_1 \cos\delta \sin\tau \frac{d\tau}{dt}$$

Но такъ какъ λ мы принимаемъ за постоянную величину, то изъ соотношенія $\lambda = \tau - t$ заключаемъ, что $\frac{d\tau}{dt} = 1$. Такимъ образомъ

$$\frac{d(P-p)}{dt} = \frac{n}{\varkappa} \cdot \sin N' - \cos\varphi_1 \cos\tau$$

$$\frac{d(Q-q)}{dt} = \frac{n}{\varkappa} \cdot \cos N' - \cos\varphi_1 \sin\delta \,.\, \sin\tau$$

$$\frac{dz}{dt} = -\cos\varphi \,.\, \cos\delta \,.\, \sin\tau$$

гдѣ, какъ прежде, $\varkappa = 15.3600 \,.\, \sin 1''$. Если внесемъ эти величины въ уравненіе (265), то найдемъ, что изъ данной точки поверхности земли будетъ только тогда видимо прикосновеніе краевъ затмѣвающаго и затмѣваемаго свѣтилъ какъ наибольшій фазъ затмѣнія, когда координаты этой точки будутъ удовлетворять уравненіе

$$\left[\frac{n}{\varkappa} \cdot \sin N' - \cos\varphi_1 \cos\tau\right] \sin 0' + \left[\frac{n}{\varkappa} \cdot \cos N' - \cos\varphi_1 \sin\delta \,.\, \sin\tau\right] \cos 0'$$
$$- \cos\varphi_1 \cos\delta \,.\, \sin\tau \,.\, \operatorname{tang} f = 0$$

Мы положили $0' - N' = \psi$, а потому найденное уравненіе можемъ представить въ видѣ

$$\left[\frac{n}{\varkappa} \sin N' - \cos\varphi_1 \cos\tau\right] \sin(N' + \psi) + \left[\frac{n}{\varkappa} \cdot \cos N' - \cos\varphi_1 \sin\delta \sin\tau\right] \cos(N' + \psi)$$
$$- \cos\varphi_1 \cos\delta \,.\, \sin\tau \,.\, \operatorname{tang} f = 0$$

откуда легко находимъ

$$(265_*) \quad \left[\frac{n}{\varkappa} - \cos\varphi_1 \left\{\cos\tau \sin N' + \sin\tau \sin\delta \cos N'\right\}\right] \cos\psi$$
$$- \left[\cos\varphi_1 \left\{\cos N' \cos\tau - \sin N' \sin\delta \sin\tau\right\}\right] \sin\psi = \operatorname{tang} f \cos\varphi_1 \cos\delta . \sin\tau$$

Этимъ уравненіемъ мы и будемъ пользоваться для опредѣленія значеній φ соотвѣт-

ствующихъ точкамъ сѣверной и южной границы частнаго затмѣнія. Представимъ это уравненіе въ видѣ

$$\left[\frac{n}{\varkappa} - \cos\varphi_1 \left\{\cos\tau \sin N' + \sin\tau \sin\delta \cos N'\right\}\right] \cos\psi$$

$$- \left[\cos\varphi_1 \left\{\cos N' \cos\tau - \sin N' \sin\delta \sin\tau\right\} + \cos\varphi_1 \cos\delta \sin\tau \cdot \frac{\operatorname{tang} f}{\sin\psi}\right] \sin\psi = 0$$

положимъ

$$\left.\begin{aligned} \sin N' &= \sin k . \sin K \\ \cos N' . \sin\delta &= \sin k . \cos K \\ \cos N' . \cos\delta &= \cos k \\ \sin N' \sin\delta - \cos\delta \cdot \frac{\operatorname{tang} f}{\sin\psi} &= g . \sin G \\ \cos N' &= g . \cos G \end{aligned}\right\} \qquad (266)$$

тогда предыдущее уравненіе приведется къ виду

$$\left[\frac{n}{\varkappa} - \sin k \cos\varphi_1 \sin(K+\tau)\right] \cos\psi - g \cos\varphi_1 \cos(G+\tau) . \sin\psi = 0$$

откуда

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\frac{n}{\varkappa} - \sin k . \cos\varphi_1 \sin(K+\tau)}{g . \cos\varphi_1 \cos(G+\tau)} \qquad (267)$$

Сѣверная и южная границы частнаго затмѣнія характеризуются тѣмъ, что изъ ихъ точекъ въ извѣстное время видимо прикосновеніе краевъ затмѣвающаго и затмѣваемаго свѣтилъ какъ наибольшій фазъ затмѣнія. Если извѣстный фазъ есть наибольшій, то для него ψ должно удовлетворять предыдущему уравненію; если этотъ фазъ есть внѣшнее прикосновеніе краевъ, то точка земли, изъ которой въ данное время видѣнъ этотъ фазъ, должна находиться на поверхности конуса лунной полутѣни; слѣдовательно координаты этой точки для даннаго времени должны удовлетворять уравненіямъ (245). Этими уравненіями совмѣстно съ уравненіемъ (267) мы и должны по этому пользоваться для вычисленія координатъ точекъ, лежащихъ на сѣверной и южной границѣ частнаго затмѣнія. Чтобы пользоваться уравненіями (245) совмѣстно съ уравненіемъ (267), исключимъ изъ уравненій (245) величину θ' и замѣнимъ ее величиною ψ. Для этого помножимъ второе изъ уравненій (245) на $\cos N'$, а третье на $\sin N'$ и вычтемъ второе произведеніе изъ перваго, затѣмъ помножимъ второе изъ уравненій (245) на $\sin N'$ и сложимъ произведеніе съ третьимъ изъ тѣхъ же уравненій умноженнымъ на $\cos N'$. Дѣлая все это, мы, какъ и при выводѣ уравненія (267), пренебрежемъ величиною $\Delta\alpha$ и примемъ $1+x$ за единицу. Послѣ выполненія всего сказаннаго, найдемъ

$$\left.\begin{aligned} u.\sin\psi &= -\gamma - \cos\varphi_1 [\cos N' \sin\tau + \sin N' \sin\delta \cos\tau] + (1-c) \sin\varphi_1 \sin N' \cos\delta \\ u.\cos\psi &= \frac{\tau-\lambda-\mu}{15} n + \cos\varphi_1 \left[\cos N' \sin\delta \cos\tau - \sin N' \sin\tau\right] - (1-c) \sin\varphi_1 \cos N' \cos\delta \end{aligned}\right\} \qquad (268)$$

Если исключимъ изъ перваго изъ этихъ уравненій величину u посредствомъ перваго изъ уравненій (245), то получимъ

$$u' \sin\psi = -\gamma + (1-c)\sin\varphi_1\,[\sin\delta.\operatorname{tang} f.\sin\psi + \sin N'\cos\delta]$$
$$-\cos\varphi_1\,\{\cos N'.\sin\tau + [\sin N'\sin\delta - \cos\delta\operatorname{tang} f\sin\psi]\cos\tau\}$$

положимъ здѣсь

$$(269)\qquad \begin{aligned} \sin\psi.\operatorname{tang} f &= m.\sin M \\ \sin N' &= m.\cos M \\ m.\sin(\delta - M) &= p.\sin P \\ \cos N' &= p.\cos P \end{aligned}$$

тогда

$$(270)\qquad u'.\sin\psi = -\gamma + (1-c)\,m.\sin\varphi_1\cos(\delta - M) - p.\cos\varphi_1\sin(P+\tau).$$

Обращая вниманіе на уравненія (266), приведемъ второе изъ уравненій (268) къ виду

$$(271)\qquad u.\cos\psi = \frac{\tau - \lambda - \mu}{15}\,n + \cos\varphi_1\sin k\cos(K+\tau) - (1-c)\sin\varphi_1\cos k$$

Если найдемъ систему величинъ φ_1 и λ, удовлетворяющихъ совокупности уравненій (267), (270) и (271), то такія координаты будутъ принадлежать точкамъ сѣверной и южной границы частнаго затмѣнія. Чтобы выполнить это опредѣленіе, необходимо принять одну изъ трехъ величинъ τ, λ, φ_1, входящихъ въ упомянутыя уравненія, за произвольную и по ней вычислить двѣ другія. Примемъ за произвольную величину τ и положимъ

$$(272)\qquad \begin{aligned} \theta_0 &= \sin k.\sin(K+\tau); & \eta_0 &= g.\cos(G+\tau) \\ \theta_1 &= (1-c)\,m.\cos(\delta - M); & \eta_1 &= p.\sin(P+\tau) \\ \alpha &= \frac{15}{n}.\sin k.\cos(K+\tau); & \beta &= \frac{15\,(1-c)}{n}\cos k \end{aligned}$$

тогда три уравненія, отъ которыхъ зависитъ рѣшеніе вопроса, примутъ видъ

$$(273)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tang}\psi &= \frac{\frac{n}{\varkappa} - \theta_0.\cos\varphi_1}{\eta_0\cos\varphi_1} \\ u'.\sin\psi &= -\gamma + \theta_1\sin\varphi_1 - \eta_1\cos\varphi_1 \\ \frac{15}{n}.u.\cos\psi &= \tau - \lambda - \mu + \alpha.\cos\varphi_1 - \beta.\sin\varphi_1 \end{aligned}$$

Пусть еще

$$(274)\qquad \theta_1 = a.\cos A; \qquad \eta_1 = a.\sin A$$

тогда второе изъ предыдущихъ уравненій дастъ

$$(275)\qquad \sin(\varphi_1 - A) = \frac{\gamma + u'.\sin\psi}{a}$$

Изъ этого уравненія по данному часовому углу τ опредѣлится φ_1, т. е. одна коор-

динаты точки искомыхъ границъ частнаго затмѣнія. Чтобы опредѣлить λ, т. е. другую координату, положимъ въ первомъ изъ уравненій (244)

$$\alpha_1 = (1 - c) \operatorname{tang} f . \sin \delta, \quad \beta_1 = \operatorname{tang} f . \cos \delta . \cos \tau \tag{276}$$

тогда, пренебрегая дѣйствіемъ рефракціи, приведемъ упомянутое уравненіе къ виду

$$u = u' - \alpha_1 \sin \varphi_1 - \beta_1 \cos \varphi_1 \tag{277}$$

Это уравненіе служитъ для опредѣленія величины u, найдя которую, вычислимъ другую координату λ по третьему изъ уравненій (273), имѣющему видъ

$$\lambda = \tau - \mu - \beta \sin \varphi_1 + \alpha . \cos \varphi_1 - \frac{15}{n} . u . \cos \psi . \tag{278}$$

Понятно, что изложеннымъ теперь способомъ вопросъ о положеніи на земной поверхности сѣверной и южной границы частнаго затмѣнія рѣшается послѣдовательными приближеніями. Въ уравненіи (265_*) первый членъ, по крайней мѣрѣ для солнечныхъ затмѣній, значительно болѣе всѣхъ другихъ членовъ, а потому слѣдуетъ заключить, что для кривыхъ сѣверной и южной границы частнаго затмѣнія ψ близко или къ 90°, или къ 270°. Основываясь на этомъ, въ первомъ приближеніи можно принять $\sin \psi = \pm 1$ и вычисленіе координатъ точекъ искомыхъ границъ можно расположить въ слѣдующемъ порядкѣ. Принимая въ первомъ приближеніи $\sin \psi = \pm 1$, вычислимъ изъ уравненій (266) величины k, K, g, G и изъ уравненій (269) величины m, M, P, p. Имѣя все это, изъ уравненій (272) находимъ ϑ_0, ϑ_1, η_0, η_1. Далѣе изъ уравненій (274) находимъ величины a и A, съ которыми изъ уравненія (275), принимая $\sin \psi = \pm 1$, вычислимъ величину φ_1; съ нею по первому изъ уравненій (273) вычисляемъ наконецъ болѣе точныя значенія ψ. Эти найденныя теперь величины ψ служатъ основаніемъ второму приближенію, которое дѣлаемъ въ томъ же порядкѣ, какъ и первое. Когда послѣдовательными приближеніями величины ψ и φ_1 будутъ опредѣлены достаточно вѣрно, переходимъ къ вычисленію координаты λ. Для этого прежде всего изъ уравненій (272) вычисляемъ α и β, далѣе изъ уравненій (276) находимъ величины α_1 и β_1, изъ уравненія (277) опредѣляемъ величину u и наконецъ по уравненію (278) вычисляемъ искомую координату λ. Замѣтимъ еще, что при вычисленіи λ должно пользоваться тѣми значеніями вспомогательныхъ величинъ и координаты φ_1, которыя найдены въ послѣднемъ приближеніи вычисленія угла ψ.

Принимая за произвольную величину часовой уголъ τ, мы опредѣлимъ положенія не всѣхъ точекъ кривой одинаково точно. Въ самомъ дѣлѣ для тѣхъ точекъ разсматриваемыхъ граничныхъ кривыхъ, для которыхъ $\sin (\varphi_1 - A)$ мало разнится отъ $+1$ или -1, опредѣленіе координаты φ_1 изъ уравненія (275) не можетъ быть точно; въ такомъ случаѣ удобнѣе принять за произвольную величину не часовой уголъ τ, а самое φ_1. Для этого представимъ уравненіе (270) въ видѣ

$$\sin (P + \tau) = \frac{m}{p} (1 - c) \cos (\delta - M) \operatorname{tang} \varphi_1 - \frac{\gamma + u' . \sin \psi}{p . \cos \varphi_1} \tag{279}$$

принимая въ этомъ выраженіи для перваго приближенія $\sin \psi = \pm 1$ и давая произвольныя значенія φ_1, найдемъ соотвѣтствующія имъ значенія τ; съ ними по первому изъ уравненій (173) найдемъ болѣе точныя значенія ψ и т. д.

Уравненія, изъ которыхъ по изложенному способу опредѣляются величины φ_1 и λ, служатъ для вычисленія какъ сѣверной, такъ равно и южной границы частнаго затмѣнія на землѣ вообще. Легко видѣть различіе въ выше приведенныхъ уравненіяхъ для той и другой кривой. θ' есть уголъ положенія точки прикосновенія краевъ, считаемый отъ круга склоненій проведеннаго черезъ центръ солнца, N' есть уголъ составляемый орбитой луны съ тѣмъ же кругомъ склоненій, слѣдовательно ψ есть уголъ положенія упомянутой точки, но считаемый отъ орбиты луны. Изъ точекъ сѣверной границы частнаго затмѣнія видимо прикосновеніе краевъ солнца и луны на южномъ краѣ солнца, т. е. изъ точекъ сѣверной кривой во время прикосновенія краевъ, центръ луны видѣнъ южнѣе центра солнца; по этому во время прикосновенія краевъ обоихъ свѣтилъ, прикосновенія видимаго изъ сѣверной границы частнаго затмѣнія луна находится въ части ея видимой орбиты расположенной подъ эклиптикой и уголъ ψ, т. е. уголъ положенія точки прикосновенія краевъ, считаемый отъ орбиты луны отъ запада къ востоку, будетъ, какъ легко видѣть изъ простаго чертежа, близокъ къ $90°$ и слѣдовательно $\sin\psi$ будетъ близокъ къ $+1$. По этому если примемъ ψ за уголъ находящійся въ первой полуокружности, то изъ приведенныхъ выше уравненій опредѣлятся точки сѣверной границы частнаго затмѣнія. Если же примемъ ψ за уголъ лежащій во второй полуокружности, то по изложенному способу вычислимъ координаты точекъ южной границы частнаго затмѣнія на землѣ вообще.

30. Опредѣлимъ теперь координаты тѣхъ точекъ земли, въ которыхъ сѣверная и южная границы частнаго затмѣнія касаются кривыхъ линій восточной и западной границы. Понятно, что опредѣленіе этихъ точекъ прикосновенія можетъ быть сдѣлано на основаніи тѣхъ же уравненій, какими мы пользуемся для вычисленія сѣверной и южной границы частнаго затмѣнія, ибо эти точки находятся на упомянутыхъ сейчасъ кривыхъ линіяхъ; но первое изъ уравненій (273) не довольно точно для разсматриваемаго теперь случая. Опредѣляя аналитическую форму условія, при которомъ изъ данной точки земли данный фазъ затмѣнія можетъ быть видѣнъ какъ наибольшій, мы пренебрегали дѣйствіемъ рефракціи, которое въ настоящемъ случаѣ можетъ быть довольно значительно, ибо въ искомыхъ точкахъ прикосновенія граничныхъ кривыхъ прикосновеніе краевъ солнца и луны видимо на горизонтѣ. И такъ, имѣя въ виду замѣнить для разсматриваемаго случая первое изъ уравненій (273) болѣе точнымъ, составимъ производныя $\frac{d(P-p)}{dt}$, $\frac{d(Q-q)}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$, принимая x за перемѣнную величину; но при этомъ будемъ считать $\Delta\alpha = 0$; $c = 0$; $\frac{dc}{dt}\tang f = 0$ и примемъ послѣ дифференцированія $1+x$ за единицу. Очевидно, что это приведется къ тому, чтобы къ найденнымъ уже производнымъ прибавить члены зависящіе отъ измѣненія x. Такимъ образомъ къ производной $\frac{d(P-p)}{dt}$ придется прибавить членъ

$$-\cos\varphi_1 \sin\tau \frac{dx}{dt}$$

и производную $\frac{d(Q-q)}{dt}$ — добавить членомъ

$$-(\sin\varphi_1\cos\delta-\cos\varphi_1\sin\delta\cos\tau)\frac{dx}{dt}$$

Что касается до производной $\frac{dz}{dt}$, то ее оставимъ безъ измѣненія, ибо она въ уравненіи (265) умножается на $\operatorname{tang} f$, а мы условились пренебрегать произведеніемъ $\operatorname{tang} f\frac{dx}{dt}$. И такъ внося дополненныя производныя въ уравненіе (265), получимъ

$$\left[\frac{n}{\varkappa}\sin N'-\cos\varphi_1\cos\tau-\cos\varphi_1\sin\tau\frac{dx}{dt}\right]\sin\theta'+\left[\frac{n}{\varkappa}\cos N'-\cos\varphi_1\sin\delta\sin\tau\right.$$

$$\left.-(\sin\varphi_1\cos\delta-\cos\varphi_1\sin\delta\cos\tau)\frac{dx}{dt}\right]\cos\theta'-\cos\varphi_1\cos\delta.\sin\tau.\operatorname{tang} f=0.$$

но такъ какъ $\theta'=N'+\psi$, то это, подобно какъ въ предыдущемъ случаѣ, приведется къ виду

$$\left[\frac{n}{\varkappa}-\cos\varphi_1\left\{\sin N'\cos\tau+\cos N'\sin\delta.\sin\tau\right\}\right.$$

$$\left.-\frac{dx}{dt}\left\{\sin\varphi_1\cos\delta\cos N'+\cos\varphi_1(\sin N'\sin\tau-\cos N'\sin\delta\cos\tau)\right\}\right]\cos\psi$$

$$-\left[\cos\varphi_1\left\{\cos N'\cos\tau-\left(\sin N'\sin\delta-\cos\delta\frac{\operatorname{tang} f}{\sin\psi}\right)\sin\tau\right\}\right. \tag{280}$$

$$\left.-\frac{dx}{dt}\left\{\sin\varphi_1\sin N'\cos\delta-\cos\varphi_1(\cos N'\sin\tau+\sin N'\sin\delta\cos\tau)\right\}\right]\sin\psi=0$$

Чтобы пользоваться этимъ уравненіемъ для нашей цѣли, опредѣлимъ производную $\frac{dx}{dt}$ Замѣтимъ что

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dH}\cdot\frac{dH}{dt}.$$

Если будемъ дифференцировать третье и четвертое изъ уравненій (246), принимая въ нихъ φ_1 за постоянную величину и пренебрегая величиною $\Delta\alpha$, то получимъ

$$\cos\varphi_1\cos\tau=\cos H.\cos K\cdot\frac{dK}{dt}-\sin K.\sin H.\frac{dH}{dt}$$

$$-\cos\varphi_1\sin\tau=\cos D.\cos H\cdot\frac{dH}{dt}+\cos K.\sin D.\sin H\cdot\frac{dH}{dt}+\sin D.\cos H.\sin K\cdot\frac{dK}{dt}$$

исключая изъ этихъ уравненій производную $\frac{dK}{dt}$, найдемъ

$$\cos\varphi_1(\cos\tau\sin K\sin D+\cos K\sin\tau)=-(\sin D\sin H+\cos D\cos H\cos K)\frac{dH}{dt}$$

Изъ сферическаго треугольника, заключающагося между точкой прикосновенія краевъ солнца и луны, полюсомъ экватора и зенитомъ мѣста наблюденія легко видѣть, что коэффиціентъ при $\cos\varphi_1$ есть $\sin M.\sin\varphi_1$, гдѣ подъ M разумѣемъ азимутъ точки

прикосновенія краевъ; а коэффиціентъ при $\frac{dH}{dt}$ есть ни что иное какъ $\sin\varphi_1$. Поэтому предыдущее уравненіе приводится къ виду

$$\cos\varphi_1 \sin M = -\frac{dH}{dt}$$

Но изъ того же треугольника видно, что

$$\cos\varphi_1 \sin M = \sin K . \cos D$$

слѣдовательно:

$$\frac{dH}{dt} = -\cos D . \sin K$$

Остается опредѣлить производную $\frac{dx}{dH}$. Обратимся для этого къ уравненію (243), въ немъ подъ z_0 разумѣемъ видимое, а подъ z истинное зенитное разстояніе, поэтому $z = z_0 + r$, если подъ r разумѣемъ табличную рефракцію. Такимъ образомъ уравненіе (243) можно представить въ видѣ

$$x = \frac{\sin z_0}{\sin (z_0 + r)} \sqrt{1 + cd} - 1$$

Но такъ какъ r есть малая дуга, то можно принять

$$\sin (z_0 + r) = \sin z_0 + r . \cos z_0$$

Такимъ образомъ

$$x = (1 + cd)^{\frac{1}{2}} . \sin z_0 (\sin z_0 + r . \cos z_0)^{-1} - 1$$

Разлагая оба производителя въ ряды и ограничиваясь членами перваго порядка относительно r и cd, получимъ

$$x = \frac{cd}{2} - r . \operatorname{cotg} z_0$$

откуда

$$\frac{dx}{dz_0} = \frac{r}{\sin^2 z_0} - \operatorname{cotg} z_0 . \frac{dr}{dz_0}$$

Чтобы получить отсюда искомую производную $\frac{dx}{dH}$, замѣтимъ, что $z_0 = 90^\circ - H$, и такъ

$$\frac{dx}{dH} = -\frac{r}{\cos^2 H} + \operatorname{tang} H \frac{dr}{dH}$$

Для точекъ близкихъ къ горизонту, какія мы теперь и имѣемъ въ виду, H есть малая дуга, для которой можемъ принять $\cos^2 H = 1$ и отвергнуть членъ $\operatorname{tang} H . \frac{dr}{dH}$, слѣдовательно можно считать

$$\frac{dx}{dH} = -r$$

Имѣя это, заключаемъ, что

$$\frac{dx}{dt} = r \,.\, \cos D \,.\, \sin K$$

Внесемъ это въ уравненіе (280), изъ котораго посредствомъ уравненій (246) исключимъ δ, τ и φ_1. Если при этомъ обратимъ вниманіе на уравненія (250) и положимъ какъ прежде $N' - K = W$, то послѣ легкихъ приведеній получимъ

$$\begin{aligned}\cos\psi\Big[\frac{n}{\varkappa} + e' \,.\, \sin D \cos H \sin(W + \nu') - e' \cos D \sin H \sin(N' + \nu') \\ - r \,.\, \cos D \cos H \sin K \cos W\Big] \\ + \sin\psi\Big[e \,.\, \sin D \cos H \cos(W + \nu) - e \cos D \sin H \cos(N' + \nu) \\ + r \cos D \cos H \sin K \sin W + \cos D \,.\, \cos H \,.\, \sin K \,.\, \frac{\tan f}{\sin\psi}\Big] = 0\end{aligned} \quad (281)$$

Каждая изъ точекъ прикосновенія границъ частнаго затмѣнія на землѣ вообще, находится на восточной или западной кривой, а потому для этихъ мѣстъ земной поверхности высота точки прикосновенія краевъ солнца и луны есть малая величина и для нея безъ чувствительной погрѣшности можно въ предыдущемъ уравненіи принять $\cos H = 1$. Что касается до $\sin H$, то его можно исключить изъ предыдущаго уравненія на основаніи слѣдующихъ соображеній. Мы видѣли, что для всѣхъ точекъ восточно-западной кривой должно удовлетворяться уравненіе (254), которое при допущеніи $\cos H = 1$ принимаетъ видъ

$$\sin H = - \tan f \,.\, \cos(\psi + N' - K)$$

но если мы обращаемъ вниманіе на дѣйствіе рефракціи, то здѣсь вмѣсто $\sin H$ должны будемъ поставить $\sin(H + r)$, что при допущеніи $\cos H = 1$ приводится къ

$$\sin(H + r) = \sin H + r.$$

если замѣтимъ еще, что $N' - K = W$, то уравненіе (254) представится въ видѣ

$$\sin H = - \tan f \,.\, \cos(\psi + W) - r \quad (282)$$

вводя это въ уравненіе (281) и принимая $\cos H = 1$, получимъ

$$\begin{aligned}\cos\psi\Big[\frac{n}{\gamma} + e' \sin D \sin(W + \nu') + e' \cos D \cos(\psi + W) \sin(N' + \nu') \,.\, \tan f \\ + r \,.\, \cos D\Big\{e' \sin(N' + \nu') - \sin K \cos W\Big\}\Big] \\ + \sin\psi\Big[e \,.\, \sin D \cos(W + \nu) + e \,.\, \cos D \cos(\psi + W) \,.\, \cos(N' + \nu) \,.\, \tan f \\ + r \cos D\Big\{e \,.\, \cos(N' + \nu) + \sin K \sin W\Big\} + \cos D \sin K \frac{\tan f}{\sin\psi}\Big] = 0\end{aligned} \quad (283)$$

Отклоненіе фигуры земли отъ сферы вообще не много вліяетъ на положеніе и видъ граничныхъ кривыхъ. Величины e и e' зависящія отъ сжатія земли мало отличаются,

отъ единицы, величины ν и ν', обусловливающіяся существованіемъ сжатія, мало отличны отъ нуля, а потому въ предыдущемъ уравненіи безъ чувствительной погрѣшности въ членахъ зависящихъ отъ малаго множителя ε можно извѣстнымъ образомъ ввести величины e, e', ν и ν' и представить эти члены въ видѣ

$$r.\cos D\left\{e'.\sin(N'+\nu') - e'\sin[N'+\nu'-(W+\nu')]\cos(W+\nu')\right\}$$

и

$$r.\cos D\left\{e\cos(N'+\nu) + e\sin[N'+\nu-(W+\nu)]\sin(W+\nu)\right\}$$

но по сокращеніи эти члены получаютъ форму

$$e'r.\cos D\sin(W+\nu')\cos(N'-W)\,; \qquad er.\cos D\cos(W+\nu)\cos(N'-W)$$

а потому уравненіе (283) приводится къ слѣдующему виду

$$\cos\psi\Big[\frac{n}{\varkappa}+e'\sin D.\sin(W+\nu')+e'.\cos D\cos(\psi+W)\sin(N'+\nu')\operatorname{tang}f$$
$$+\,e'r.\cos D\sin(W+\nu').\cos(N'-W)\Big]$$
$$+\sin\psi\Big[e.\sin D.\cos(W+\nu)+\cos D\operatorname{tang}f\left\{e.\cos(\psi+W)\cos(N'+\nu)+\frac{\sin K}{\sin\psi}\right\}$$
$$+\,er.\cos D.\cos(W+\nu)\cos(N'-W)\Big]=0$$

положимъ здѣсь

(284)
$$\sin D + r\cos D\cos(N'-W) = E$$
$$\cos D.\cos(\psi+W)\operatorname{tang}f = \alpha$$

тогда предыдущее уравненіе представится въ слѣдующей формѣ

$$\cos\psi\left[\frac{n}{\varkappa}+e'.E\sin(W+\nu')+e'.\alpha\sin(N'+\nu')\right]$$
$$+\sin\psi\left[e.E.\cos(W+\nu)+e.\alpha.\cos(N'+\nu)+\cos D\sin K\cdot\frac{\operatorname{tang}f}{\sin\psi}\right]=0$$

откуда

(285)
$$\operatorname{tang}\psi = -\frac{\frac{n}{\varkappa}+e'E\sin(W+\nu')+e'.\alpha\sin(N'+\nu')}{e\,E.\cos(W+\nu)+e\,\alpha.\cos(N'+\nu)+\cos D\sin K\frac{\operatorname{tang}f}{\sin\psi}}$$

Это уравненіе и представляетъ собою условіе, при выполненіи котораго изъ данной точки земной поверхности данный фазъ затмѣнія будетъ видѣнъ какъ наибольшій.

Такъ какъ искомыя точки прикосновенія границъ лежатъ на восточно-западной кривой, то для опредѣленія координатъ этихъ точекъ предыдущимъ уравненіемъ мы должны пользоваться совмѣстно съ уравненіями, служащими для вычисленія координатъ точекъ восточно-западной границы частнаго затмѣнія. Но понятно, что по этому способу нашъ вопросъ долженъ быть рѣшенъ послѣдовательными приближеніями, и все вычисленіе удобно расположить при этомъ въ слѣдующемъ порядкѣ. Точки, ко-

ординаты которыхъ теперь ищемъ, лежатъ на сѣверной или южной границѣ частнаго затмѣнія, но мы видѣли, что для этихъ кривыхъ ψ близко или къ 90^0 или къ 270^0, поэтому въ первомъ приближеніи опредѣлимъ величину W изъ уравненія

$$\sin (W + \nu) = \frac{\gamma \pm u'}{e(1+x)} \tag{286}$$

или просто изъ уравненія

$$\sin (W + \nu) = \frac{\gamma}{e} \pm \frac{u'}{e} \tag{287}$$

которое получимъ изъ уравненія (255), принимая въ немъ $\sin \psi = \pm 1$ и $x = 0$. Но принимая $\sin \psi = \pm 1$, т. е. полагая $\psi = 90$ и $\psi = 270^0$, можемъ представить второе изъ уравненій (284) въ видѣ

$$\mp \cos D \sin W \tang f = \alpha$$

вычисливъ посредствомъ этого α и посредствомъ перваго изъ уравненій (284) величину E, найдемъ четыре значенія ψ, соотвѣтствующія четыремъ искомымъ точкамъ прикосновенія, изъ уравненія (285), въ которомъ для перваго приближенія примемъ $\sin \psi = \pm 1$. Съ найденными величинами ψ изъ уравненія (255) опредѣляемъ величины W и затѣмъ вычисляемъ ψ посредствомъ полныхъ уравненій (284) и (285). Если ψ и W опредѣлены съ достаточною точностію, то изъ уравненій (282) и (257) находимъ H и t и наконецъ, имѣя ихъ, вычисляемъ φ_1 и λ тѣмъ же самымъ способомъ, какой мы употребляли для опредѣленія координатъ точекъ восточно-западной границы частнаго затмѣнія.

31. Внутри сомкнутыхъ вѣтвей восточно-западной границы частнаго затмѣнія располагаются кривыя линіи, изъ точекъ которыхъ наибольшій фазъ затмѣнія, возможный для этихъ мѣстъ земной поверхности, видѣнъ на горизонтѣ. Легко понять, что кривая линія наибольшаго фаза на горизонтѣ должна состоять изъ двухъ вѣтвей. На одной изъ нихъ наибольшій фазъ затмѣнія видѣнъ при восхожденіи солнца, на другой—при захожденіи. Первая изъ этихъ вѣтвей должна находиться въ западной части того пространства земли, съ котораго вообще видимо затмѣніе, другая—въ восточной. Въ точкахъ первой вѣтви видимо только постоянное уменьшеніе фаза затмѣнія, въ точкахъ второй—постоянное возрастаніе. Для первой вѣтви всѣ величины фаза отъ перваго внѣшняго прикосновенія краевъ солнца и луны до наибольшаго фаза будутъ подъ горизонтомъ, на второй вѣтви то же самое будетъ имѣть мѣсто для всѣхъ фазовъ отъ наибольшаго до послѣдняго внѣшняго прикосновенія краевъ затмѣвающаго и затмѣваемаго свѣтилъ. Для каждой изъ вѣтвей этой кривой линіи величина фаза не будетъ постоянная, какъ для другихъ кривыхъ линій, а будетъ измѣняться отъ одной точки кривой до другой,—отъ простаго внѣшняго прикосновенія краевъ до центральнаго затмѣнія. Другими словами, на каждой изъ вѣтвей будутъ точки, изъ которыхъ будетъ видимо на горизонтѣ простое прикосновеніе краевъ какъ наибольшій фазъ затмѣнія и на той же кривой будетъ находиться точка, изъ которой, какъ наибольшій фазъ будетъ видимо на горизонтѣ центральное затмѣніе.

Внѣ линіи центральнаго затмѣнія каждая точка земли, находящаяся внутри границъ частнаго затмѣнія, только до извѣстной степени приближается къ оси ко-

нуса тѣни, и моменту наименьшагося разстоянія отъ этой оси соотвѣтствуетъ время наибольшаго фаза затмѣнія. Если проведемъ черезъ точку земли приблизившуюся на кратчайшее разстояніе къ оси конуса тѣни, коническую поверхность, имѣющую ось и вершину общія съ конусомъ полутѣни, то каждая образующая этой новой конической поверхности по вступленіи конуса полутѣни на землѣ будетъ пересѣкаться съ поверхностію земли въ двухъ точкахъ, одна точка пересѣченія находится на сторонѣ земли обращенной къ затмѣвающему и затмѣваемому свѣтиламъ, другая на сторонѣ противуположной. Если изъ точки приблизившейся на кратчайшее разстояніе къ оси конуса тѣни видѣнъ наибольшій фазъ затмѣнія на горизонтѣ, то образующая линія новой конической поверхности, проведенная черезъ такою точку земли, должна касаться земной поверхности и двѣ точки пересѣченія съ землею этой образующей сливаются въ одну, которая и будетъ принадлежать искомой кривой линіи наибольшаго фаза на горизонтѣ. Понятно, что координаты точекъ этой кривой могутъ быть вычисляемы по тѣмъ же уравненіямъ, которыя мы нашли для вычисленія восточно западной кривой, если только въ этихъ уравненіяхъ f и u', какъ относящіяся къ упомянутой выше новой конической поверхности, будемъ считать для опредѣляемой кривой за величины перемѣнныя и если къ упомянутымъ уравненіямъ, имѣющимъ мѣсто для восточно-западной кривой, прибавимъ аналитическое выраженіе условія, что изъ разсматриваемой точки земной поверхности въ данное время фазъ данной величины видѣнъ какъ наибольшій.

Если для точекъ разсматриваемой теперь кривой линіи величины наибольшаго фаза затмѣнія различны, то для этой кривой величины f и u', которыми объусловливается величина фаза, нельзя считать за постоянныя и извѣстныя. Здѣсь подъ f мы разумѣемъ уголъ образующей новаго внутренняго конуса съ осью его, а подъ u' радіусъ сѣченія этого конуса плоскостію xy первоначальной системы осей координатъ. Покажемъ прежде всего способъ, посредствомъ котораго могутъ быть найдены значенія f и u', соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ той перемѣнной, которую при вычисленіи кривой принимаемъ за произвольную. Подобно тому какъ при вычисленіи восточно-западной границы частнаго затмѣнія, за произвольную величину мы примемъ $W+\nu$. Для опредѣленія u' и f будемъ пользоваться, между прочимъ, выраженіемъ условія наибольшаго фаза, которое, какъ мы видѣли, со включеніемъ членовъ зависящихъ отъ дѣйствія рефракціи, представляется въ видѣ уравненія (285). Но ψ изъ уравненія (285) не можетъ быть опредѣлено до тѣхъ поръ, пока не будетъ извѣстна перемѣнная величина f; такъ какъ f вообще есть малый уголъ, то въ первомъ приближеніи примемъ $\operatorname{tang} f = 0$, тогда по второму изъ выраженій (284) величина α обратится въ нуль, и для опредѣленія ψ будемъ имѣть выраженіе

$$(288) \qquad \operatorname{tang} \psi = -\frac{\frac{n}{\varkappa} + e'.E \sin (W+\nu')}{e.E.\cos (W+\nu)}$$

гдѣ E имѣетъ тоже значеніе какъ въ уравненіи (285). Какъ скоро приближенная величина ψ извѣстна, то соотвѣтствующее значеніе u' найдемъ изъ уравненія

$$(289) \qquad u' = \frac{e.\sin (W+\nu) - \gamma}{\sin \psi}$$

которое получимъ, принимая въ уравненіи (255) множителя $(1 + x)$ за единицу. Какъ скоро u' извѣстно, то соотвѣтствующая ему величина f опредѣлится легко. Мы знаемъ что вообще

$$u' = (k + Z \cdot \sin f) \sec f$$

но по малости f вмѣсто этого можемъ принять

$$u' = k + Z \cdot \sin f$$

откуда

$$\sin f = \frac{u' - k}{Z} \tag{290}$$

съ величиною f такимъ образомъ опредѣленною слѣдуетъ повторить все вычисленіе, пользуясь во второмъ приближеніи полными уравненіями (284) и (285). Если величины u' и ψ достаточно вѣрно извѣстны, то координаты точекъ кривой наибольшаго фаза на горизонтѣ опредѣлятся тѣмъ же самымъ способомъ, какъ и координаты точекъ восточной и западной границы частнаго затмѣнія.

При вычисленіи кривой наибольшаго фаза на горизонтѣ за произвольную величину мы принимаемъ W или прямо $W + \nu$, но всякая произвольная величина W, будучи внесена въ выраженіе условія наибольшаго фаза, т. е. въ уравненіе (285), дастъ двѣ величины ψ, отличныя одна отъ другой на 180^0. Одна изъ этихъ величинъ имѣетъ положительный синусъ, другая—отрицательный. Каждой величинѣ ψ соотвѣтствуетъ своя величина u', и одна изъ нихъ, выходящая за тѣ предѣлы, въ которыхъ должно измѣняться u' для даннаго затмѣнія, должна быть отвергнута; по этому слѣдуетъ отвергнуть также и соотвѣтствующую ей величину ψ; послѣ чего полуокружность, въ которой находится ψ становится опредѣленною. Если же $u' = 0$, что имѣетъ мѣсто на линіи центральнаго затмѣнія, то полуокружность для ψ остается не опредѣленною и при рѣшеніи вопроса необходимо принять оба значенія ψ, которымъ будутъ такимъ образомъ соотвѣтствовать двѣ различныя между собою пары величинъ φ_1 и λ.

32. Самую существенную часть предвычисленія затмѣнія для земли вообще составляетъ опредѣленіе положенія на земной поверхности линіи центральнаго затмѣнія и границъ той полосы земли, изъ точекъ которой затмѣніе будетъ представляться полнымъ или кольцеобразнымъ. Упомянутыя сейчасъ кривыя линіи описываются осью конуса тѣни и его образующими линіями. Наблюдатель, находящійся на линіи центральнаго затмѣнія, видитъ наибольшій изъ всѣхъ фазовъ затмѣнія,—онъ видитъ въ извѣстный моментъ совпаденіе центровъ солнца и луны при полномъ или кольцеобразномъ затмѣніи. Такъ какъ ось конуса тѣни можно разсматривать какъ такую образующую конуса, для которой уголъ $f = 0$, то для вычисленія положенія на земной поверхности линіи центральнаго затмѣнія можно пользоваться тѣми же самыми уравненіями, какъ и для вычисленія положенія сѣверной и южной границъ частнаго затмѣнія. Стоитъ только въ уравненіяхъ относящихся къ этимъ послѣднимъ кривымъ положить $f = 0$ и $u' = 0$; а такъ какъ при $f = 0$, $u = u'$, то для линіи центральнаго затмѣнія и $u = 0$. И такъ уравненія, посредствомъ которыхъ должна быть

вычислена линія центральнаго затмѣнія, получатся слѣдующимъ образомъ. Полагая въ уравненіяхъ (266) $f = 0$, найдемъ

$$\sin k \cdot \sin K = \sin N'$$
$$\sin k \cdot \cos K = \cos N' \cdot \sin \delta$$
(291) $$\cos k = \cos N' \cdot \cos \delta$$
$$g \cdot \sin G = \sin N' \cdot \sin \delta$$
$$g \cdot \cos G = \cos N'$$

Первыя два изъ уравненій (269) показываютъ, что при $f = 0$ также и $M = 0$, слѣдовательно изъ тѣхъ же уравненій находимъ

$$p \cdot \sin P = \sin N' \cdot \sin \delta$$
$$p \cdot \cos P = \cos N'$$

откуда чрезъ сравненіе съ предыдущими уравненіями заключаемъ, что для линіи центральнаго затмѣнія $p = g$ и $P = G$. Поэтому вторая пара изъ уравненій (272) для разсматриваемой кривой представляется въ видѣ

(292) $$\theta_1 = (1 - c) \sin N' \cdot \cos \delta; \qquad \eta_1 = g \sin (G + \tau)$$

Опредѣливъ посредствомъ этихъ уравненій для произвольныхъ значеній τ систему величинъ θ_1 и η_1, найдемъ соотвѣтствующія значенія координаты φ_1 по уравненію (275), которое для разсматриваемой кривой имѣетъ видъ

(293) $$\sin (\varphi_1 - A) = \frac{\gamma}{a}$$

Что касается до a и A, то они опредѣляются изъ уравненій

$$\theta_1 = a \cdot \cos A, \qquad \eta_1 = a \cdot \sin A$$

Для опредѣленія другой координаты точки кривой центральнаго затмѣнія прежде всего по третьей парѣ уравненій (272) вычислимъ величины α и β, употребляя при этомъ тѣ значенія k и K, какія найдены для линіи центральнаго затмѣнія. Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ $u = 0$, то уравненіе (278), служащее для вычисленія координаты λ, теперь будетъ имѣть видъ

(294) $$\lambda = \tau - \mu - \beta \cdot \sin \varphi_1 + \alpha \cdot \cos \varphi_1$$

Уравненія для вычисленія линіи центральнаго затмѣнія мы получили изъ уравненій, служащихъ для опредѣленія сѣверной и южной границы частнаго затмѣнія, поэтому начало и конецъ линіи центральнаго затмѣнія можемъ опредѣлить по тому же способу, который предложенъ для вычисленія конечныхъ точекъ сѣверной и южной границы или, что все равно, для вычисленія точекъ прикосновенія этихъ кривыхъ съ восточно-западной границей частнаго затмѣнія. Для этого положивъ въ уравненіяхъ (282), (287) и (257) $f = 0$ и $u' = 0$, найдемъ

$$\sin H = - r$$
(295) $$\sin (W + \nu) = \frac{\gamma}{e}$$
$$t = \mu + \frac{15}{n} \cdot e' (1 + x) \cos (W + \nu')$$

Какъ скоро посредствомъ этихъ уравненій H, W и t будутъ найдены, то координаты искомыхъ точекъ начала и конца линіи центральнаго затмѣнія получатся изъ тѣхъ же самыхъ выраженій, которыя мы употребляемъ для вычисленія координатъ точекъ восточно западной границы частнаго затмѣнія, ибо изъ искомыхъ теперь точекъ земли центральное затмѣніе видимо на горизонтѣ.

На линіи центральнаго затмѣнія полное или кольцеобразное затмѣніе имѣетъ наибольшую продолжительность. Легко опредѣлить эту продолжительность для различныхъ точекъ упомянутой кривой. Время, въ теченіи котораго въ данной точкѣ земной поверхности затмѣніе можетъ быть видимо полнымъ или кольцеобразнымъ, будетъ опредѣляться тѣмъ, сколько эта точка можетъ оставатся внутри конуса тѣни; что въ свою очередь обусловливается скоростію движенія конуса тѣни по земной поверхности. Если u есть радіусъ сѣченія конуса тѣни плоскостію перпендикулярною къ его оси и проведенною чрезъ мѣсто наблюденія, то искомая скорость будетъ $\frac{du}{dt}$. Чтобы опредѣлить эту производную, будемъ дифференцировать уравненія (270) и (271), но предварительно положимъ въ нихъ $u = u'$, ибо для конуса тѣни разность этихъ двухъ величинъ весьма незначительна. При дифференцированіи за перемѣнную величину будемъ считать только время входящее явно. При такихъ условіяхъ упомянутыя уравненія дадутъ

$$\varkappa' . \sin\psi \cdot \frac{du}{dt} = -g . \cos\varphi, \cos(G+\tau)$$

$$\varkappa' . \cos\psi \cdot \frac{du}{dt} = \frac{n}{\varkappa} - \sin k . \cos\varphi_1 \sin(K+\tau)$$

такъ какъ продолжительность полнаго или кольцеобразнаго затмѣнія въ данной точкѣ мы имѣемъ въ виду выразить въ минутахъ времени, то подъ $\varkappa'$ разумѣемъ здѣсь величину

$$\varkappa' = \frac{2}{15.60.\sin 1''}; \qquad \lg \varkappa' = 2.66122$$

Мы положили въ уравненіи (270) $p = g$ и $P = G$, ибо такія равенства имѣютъ мѣсто для линіи центральнаго затмѣнія. Если назовемъ чрезъ T то время, которое употребляетъ разсматриваемая точка земли для прохожденія радіуса u, то найдемъ, что

$$u = \frac{du}{dt} \cdot T, \text{ или } \frac{du}{dt} = \frac{u}{T}$$

Внося эту величину производной въ предыдущія два уравненія, получимъ

$$\begin{aligned} \varkappa' u \cos\psi &= \frac{n}{\varkappa} \cdot T - T . \sin k . \cos\varphi_1 \sin(K+\tau) \\ \varkappa' . u . \sin\psi &= \qquad - gT . \cos\varphi_1 \cos(G+\tau) \end{aligned} \tag{296}$$

откуда

$$\operatorname{tang}\psi = -\frac{g . \cos\varphi_1 \cos(G+\tau)}{\frac{n}{\varkappa} - \cos\varphi_1 \sin k . \sin(K+\tau)} \tag{297}$$

Если ψ вычислено изъ этого уравненія, то продолжительность полнаго или кольцеобразнаго затмѣнія въ данной точкѣ земли опредѣлится ао первому изъ выраженій (296), которое дастъ

$$(298)\qquad T = \frac{\varkappa' \cdot u \cdot \cos\psi}{\frac{n}{\varkappa} - \sin k \cdot \cos\varphi_1 \sin(K+\tau)}$$

Четверть, въ которой лежитъ уголъ ψ по смыслу вопроса опредѣляется тѣмъ, что T есть существенно положительная величина.

Наконецъ что касается до границъ полосы полнаго или кольцеобразнаго затмѣнія, то координаты ихъ точекъ легко могутъ быть вычислены по тѣмъ уравненіямъ, которыя служатъ для опредѣленія сѣверной или южной границы частнаго затмѣнія, но при этомъ подъ u' и f мы должны разумѣть тѣ значенія этихъ величинъ, которыя они имѣютъ для внутренняго прикосновенія краевъ затмѣвающаго и затмѣваемаго свѣтилъ.

33. Послѣдній вопросъ теоріи затмѣній заключается въ предвычисленіи затмѣнія для даннаго мѣста на земной поверхности, т. е. въ опредѣленіи для даннаго мѣста времени начала и конца частнаго затмѣнія, въ указаніи на краѣ солнечнаго диска точекъ, въ которыхъ произойдетъ первое и послѣднее прикосновеніе краевъ солнца и луны и наконецъ въ опредѣленіи величины наибольшаго фаза затмѣнія въ данномъ мѣстѣ; если это послѣднее находится внутри полосы полнаго и кольцеобразнаго затмѣнія, то слѣдуетъ еще предвычислить время образованія кольца или время начала полнаго затмѣнія и продолжительность этого послѣдняго.

Опредѣлить для даннаго мѣста земной поверхности время начала и конца частнаго затмѣнія, значитъ опредѣлить тѣ моменты, въ которые наблюдатель находящійся въ этомъ мѣстѣ вступаетъ въ конусъ лунной полутѣни или выступаетъ изъ него. Слѣдовательно для времени начала или конца частнаго затмѣнія координаты даннаго мѣста должны удовлетворять уравненію конуса полутѣни или уравненіямъ его замѣняющимъ. Уравненіе конуса полутѣни можетъ быть замѣнено двумя послѣдними изъ уравненій (245), ибо возвышая эти уравненія въ квадратъ и складывая ихъ, мы получимъ уравненіе конуса полутѣни, если только подъ u будемъ разумѣть величину соотвѣтствующую этой поверхности. Пренебрегая дѣйствіемъ рефракціи, а также величиною $\Delta\alpha$ и полагая

$$(299)\qquad \cos\varphi_1 = \xi; \qquad (1-c)\sin\varphi_1 = \eta$$

мы представимъ два упомянутыя уравненія въ видѣ

$$u \cdot \cos\theta' = \gamma \cdot \sin N' + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15} n \cdot \cos N' - \eta . \cos\delta + \xi . \sin\delta \cos\tau$$

$$u \cdot \sin\theta' = -\gamma \cdot \cos N' + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15} n \cdot \sin N' - \xi \sin\tau$$

Такимъ образомъ чтобы рѣшить вопросъ о времени начала и конца частнаго затмѣнія въ данномъ мѣстѣ, мы должны, поставивъ въ эти уравненія вмѣсто λ, ξ и η ихъ величины, соотвѣтствующія этому данному мѣсту, искать величину τ удовлетворяющую этимъ уравненіямъ; но такъ какъ эти послѣднія относительно τ имѣютъ

трансцендентную форму, то должны быть рѣшены послѣдовательными приближеніями. Чтобы возможно упростить рѣшеніе, мы преобразуемъ эти два уравненія въ другія. Исключимъ изъ нихъ сначала γ, а потомъ $\frac{\tau-\lambda-\mu}{15}n$. Въ результатѣ этихъ исключеній, полагая $0'-N'=\psi$, получимъ

$$u.\cos\psi=\frac{\tau-\lambda-\mu}{15}n-\eta.\cos\delta.\cos N'+\xi\left[\sin\delta\cos N'\cos\tau-\sin\tau\sin N'\right]$$

$$-u.\sin\psi=\gamma-\eta\cos\delta.\sin N'+\xi\left[\sin\delta.\sin N'\cos\tau+\sin\tau.\cos N'\right]$$

Положимъ здѣсь для краткости

$$\begin{array}{ll}\sin\delta\sin N'=\sin g.\sin G; & \sin N'=\sin k.\sin K\\ \cos N'=\sin g.\cos G; & \cos N'\sin\delta=\sin k.\cos K\\ \cos\delta\sin N'=\cos g & \cos N'\cos\delta=\cos k\end{array}\tag{300}$$

найдемъ

$$\begin{aligned}u.\sin\psi&=-\gamma+\eta.\cos g-\xi.\sin g.\sin(G+\tau)\\ u.\cos\psi&=\frac{\tau-\lambda-\mu}{15}n-\eta.\cos k+\xi.\sin k.\cos(K+\tau)\end{aligned}\tag{301}$$

Эти уравненія и слѣдуетъ рѣшить относительно τ, но не говоря уже о томъ, что u и ψ сами суть функціи времени и заключаютъ въ себѣ τ не явно, эта перемѣнная величина входитъ въ наши уравненія и алгебраически и въ зависимости отъ тригонометрическихъ линій. По этому для рѣшенія вопроса употребимъ слѣдующій искуственный пріемъ. Предположимъ, что искомое время τ начала или конца частнаго затмѣнія удалено отъ произвольно выбраннаго, но близкаго ко времени геоцентрическаго соединенія, момента τ_0 на промежутокъ t, такъ что $t=\tau-\tau_0$. Легко видѣть что $\sin(G+\tau)$ и $\cos(G+\tau)$ могутъ быть представлены въ формѣ

$$\sin(G+\tau)=\sin(G+\tau_0)+\frac{30.\sin\frac{1}{2}(\tau-\tau_0)}{\tau-\tau_0}\cos\left[G+\frac{\tau+\tau_0}{2}\right]\frac{\tau-\tau_0}{15}$$

$$\cos(K+\tau)=\cos(K+\tau_0)-\frac{30.\sin\frac{1}{2}(\tau-\tau_0)}{\tau-\tau_0}\sin\left[K+\frac{\tau+\tau_0}{2}\right]\frac{\tau-\tau_0}{15}$$

Если положимъ здѣсь для краткости

$$\alpha=\frac{30.\sin\left(\frac{\tau-\tau_0}{2}\right)}{\tau-\tau_0}$$

то основныя уравненія вопроса могутъ быть приведены къ виду

$$u.\sin\psi=-\gamma+\eta.\cos g-\xi.\sin g\sin(G+\tau_0)-\frac{\alpha.\xi(\tau-\tau_0)}{15}\sin g\cos\left[G+\frac{\tau+\tau_0}{2}\right]$$

$$u.\cos\psi=(\tau-\lambda-\mu)\frac{n}{15}-\eta.\cos k+\xi\sin k.\cos(K+\tau_0)-\frac{\alpha.\xi(\tau-\tau_0)}{15}\sin k\sin\left[K+\frac{\tau+\tau_0}{2}\right]$$

положимъ здѣсь

$$m \,.\, \sin M = \gamma - \eta \,.\, \cos g + \xi \,.\, \sin g \sin (G + \tau_0)$$

$$m \,.\, \cos M = (\tau_0 - \lambda - \mu) \frac{n}{15} - \eta \cos k + \xi . \sin k \cos (K + \tau_0)$$

(302)

$$m' \sin M' = - \alpha \,.\, \xi \sin g \cos \left[G + \frac{\tau + \tau_0}{2} \right]$$

$$m' . \cos M' = n - \alpha . \xi \sin k \sin \left[K + \frac{\tau + \tau_0}{2} \right]$$

тогда

(303)

$$u \,.\, \sin \psi = - m \,.\, \sin M + \frac{m' (\tau - \tau_0)}{15} \sin M'$$

$$u \,.\, \cos \psi = \quad m \,.\, \cos M + \frac{m' (\tau - \tau_0)}{15} \cos M'$$

помножимъ первое изъ этихъ уравненій на $\sin M'$, второе на $\cos M'$ и, складывая произведенія, получимъ

$$u \,.\, \cos (M' - \psi) = m \,.\, \cos (M + M') + \frac{m' (\tau - \tau_0)}{15}$$

полагая наконецъ здѣсь

$$M' - \psi = \chi$$

получимъ искомое время начала или конца частнаго затмѣнія

(304)

$$\tau = \tau_0 - \frac{15 \,.\, m}{m'} \cos (M + M') + \frac{15 \,.\, u}{m'} \cos \chi$$

изъ этого уравненія мы будемъ получать двѣ величины τ. Въ самомъ дѣлѣ для опредѣленія угла χ помножимъ первое изъ уравненія (303) на $\cos M'$, а второе на $\sin M'$ и вычтя первое произведеніе изъ втораго, получимъ

(305)

$$\sin \chi = \frac{m}{u} \sin (M + M')$$

Изъ этого уравненія мы получимъ двѣ величины χ; одной будетъ соотвѣтствовать положительный косинусъ, другой — отрицательный и двумъ такимъ значеніямъ $\cos \chi$ будутъ соотвѣтствовать въ уравненіи (304) двѣ величины τ; одна изъ нихъ будетъ принадлежать началу частнаго затмѣнія въ данномъ мѣстѣ, другая — концу.

Выборъ величины τ_0 зависитъ до извѣстной степени отъ насъ. Чтобы возможно упростить вычисленіе примемъ

$$\tau_0 = \lambda + \mu$$

при такомъ допущеніи первыя два изъ уравненій (302) получатъ видъ

(306)

$$m \,.\, \sin M = \gamma - \eta \,.\, \cos g + \xi \,.\, \sin g \sin (G + \tau_0)$$

$$m \,.\, \cos M = \qquad \eta \,.\, \cos k + \xi \,.\, \sin k \cos (K + \tau_0)$$

Что касается до вычисленія m' и M' по двумъ остальнымъ изъ уравненій (302), то

въ первомъ приближеніи примемъ $\tau = \tau_0$, тогда эти два уравненія представятся въ видѣ

$$m'.\sin M' = -\varkappa.\xi\sin g.\cos(G + \tau_0)$$
$$m'.\cos M' = n - \varkappa.\xi\sin k.\sin(K + \tau_0) \qquad (307)$$

ибо при $\tau = \tau_0$ величина α обращается въ $\frac{0}{0}$, но, опредѣляя для этого случая по извѣстнымъ правиламъ истинное значеніе функціи α, находимъ $\alpha = \varkappa$, гдѣ $\varkappa$ имѣетъ тоже значеніе какъ прежде. Во второмъ и дальнѣйшихъ приближеніяхъ на основаніи найденной въ предыдущемъ приближеніи величины τ вычисляемъ m' и M' по полнымъ двумъ послѣднимъ изъ уравненій (302). Что касается до величины u входящей въ эти уравненія, то она должна быть найдена по первому изъ уравненій (245), которое при нашихъ означеніяхъ принимаетъ видъ

$$u = u' - \left\{\eta.\sin\delta + \xi.\cos\delta.\cos\tau\right\}.\operatorname{tang} f$$

Но легко видѣть, что подобно предыдущему

$$\cos\tau = \cos\tau_0 - \frac{\alpha(\tau - \tau_0)}{15}\sin\frac{\tau + \tau_0}{2}$$

гдѣ α имѣетъ тоже значеніе какъ выше, а потому полагая

$$u_1 = u' - \left\{\eta.\sin\delta + \xi.\cos\delta.\cos\tau_0\right\}.\operatorname{tang} f \qquad (308)$$

приведемъ предыдущее выраженіе u къ виду

$$u = u_1 + \frac{\alpha.\xi(\tau - \tau_0)}{15}.\sin\frac{\tau + \tau_0}{2}\cos\delta.\operatorname{tang} f \qquad (309)$$

Въ первомъ приближеніи величину u придется опредѣлять изъ уравненія (308), т. е. придется принять $u = u_1$.

Можетъ случиться, что въ первомъ приближеніи получится мнимая величина угла χ, тогда какъ затмѣніе въ разсматриваемомъ мѣстѣ земной поверхности дѣйствительно существуетъ. Въ этомъ случаѣ въ уравненіи (304) слѣдуетъ положить $\cos\chi = 0$ и съ вычисленною величиною τ сдѣлать второе приближеніе. Если и въ этомъ второмъ приближеніи χ продолжаетъ оставатся мнимымъ, то окончательно можемъ заключить, что въ данномъ мѣстѣ земной поверхности затмѣніе видимо не будетъ.

Мы знаемъ, что θ' есть уголъ положенія точки прикосновенія краевъ при центрѣ солнца, а потому для опредѣленія тѣхъ мѣстъ края солнечнаго диска, въ которыхъ происходитъ первое и послѣднее прикосновеніе затмѣвающаго и затмѣваемаго свѣтилъ, достаточно вычислить этотъ уголъ. Если времена начала и конца частнаго затмѣнія опредѣлены, то вмѣстѣ съ тѣмъ найдены и всѣ элементы необходимые для вычисленія искомаго угла θ'. Въ самомъ дѣлѣ мы видѣли, что $\psi = \theta' - N'$ и кромѣ того $M' - \chi = \psi$, слѣдовательно

$$\theta' = N' + M' - \chi$$

Если внесемъ сюда вмѣсто M' и N' ихъ величины найденныя при послѣднемъ приближеніи и величины χ соотвѣтствующія какъ началу, такъ и концу затмѣнія, то

получимъ двѣ величины θ', изъ которыхъ одна опредѣлитъ собою положеніе точки прикосновенія краевъ при началѣ, а другая—при концѣ частнаго затмѣнія.

Угломъ θ' опредѣляется положеніе точки прикосновенія краевъ относительно круга склоненія проведеннаго черезъ центръ солнца; въ большинствѣ случаевъ бываетъ удобнѣе указать мѣсто прикосновенія краевъ солнца и луны относительно точки пересѣченія солнечнаго края съ кругомъ высоты проведеннымъ черезъ центръ солнца въ моментъ начала или конца частнаго затмѣнія. Понятно, что, углы считаемые отъ круга склоненій будутъ отличаться отъ угловъ, считаемыхъ относительно круга высоты на величину параллактическаго угла, ибо уголъ круга высоты съ кругомъ склоненій мы называемъ параллактическимъ угломъ. Если назовемъ параллактическій уголъ при центрѣ солнца въ моментъ начала или конца частнаго затмѣнія чрезъ p, зенитное разстояніе солнца и его склоненіе въ тотъ же моментъ—чрезъ z и δ, астрономическую широту мѣста наблюденія чрезъ φ и наконецъ истинное время начала или конца затмѣнія чрезъ t, то изъ параллактическаго треугольника получимъ

$$\sin z \,.\sin p = \cos\varphi \,.\sin t$$
$$\sin\varphi = \sin\delta.\cos z + \cos\delta.\sin z.\cos p$$

откуда

$$\operatorname{tang} p = \frac{\cos\varphi \,.\sin t.\cos\delta}{\sin\varphi - \sin\delta.\cos z}$$

но такъ какъ

$$\cos z = \sin\varphi \,.\sin\delta + \cos\varphi \,.\cos\delta.\cos t$$

то

$$\operatorname{tang} p = \frac{\sin t}{\cos\delta \operatorname{tang}\varphi - \sin\delta\cos t} \tag{310}$$

Опредѣленіе изъ этого уравненія величины p по тангенсу не можетъ привести къ недоразумѣнію относительно четверти окружности, въ которой находится уголъ p, ибо уравненіе

$$\sin z.\sin p = \cos\varphi \,.\sin t$$

показываетъ, что углы p и t лежатъ въ одной четверти.

Если параллактическій уголъ вычисленъ по уравненію (310), то назвавъ уголъ положенія точки прикосновенія краевъ считаемый относительно круга высоты чрезъ θ_1, будемъ имѣть

$$\theta_1 = N' + M' - \chi - p.$$

Остается еще опредѣлить для даннаго мѣста на земной поверхности время и величину наибольшаго фаза затмѣнія. Въ моментъ наибольшаго фаза наблюдатель находится на наименьшемъ изъ возможныхъ для него разстояній отъ оси конуса тѣни. Предположимъ, что для момента наибольшаго фаза разстояніе наблюдателя отъ оси конуса тѣни есть Δ. Пусть искомое время наибольшаго фаза будетъ t, пусть величина ψ соотвѣтствующая моменту наибольшаго фаза будетъ ψ_1. Тогда для времени t уравненія (303) примутъ видъ

$$\Delta . \sin \psi_1 = - m . \sin M + \frac{m' (t - \tau_0)}{15} \sin M'$$

$$\Delta . \cos \psi_1 = \quad m . \cos M + \frac{m' (t - \tau_0)}{15} \cos M'$$

величина τ_0 имѣетъ тоже значеніе какъ и прежде, а потому остаются тѣже и величины m и M; что касается до m' и M', то они хотя и зависать отъ искомаго времени t, но въ первомъ приближеніи мы примемъ $t = \tau_0$, а потому ихъ также будемъ разсматривать какъ постоянныя величины. Исключимъ сначала изъ этихъ уравненій разность $t - \tau_0$, а потомъ помножимъ первое уравненіе па $\sin M'$ и произведеніе сложимъ со вторымъ уравненіемъ умноженнымъ на $\cos M'$; послѣ всего этого получимъ два слѣдующія уравненія

$$\Delta . \sin (\psi_1 - M') = m . \sin (M' + M)$$

$$\Delta . \cos (\psi_1 - M') = m . \cos (M' + M) + \frac{m' (t - \tau_0)}{15}$$

Возвысимъ эти уравненія въ квадратъ и, сложивъ ихъ, получимъ

$$\Delta^2 = m^2 + \left[\frac{m'}{15} (t - \tau_0)\right]^2 + \frac{2 m . m'}{15} (t - \tau_0) \cos (M' + M)$$

Если Δ есть наименьшее разстояніе наблюдателя отъ оси конуса тѣни, то производная $\frac{d\Delta}{dt}$ должна равняться нулю. Взявъ отъ предыдущаго производную по t, получимъ

$$\Delta \frac{d\Delta}{dt} = \left(\frac{m'}{15}\right)^2 (t - \tau_0) + \frac{m . m'}{15} \cos (M + M')$$

Такъ какъ Δ въ безконечность не обращается, то условіе minimum Δ приводится къ

$$\frac{m'}{15} (t - \tau_0) + m . \cos (M + M') = 0$$

откуда

$$t = \tau_0 - \frac{15 m}{m'} \cos (M + M') \tag{311}$$

сравнивая это съ уравненіемъ (304), видимъ, что для времени наибольшаго фаза $\cos \chi = 0$, а слѣдовательно $\chi = 90^\circ$ или $\chi = 270^\circ$.

Такъ какъ при вычисленіи, по крайней мѣрѣ въ первомъ приближеніи, мы принимаемъ $t = \tau_0$, то для вычисленія m, M, m', M' и здѣсь опять будемъ пользоваться уравненіями (306) и (307).

Если время наибольшаго фаза извѣстно, то опредѣленіе величины его не представляетъ ни какой трудности. Величина наибольшаго фаза, извѣстнымъ образомъ зависитъ отъ Δ; для вычисленія котораго можемъ пользоваться уравненіемъ (305). Для наибольшаго фаза $\chi = 00^\circ$, или $\chi = 270^\circ$; слѣдовательно если величину u соотвѣтствующую наибольшему фазу называемъ чрезъ Δ, то это уравненіе при $\chi = 90^\circ$ или $\chi = 270^\circ$ и $u = \Delta$ даетъ

$$\Delta = \pm m . \sin (M + M') \tag{312}$$

здѣсь мы выбираемъ тотъ знакъ, для котораго Δ, опредѣленное изъ этого уравненія, имѣетъ положительную величину. Если Δ извѣстно, то изъ уравненія (213), принимая въ немъ по малости угла φ величину $\sec\varphi = 1$, получимъ

$$\Delta = (k + Z' \sin\varphi)$$

откуда находимъ

$$\sin\varphi = \frac{\Delta - k}{Z'} \tag{313}$$

гдѣ какъ прежде $Z' = Z - z$. Величина Z должна быть опредѣлена по третьему изъ уравненій (215), а z по уравненію

$$z = \rho\,(\sin\varphi' . \sin\delta + \cos\varphi' . \cos\delta . \cos t) \tag{314}$$

гдѣ t есть истинное время наибольшаго фазъ. Если величина φ опредѣлена, то величина наибольшаго фаза, которую мы означимъ чрезъ i найдется изъ уравненія (212).

Мы рѣшили теперь всѣ главные вопросы теоріи солнечныхъ затмѣній.

34. Чтобы показать примѣненіе изложенной теоріи къ практикѣ, вычислимъ на основаніи приведенныхъ теоретическихъ соображеній полное затмѣніе солнца, имѣющее быть видимымъ по преимуществу въ Россіи 18 Августа 1887 года.

Мы видѣли, что данными для вычисленія затмѣнія должны служить координаты солнца и луны соотвѣтствующія извѣстнымъ моментамъ времени, отдѣленнымъ одинъ отъ другаго равными промежутками и приблизительно симметрично расположеннымъ около времени геоцентрическаго соединенія центровъ солнца и луны по долготѣ. Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ упомянутое геоцентрическое соединеніе имѣетъ мѣсто около 18^h средняго парижскаго времени, то координаты центровъ солнца и луны мы вычислили для 15^h, 16^h, 17^h, 18^h, 19^h, 20^h и 21^h средняго парижскаго времени 18 Августа 1887 года. Положенія луны для этихъ моментовъ мы взяли изъ лунныхъ таблицъ составленныхъ Ганценомъ (Tables de la Lune construites d'apres la principe Newtonien de la gravitation universelle. Par P. A. Hansen). Положенія солнца вычислены нами по солнечнымъ таблицамъ составленнымъ Леверье (Tables generales du mouvement du Soleil. Annales de l'Observatoire de Paris *T.* IV).

Такимъ образомъ мы получили слѣдующія полныя эфемериды для вычисленія солнечнаго затмѣнія 1887 года.

а) Для луны.

		Долготы.			Широты.		
1887 г. 18-го Августа	15^h	144°	11′	7″.6	+ 0° 28′	43″.04	
	16	144	47	43 .2	32	5 .12	
	17	145	24	20 .2	35	27 .09	
	18	146	0	58 .6	38	48 .95	
	19	146	37	38 .4	42	10 .70	
	20	147	14	19 .6	45	32 .34	
	21	147	51	2 .2	48	53 .87	

	Экваторіальный горизонтальный параллаксъ.	Видимый радіусъ.
1887 г. 18-го Августа 15^h	1° $0'$ $10''.57$	$16'$ $25''.49$
16	1 0 11.81	16 25.81
17	1 0 13.02	16 26.13
81	1 0 14.20	16 26.45
19	1 0 15.35	16 26.77
20	1 0 16.47	16 27.09
21	1 0 17.56	16 27.41

b) Для солнца.

	Долготы.	Логариомы разстоян. земли отъ солнца.	Уравненіе времени.
1887 г. 18-го Августа 15^h	145° 46 45.12	0.0050786	0° $53'$ $46''.27$
16	145 49 9.63	0.0050749	53 37.94
17	145 51 34.14	0.0050712	53 29.61
18	145 53 58.62	0.0050676	53 21.28
19	145 56 23.10	0.0050639	53 12.95
20	145 58 47.61	0.0050604	53 4.62
21	146 1 12.13	0.0050567	52 56.29

Видимый радіусъ солнца . . . . $15'$ $48''.67$

Широта солнца . . . . $0''.23$

Наклоненіе эклиптики къ экватору . . . . 23° $27'$ $7''.54$

Звѣздное время въ средній парижскій полдень 18-го Авг. 1887 г. 9^h 46^m $6^s.52$

Имѣя эти данныя, можемъ приступить къ вычисленію затмѣнія. Начнемъ съ вычисленія прямолинейныхъ координатъ луны отнесенныхъ къ системѣ осей, имѣющихъ начало въ центрѣ земли и ось z параллельную оси конуса тѣни. Мы видѣли, что эти координаты P, Q, Z по выраженіямъ (215) зависятъ отъ селеноцентрическихъ координатъ солнца, которыя мы означили чрезъ λ и β. Для вычисленія λ и β мы имѣемъ выраженіе (214) и ему подобное для координаты β, но вмѣсто этихъ выраженій на практикѣ совершенно удовлетворительно употребить слѣдующія

$$\lambda = l' - \frac{\sin \pi'}{\sin \pi}(l - l')$$

$$\beta = b' - \frac{\sin \pi'}{\sin \pi}(b - b')$$

подъ π' мы разумѣемъ здѣсь экваторіальный горизонтальный параллаксъ солнца. Мы приняли средній экваторіальный горизонтальный параллаксъ солнца равнымъ $8''.85$, вычисляя посредствомъ него π', находимъ $\pi' = 8''.74$. На основаніи предыдущихъ выраженій для упомянутыхъ семи моментовъ имѣемъ

	λ	β
1887 года, Августа 18, 15^h	145° $46'$ $59''.2$	$-3''.99$
16	145 49 18.6	-4.48
17	145 51 38.1	-4.97
18	145 53 57.6	-5.46
19	145 56 17.0	-5.95
20	145 58 36.5	-6.44
21	146 0 56.0	-6.93

Для вычисленія λ и β совершенно удовлетворительно пользоваться четырехзначными логариѳмами. Имѣя селеноцентрическія координаты солнца, приступимъ къ вычисленію прямолинейныхъ координатъ луны по выраженіямъ (215). Такъ какъ селеноцентрическая широта солнца есть весьма малая величина, то членъ $r \, . \sin b \, . \sin \beta$ въ выраженіи координаты Z безъ всякой потери точности можетъ быть отвергнутъ. Такимъ образомъ для вычисленія координатъ луны будемъ имѣть выраженія

$$P = \frac{\cos b \, . \sin (l - \lambda)}{\sin \pi}$$

$$Q = \frac{\sin b - \beta \, . \cos b \, . \cos (l - \lambda) \sin 1''}{\sin \pi}$$

$$Z = \frac{\cos b \, . \cos (l - \lambda)}{\sin \pi}$$

которыя въ примѣненіи къ нашему случаю даютъ:

	P	Q	lg Z
1887 г., 18 Августа, 15^h	− 1.592808	+0.4783445	1.7566875
16	− 1.023095	+0.5342695	1.7566340
17	− 0.453327	+0.5901244	1.7565403
18	+ 0.116483	+0.6459187	1.7564066
19	+ 0.686318	+0.7016515	1.7562330
20	+ 1.256078	+0.7573220	1.7560193
21	+ 1.825745	+0.8129368	1.7557651

Послѣ этого вычислимъ величины $\sin f$ и u' по уравненіямъ (211) и (210) какъ для внутренняго такъ и для внѣшняго прикосновенія краевъ солнца и луны. Что касается до входящей въ эти уравненія величины k', то она, какъ мы видѣли, должна быть вычислена по выраженію

$$k' = \frac{\sin H}{\sin \pi_0}$$

въ которомъ мы принимаемъ $H = 16' \, 1''.82$ и $\pi_0 = 8''.85$; слѣдовательно $k' = 108.6798$. И такъ для разсматриваемаго нами теперь затмѣнія уравненія (210) и (211) даютъ

	Для внѣшняго прикосновенія краевъ.		Для внутренняго прикосновенія краевъ.	
	lg sin f	u'	lg sin f	u'
1887 г., 18 Авг. 15^h	7.6657412	+ 0.5374588	7.6635601	+ 0.0097802
16		0.5374260		0.0098129
17	7.6657403	0.5373686	7.6635592	0.0098699
18		0.5372870		0.0099512
19	7.6657396	0.5371812	7.6635585	0.0100565
20		0.5370510		0.0101860
21	7.6657390	0.5368963	7.6635579	0.0103399

Такъ какъ для обоихъ прикосновеній краевъ lg sin f измѣняется медленно, то мы сочли возможнымъ вычислить его значенія не для каждаго часа, а только отъ двухъ до двухъ часовъ. Для внутренняго прикосновенія краевъ величина u' вычисленная

изъ уравненія (210) отрицательна для всѣхъ разсматриваемыхъ моментовъ, но мы относимъ знакъ минусъ на счетъ $\sec f$, принимая для внутренняго прикосновенія краевъ f за уголъ, лежащій во второй четверти окружности.

Имѣя величины координатъ P и Q, опредѣлимъ для разсматриваемыхъ моментовъ величины n и N. Для этого сначала по уравненіямъ (240) заключающимся въ въ формѣ

$$\frac{P - P_0}{T - T_0} = \Delta P; \qquad \frac{Q - Q_0}{T - T_0} = \Delta Q$$

опредѣляемъ ΔP и ΔQ для всѣхъ моментовъ за исключеніемъ средняго, т. е. 18^h, для котораго эти уравненія непримѣнимы, ибо какъ ΔP, такъ ΔQ для 18^h по этимъ выраженіямъ, какъ мы уже замѣтили, обращаются въ $\frac{0}{0}$, и потому для 18^h величины ΔP и ΔQ опредѣлятся изъ уравненій (241). Какъ скоро ΔP и ΔQ для всѣхъ разсматриваемыхъ моментовъ найдены, то n и N опредѣлятся изъ уравненій (231). Такимъ образомъ мы находимъ

	ΔP	ΔQ	N	$\lg n$
1887 г., 18 Авг. 15^h	+ 0.5697637	+ 0.0558581	84° 24′ 2″.7	9.7577719
16	0.5697890	0.0558246	84 24 15 . 6	9.7577886
17	0.5698105	0.0557943	84 24 27 . 3	9.7578025
18	0.5698323	0.0557636	84 24 39 . 1	9.7578166
19	0.5698349	0.0557328	84 24 50 . 3	9.7578164
20	0.5697975	0.0557016	84 25 0 . 1	9.7577858
21	0.5697540	0.0556727	84 25 8 . 9	9.7577507

Для дальнѣйшаго вычисленія вспомогательныхъ величинъ намъ понадобятся геоцентрическія прямое восхожденіе a и склоненіе d центра солнца. Эти координаты могутъ быть вычислены по уравненіямъ

$$\tan a = \tan l' \cos \varepsilon$$
$$\tan d = \sin a \,.\, \tan \varepsilon$$

выводъ которыхъ показанъ въ концѣ первой главы. Для нашего случая упомянутыя сейчасъ уравненія даютъ

	a	d
1887 года 18 Августа 15^h	148° 2′ 16″.9	+ 12° 55′ 51″.3
16	148 4 36 . 4	12 55 2 . 5
17	148 6 56 . 0	12 55 13 . 7
18	148 9 15 . 5	12 53 24 . 9
19	148 11 34 . 9	12 52 36 . 1
20	148 13 54 . 4	12 51 47 . 2
21	148 16 13 . 9	12 50 58 . 3

Кромѣ этого по уравненіямъ подобнымъ предыдущимъ опредѣлимъ склоненія и прямыя восхожденія тѣхъ точекъ, въ которыхъ въ разсматриваемые моменты ось z, параллельная оси конуса тѣни, пересѣкается со сферой небесной; или, что все равно, найдемъ селеноцентрическія склоненія и прямыя восхожденія центра солнца. Для этой цѣли, какъ мы видѣли, служатъ уравненія (226), но мы знаемъ, что β есть столь малая

величина, что $\tang\beta$ можемъ замѣнить чрезъ $\beta.\sin 1''$, а потому раздѣливъ первое изъ уравненій (225) на второе, можемъ представить результатъ въ видѣ

$$\zeta = \frac{\beta}{\sin\lambda}$$

если ζ опредѣлится по этому уравненію, то искомыя α и δ найдутся изъ уравненій

$$\tang\alpha = \tang\lambda.\cos(\varepsilon + \zeta)$$
$$\tang\delta = \sin\alpha.\tang(\varepsilon + \zeta)$$

которыя получимъ изъ уравненій (226) раздѣливъ первое на второе и третье на первое. Но такъ какъ $\cos\beta = 1$, то третье изъ уравненій (225) показываетъ, что $\eta = \lambda$, а потому послѣ упомянутыхъ сейчасъ дѣленій въ полученныхъ уравненіяхъ слѣдуетъ положить $\eta = \lambda$. Какъ скоро изъ приведенныхъ сейчасъ уравненій будетъ найдено α, то h опредѣлится по уравненію (227), кромѣ того величина α даетъ возможность опредѣлить $\Delta\alpha$, ибо мы приняли $\Delta\alpha = a - \alpha$. Такимъ образомъ для разсматриваемыхъ семи моментовъ мы находимъ слѣдующія значенія величинъ α, δ, h и $\Delta\alpha$:

	α	δ	h	$\Delta\alpha$
1887 г., 18 Авг. 15^h	$148^\circ\ 2'\ 29''.1$	$+12^\circ\ 55'\ 51''.8$	$-19^\circ\ 43'\ 49''.0$	$-12''.2$
16	148 4 43 .6	12 55 4 .2	−19 44 19 .1	− 7 .2
17	148 6 58 .1	12 54 16 .7	−19 44 49 .1	− 2 .1
18	148 9 12 .6	12 53 28 .7	−19 45 19 .2	+ 2 .9
19	148 11 27 .0	12 52 41 .4	−19 45 49 .1	+ 7 .7
20	148 13 41 .5	12 51 53 .8	−19 46 19 .1	+12 .9
21	148 15 55 .9	12 51 6 .1	−19 46 49 .0	+18 .0

Теперь остается только опредѣлить для тѣхъ же моментовъ величины γ, μ и N'. Первыя двѣ опредѣляются по уравненіямъ (234) и (235), а послѣдняя дается соотношеніемъ $N' = N - h$. Въ уравненіяхъ (234) и (235) за P_0 и Q_0 мы будемъ считать величины координатъ P и Q соотвѣтствующія 18^h сред. пар. времени; такимъ образомъ

$$\lg P_0 = 9.0662640\,; \qquad \lg Q_0 = 9.8101778$$

сообразно съ этимъ подъ T_0 мы разумѣемъ истинное время соотвѣтствующее 18 часамъ средняго парижскаго времени. Уравненіе времени для 18^h есть $0^\circ\ 53'\ 21''.28$ и его слѣдуетъ вычесть изъ средняго для перехода къ истинному, а потому

$$15\ T_0 = 269^\circ\ \ 6'\ \ 38''.72$$

Замѣтимъ еще, что послѣдній членъ въ уравненіи (235) представляется въ градусахъ и десятичныхъ доляхъ градуса. И такъ для разсматриваемыхъ семи моментовъ изъ упомянутыхъ сейчасъ уравненій мы получаемъ слѣдующія значенія величинъ γ, μ и N'

	γ	μ	N'
1887 г., 18 Августа 15^h	+0.6314711	$264^\circ\ 25'\ 19''.5$	$104^\circ\ 7'\ 51''.7$
16	+0.6314825	264 25 24 .3	104 8 34 .7
17	+0 6314928	264 25 28 .5	104 9 16 .4
18	+0.6315034	264 25 32 .1	104 9 58 .4
19	+0.6315127	264 25 35 .1	104 10 39 .4
20	+0.6315213	264 25 36 .7	104 11 19 .2
21	+0.6315290	264 25 37 .8	104 11 57 .9

Мы видимъ теперь, что всѣ вспомогательныя величины за исключеніемъ линейныхъ координатъ луны (которыя впрочемъ прямо въ основныя уравненія изложенной теоріи затмѣній не входятъ) измѣняются весьма медленно; имѣя это въ виду, вычислимъ величины D, d, ν, ν', e и e' изъ уравненій (246) и (250) для одного какого нибудь момента, напримѣръ для 18^h и при этомъ примемъ $\lg c = 7.52288$. Такимъ образомъ будемъ имѣть для всего послѣдующаго вычисленія

$$D = +12^\circ\,56'.0 \qquad \lg d = 9.99862$$
$$\nu = +\ 0^\circ\ \ 2'.6 \qquad \nu' = -\,0^\circ\ 2'.5$$
$$\lg e = 9.99870 \qquad \lg e' = 9.99992.$$

Имѣя все это, приступимъ къ предвычисленію затмѣнія для земли вообще. Примемъ и здѣсь въ основаніе вычисленія вспомогательныя величины соотвѣтствующія 18^h.

Такъ какъ во все время затмѣнія величина $\gamma + u'$ болѣе единицы, то въ разсматриваемомъ случаѣ только извѣстная часть конуса полутѣни вступаетъ на землю, остальная же часть во все время затмѣнія остается внѣ земли; по этому внутреннихъ прикосновеній поверхностей конуса полутѣни и земли при разсматриваемомъ затмѣніи вовсѣ не существуетъ, не существуетъ также и сѣверной границы того пространства земли, съ котораго можетъ быть видимо частное затмѣніе. Эта кривая обращается въ точку соединенія вѣтвей восточно-западной границы. Начнемъ предвычисленіе затмѣнія для земли вообще съ опредѣленія координатъ тѣхъ точекъ земной поверхности, въ которыхъ послѣдуетъ первое и послѣднее внѣшнее прикосновеніе этой поверхности съ поверхностію конуса полутѣни. Принимая $u = u'$, въ первомъ приближеніи изъ уравненія (263) или изъ уравненія

$$\sin(W + \nu) = \frac{\gamma}{e \pm u}$$

находимъ такія двѣ величины W:

$$W = 24^\circ\,15'.7 \qquad W = 155^\circ\,39'.1$$

Мы принимаемъ въ этомъ уравненіи одинъ только знакъ $+$, если бы мы приняли знакъ$-$, то получили бы невозможную величину для $W + \nu$, поэтому ясно, что знакъ минусъ соотвѣтствуетъ не существующимъ въ нашемъ случаѣ точкамъ внутренняго прикосновенія конуса полутѣни и земли. Съ найденными величинами W вычисляемъ ψ изъ уравненія (262) и находимъ такія четыре значенія ψ:

$$\psi = 155^\circ\,43'.4 \qquad \psi = 24^\circ\,27'.0$$
$$\psi = 335\ \ 43.4 \qquad \psi = 204\ \ 27.0$$

два значенія ψ лежащія во второй и четвертой четверти окружности соотвѣтствуютъ первой величинѣ W, два другія значенія ψ находящіяся въ первой и третьей четверти окружности соотвѣтствуютъ $W = 155^\circ\,39'.1$. Легко видѣть, что величины ψ, имѣющія положительный синусъ, дѣлаютъ величину $W + \nu$, получающуюся изъ уравненія (262_*), невозможною, а потому два значенія ψ лежащія одно въ первой и другое во второй четверти окружности должны быть отвергнуты. Такимъ образомъ въ первомъ приближеніи мы примемъ $\psi = 335^\circ\ 43'.4$ и $\psi = 204^\circ\ 27'.0$ и будемъ счи-

тать $\lg \sin \psi = 9.61550_n$. Съ этой величиною $\sin \psi$ во второмъ приближеніи изъ уравненія (262_*) находимъ

$$W = 24^\circ\, 13'.7, \qquad W = 155^\circ\, 41'.1$$

съ ними изъ уравненія (262) снова находимъ слѣдующія четыре значенія ψ

$$\psi = 155^\circ\, 44'.3 \qquad \psi = 24^\circ\, 24'.2$$
$$\psi = 335\;\; 44.3 \qquad \psi = 204\;\; 24.2$$

изъ нихъ по той причинѣ, на которую сейчасъ указали, удерживаемъ два значенія лежащія во второй полуокружности. Найденныя во второмъ приближеніи величины W и ψ мало разнятся отъ найденныхъ первоначально, а потому ограничимся этимъ вторымъ приближеніемъ. И такъ мы нашли для одной точки прикосновенія конуса полутѣни и земли $W = 24^\circ\, 13'.7$; $\psi = 335^\circ\, 44'.3$ и для другой $W = 155^\circ\, 41'.1$, $\psi = 204^\circ\; 24'.2$. Имѣя ихъ, изъ уравненія (257) вычислимъ соотвѣтствующія значенія t. Легко видѣть что для горизонта $\lg(1 + x) = 0{,}00010$, а потому изъ уравненія (257) имѣемъ

$$t = 301^\circ \;\; 9'.9\,; \qquad t = 227^\circ \;\; 42'.6$$

Замѣтимъ, что два послѣдніе члена уравненія (257) выражены въ градусахъ и десятичныхъ доляхъ градуса. Далѣе принимая $\lg r = 7.98224$ изъ уравненія (282) находимъ для обѣихъ точекъ $H = -0^\circ\; 49'$. Если замѣтимъ, что $K = N' - W$, то имѣемъ теперь все необходимое для вычисленія координатъ искомыхъ точекъ по уравненіямъ (246), въ которыхъ приняли $\Delta\alpha = 0$.

Такимъ образомъ мы нашли

$$\tau = 93^\circ\, 4'.2\,; \qquad \tau = 258^\circ\, 55'.7$$
$$\varphi_1 = +\, 9^\circ\, 34'.5\,; \qquad \varphi_1 = 37^\circ\, 6'.2$$

Такъ какъ $\lambda = \tau - t$ и $\operatorname{tang} \varphi_1 = (1 - c) \operatorname{tang} \varphi$, то заключаемъ, что для точки перваго внѣшняго прикосновенія конуса полутѣни и земли

$$W = 155^\circ\, 41'.1, \qquad \psi = 204^\circ\, 24'.2, \qquad t = 227^\circ\, 42'.6, \qquad \tau = 258^\circ\, 55'.7$$
$$\lambda = +\, 31^\circ\, 13'.1\,; \qquad \varphi = +\, 37^\circ\, 11'.8$$

и для точки послѣдняго внѣшняго прикосновенія конуса полутѣни и земли

$$W = 24^\circ\, 11'.1, \qquad \varphi = 335^\circ\, 44'.3\,; \qquad t = 301^\circ\, 9'.9\,; \qquad \tau = 93^\circ\, 4'.2$$
$$\lambda = 151^\circ\, 54'.3\,; \qquad \varphi = +\, 9^\circ\, 36'.4$$

t есть истинное время считаемое подъ меридіаномъ эфемеридъ, въ нашемъ случаѣ подъ парижскимъ меридіаномъ, а потому заключаемъ, что первое внѣшнее прикосновеніе конуса полутѣни и земли, или, что все равно, начало частнаго затмѣнія солнца 1887 года на землѣ вообще произойдетъ 18 Августа въ $15^h\, 10^m.8$ истиннаго парижскаго времени, а конецъ частнаго затмѣнія 1887 года для земли вообще послѣдуетъ того же 18 Августа въ $20^h\, 4^m.6$ истиннаго парижскаго времени. Слѣдовательно все затмѣніе для земли вообще будетъ продолжаться $4^h\, 53^m.8$.

Такъ какъ величина t, для разсматриваемыхъ точекъ теперь достаточно приближенно извѣстна, то слѣдовало бы для каждаго изъ этихъ значеній t изъ приведенныхъ выше малыхъ таблицѣ интерполировать вспомогательныя величины и съ найденными такимъ образомъ ихъ значеніями повторить все вычисленіе; но такъ какъ вспомогательныя величины въ продолженіи всего затмѣнія измѣняются очень мало, то найденные результаты можно считать достаточно близкими къ истинѣ и ограничиться этимъ первымъ приближеніемъ.

Послѣ этого слѣдовало бы перейти къ вычисленію координатъ точекъ восточно западной границы частнаго затмѣнія, но мы еще не знаемъ предѣловъ, между которыми измѣняется для этой кривой величина, принимаемая при вычисленіи за произвольную. Мы сказали, что предѣлами измѣненія служатъ значенія этой величины, соотвѣтствующія тѣмъ точкамъ, въ которыхъ сѣверная и южная кривая касаются восточной и западной границы. Имѣя это въ виду, опредѣлимъ прежде всего координаты упомянутыхъ точекъ прикосновенія. Въ первомъ приближеніи, опредѣляя величину W изъ уравненія (286), мы находимъ два такія значенія W

$$W = 5^\circ\, 21'.2 \qquad W = 174^\circ\, 33'.6.$$

при этомъ въ упомянутомъ уравненіи мы принимали только знакъ минусъ, ибо мы уже знаемъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ сѣверной границы частнаго затмѣнія не существуетъ, а для южной ψ близко къ 270° и $\sin\psi$ къ -1. Съ этими величинами W мы вычисляемъ по уравненіямъ (284) величины α и E, принимая при этомъ $\psi = 270^\circ$, находимъ что упомянутымъ значеніямъ W соотвѣтствуютъ

$$\lg E = 9.34711\,; \qquad \lg E = 9.35595$$
$$\lg \alpha = 6.62445\,; \qquad \lg \alpha = 6.63139$$

Имѣя это и принимая опять $\psi = 270^\circ$ изъ уравненія (285) находимъ для ψ слѣдующія четыре величины

$$95^\circ\, 35'.5\,; \qquad 275^\circ\, 35'.5\,; \qquad 84^\circ\, 17'.0\,; \qquad 264^\circ\, 17'.0$$

но первая и третья изъ нихъ, какъ соотвѣтствующія не существующей сѣверной кривой, должны быть отвергнуты; остальныя двѣ служатъ основаніемъ второму приближенію, въ которомъ принимаемъ $\lg \sin\psi = 9.99788\,n$, вычисляя W изъ уравненія (255), находимъ $W = 5^\circ\, 31'.7$; $W = 174^\circ\, 23'.1$. Съ этими величинами W изъ полныхъ уравненій (284) находимъ двѣ такія же величины E какъ и въ первомъ приближеніи, что же касается до α, то эта величина во второмъ приближеніи хотя мало, но отлична отъ найденныхъ. Логариѳмы ея суть: $\lg \alpha = 6.93972$; $\lg \alpha = 6.94792$. Имѣя все это, находимъ по полному уравненію (285) слѣдующія четыре величины ψ:

$$95^\circ\, 34'.4\,; \qquad 275^\circ\, 34'.4\,; \qquad 84^\circ\, 16'.9\,; \qquad 264^\circ\, 16'.9$$

они такъ мало отличны отъ предыдущихъ, что дальнѣйшія приближенія были бы совершенно безполезны. Такимъ образомъ для одной точки прикосновенія граничныхъ кривыхъ $W = 5^\circ\, 31'.7$; $\psi = 275^\circ\, 34'.4$; для другой $W = 174^\circ\, 23'.1$; $\psi = 264^\circ\, 16'.9$. Имѣя это, сначала изъ уравненій (282) и (257) вычисляемъ величины H и t, а потомъ по тремъ послѣднимъ изъ уравненій (246) вычисляемъ τ и φ_1, посредствомъ которыхъ наконецъ легко получаются искомыя координаты точекъ прикосновенія гра-

ничныхъ кривыхъ. Такимъ образомъ мы находимъ для точки прикосновенія южной границы съ западною кривою:

$$W = 174^\circ\,23'.1;\quad \psi = 264^\circ\,16'.9;\quad t = 236^\circ\,57'.2;\quad \tau = 264^\circ\,46'.7$$
$$\lambda = 27^\circ\,49'.5;\quad \varphi = +\,19^\circ\,10'.8$$

и для точки прикосновенія той же южной границы къ восточной кривой:

$$W = 5^\circ\,31'.7;\quad \psi = 275^\circ\,34'.4;\quad t = 291^\circ\,52'.2;\quad \tau = 88^\circ\,38'.8$$
$$\lambda = 156^\circ\,46'.6;\quad \varphi = -\,8^\circ\,34'.6$$

Вмѣстѣ съ этимъ намъ извѣстны теперь предѣлы, въ которыхъ измѣняется величина, принимаемая за произвольную при вычисленіи точекъ восточно-западной кривой. Этими предѣлами, какъ мы говорили, служатъ значенія W или $W + \nu$ соотвѣтствующія точкамъ прикосновенія сѣверной и южной границы частнаго затмѣнія съ восточною и западною. Въ нашемъ случаѣ $W + \nu$ должно слѣдовательно измѣняться въ предѣлахъ отъ $W + \nu = 5^\circ\,35'$ до $W + \nu = 174^\circ\,26'$. При вычисленіи удобнѣе всего измѣнять эту величину отъ $30'$ до $30'$. Мы покажемъ здѣсь вычисленіе координатъ точекъ кривой соотвѣтствующихъ значенію $W + \nu = 171^\circ\,30'$. Прежде всего для этой величины $W + \nu$ изъ уравненія (256) вычисляемъ ψ и находимъ по синусу двѣ такія величины: $\psi = 244^\circ\,17'.0$ и $\psi = 295^\circ\,43'.0$. Далѣе слѣдуетъ опредѣлить величины H и t. Первую изъ нихъ мы вычислили по уравненію (282), которое отличается отъ уравненія (254) только тѣмъ, что при выводѣ его обращено вниманіе на вліяніе рефракціи. Величину t слѣдуетъ опредѣлить по уравненію (257). Такимъ образомъ, для двухъ значеній ψ мы получили: $H = -\,0^\circ\,42'.0$ и $H = -\,0^\circ\,17'.5$ $t = 232^\circ\,24'.6$ и $t = 244^\circ\,37'.6$. Наконецъ по уравненіямъ (246) мы нашли координаты разсматриваемыхъ точекъ кривой. Для одной точки мы имѣемъ

$$W = 171^\circ\,27'.4;\quad \psi = 244^\circ\,17'.0;\quad H = -\,0^\circ\,42'.0$$
$$t = 232^\circ\,24'.6;\quad \tau = 263^\circ\,55'.0\quad \lambda = +\,31^\circ\,30'.4;\quad \varphi = 22^\circ\,0'.0$$

для другой

$$W = 171^\circ\,27'.4;\quad \psi = 295^\circ\,43'.0;\quad H = -\,0^\circ\,17'.5$$
$$t = 244^\circ\,37'.6;\quad \tau = 264^\circ\,20'.0;\quad \lambda = +\,19^\circ\,42'.4;\quad \varphi = 22^\circ\,5'.5$$

Такъ какъ обѣ эти точки соотвѣтствуютъ такому значенію $W + \nu$, которое имѣетъ отрицательный косинусъ, то заключаемъ, что обѣ найденныя точки лежатъ на западной вѣтви восточно-западной границы. Величина τ есть истинное время считаемое въ найденной точкѣ въ тотъ моментъ, когда происходитъ прикосновеніе краевъ солнца и луны на горизонтѣ этой точки. И для той и для другой точки τ находится въ третей четверти окружности и потому заключаемъ, что и въ той и въ другой точкѣ прикосновеніе краевъ на горизонтѣ видимо при восхожденіи солнца. Для первой точки ψ болѣе 90° и менѣе 270°, а потому въ этой точкѣ видимо при восхожденіи солнца начало частнаго затмѣнія. Для второй точки $\cos\psi$ положителенъ, а потому, изъ этой точки прикосновеніе краевъ на горизонтѣ видимо при восхожденіи солнца, но уже при концѣ частнаго затмѣнія.

Вычисливъ точки прикосновенія восточной и западной кривой съ сѣверною и южною, мы нашли вмѣстѣ съ тѣмъ и предѣлы, въ которыхъ должна измѣняться величина принимаемая за произвольную при вычисленіи южной границы частнаго затмѣнія. За произвольную величину при вычисленіи южной границы частнаго затмѣнія мы считаемъ τ. Такъ какъ для точки прикосновенія южной кривой съ западною $\tau = 264^0\ 46'.7$, а для прикосновенія той же кривой съ восточною границей $\tau = 88^0\ 38'.8$, то предѣлами измѣненія τ для южной кривой мы будемъ считать эти величины, или близкія къ нимъ величины $88^0\ 39'$ и $264^0\ 47'$. Понятно, что такимъ образомъ всѣ значенія τ будутъ заключаться въ первой и четвертой четверти окружности, а потому для разсматриваемой кривой величина τ будетъ измѣняться, переходя черезъ 0^0, а не черезъ 180^0. При вычисленіи южной кривой вполнѣ удовлетворительно измѣнять τ отъ 5^0 до 5^0.

Прежде всего вычислимъ тѣ величины, которыя для всей кривой можно считать за постоянныя т. е. величины k, K, β и α_1. Обращаясь для этого къ уравненіямъ (266), (272) и (276), находимъ

$$K = 93^0\ 13'.4; \quad \lg\sin k = 9.98728; \quad \lg\cos k = 9.37764_n; \quad \lg\beta = 0.79447_n$$
$$\lg\alpha_1 = 7.01279$$

Въ первомъ приближеніи для южной кривой мы должны считать $\sin\psi = -1$, а потому изъ уравненій (266) находимъ $G = 137^0\ 56'.5$; $\log g = 9.51800$. Послѣ этого слѣдуетъ перейти къ вычисленіе величинъ m, M, p и P изъ уравненій (269), но принимая $\sin\psi = -1$, легко видѣть, что $p = g$ и $P = G$, а потому для перваго приближенія слѣдуетъ только вычислить m и M, и мы нашли $M = -0^0\ 16'.3$; $\lg m = 9.98659$. Имѣя все это, дадимъ величинѣ τ произвольное значеніе, заключающееся въ указанныхъ предѣлелъ,—положимъ напримѣръ $\tau = 300^0\ 0'$. Для такого значенія τ изъ уравненій (272) и (276) находимъ

$$\log\theta_0 = 9.72599; \quad \log\eta_0 = 8.83796; \quad \log\eta_1 = 9.50832; \quad \log\theta_1 = 9.97358;$$
$$\log\alpha = 1.32806; \quad \log\beta_1 = 7.35364$$

Далѣе изъ уравненій (274) находимъ $A = 18^0\ 54'.7$; $\log a = 9.99763$. Принимая опять $\sin\psi = -1$, изъ уравненія (275) получаемъ $\varphi_1 = 24^0\ 19'.4$. Съ отою величиною φ_1 по первому изъ уравненій (273) находимъ $\psi = 267^0\ 53'.3$, что должно служить основаніемъ второму приближенію. Синусъ этой дуги ψ столь близокъ къ -1, что всѣ тѣ величины, которыя содержатъ $\sin\psi$ съ множителемъ $\tang f$, для нашего случая во второмъ приближеніи сохраняютъ тѣже значенія, какія они имѣли въ первомъ. Такимъ образомъ во второмъ приближеніи останутся безъ перемѣны величины g, G, m, M, p, P, η_0, θ_1, η_1, a и A. Что касается до φ_1, то вычисляя его теперь по полному уравненію (275), найдемъ во второмъ приближеніи $\varphi_1 = 24^0\ 22'.0$; но и эта величина такъ мало разнится отъ величины полученной въ первомъ приближеніи, что прибѣгать къ дальнѣйшимъ приближеніямъ нѣтъ ни какой надобности, а потому мы можемъ прямо перейти къ вычисленію координаты λ. Для этого съ послѣднею величиною φ_1 изъ уравненія (277) находимъ $u = 0.53481$ и наконецъ изъ уравненія (278) $\lambda = 58^0\ 2'.9$. Такимъ образомъ для вычисленной теперь точки южной границы частнаго затмѣнія мы имѣемъ

$$\tau = 300^0\ 0'; \quad \varphi = 24^0\ 26'.3; \quad \lambda = 58^0\ 2'.9; \quad t = 241^0\ 57'.1$$

Если границы того пространства земной поверхности, съ котораго можетъ быть видѣнъ какой либо фазъ затмѣнія найдены, то можно приступить къ вычисленію различныхъ кривыхъ линій расположенныхъ внутри этого пространства. Мы покажемъ способъ вычисленія кривой линіи наибольшаго фаза на горизонтѣ, линіи центральнаго затмѣнія и границъ полосы полнаго или кольцеобразнаго затмѣнія. Линія наибольшаго фаза на горизонтѣ начинается и оканчивается въ тѣхъ точкахъ земли, въ которыхъ сѣверная и южная границы частнаго затмѣнія касаются восточной и западной; слѣдовательно величина, принимая нами за произвольную при вычисленіи упомянутой кривой, должна имѣть предѣлами тѣ значенія, которыя соотвѣтствуютъ упомянутымъ сейчасъ точкамъ. За произвольную величину при вычисленіи кривой линіи наибольшаго фаза на горизонтѣ мы примемъ $W+\nu$; для упомянутыхъ точекъ прикосновенія $W+\nu = 5^\circ\ 34'$ и $W+\nu = 174^\circ\ 26'$, таковы слѣдовательно предѣлы, въ которыхъ измѣняется наша произвольная величина. Вычислимъ точку кривой соотвѣтствующую $W+\nu = 160^\circ\ 0'$. Для разсматриваемой теперь кривой u' и f должны считаться за перемѣнныя и въ началѣ вычисленія намъ неизвѣстныя величины; по этому вопросъ, строго говоря, долженъ быть рѣшенъ послѣдовательными приближеніями. Въ первомъ приближеніи мы примемъ $\tang f = 0$ и изъ уравненій (284) находимъ $\alpha = 0$ и $E = 0.22909$; съ этою величиною E, вычисляя ψ изъ уравненія (288), получаемъ $\psi = 84^\circ\ 35'.3$ и $\psi = 264^\circ\ 35'.3$. Если бы при вычисленіи u' изъ уравненія (289) мы стали пользоваться обѣими величинами ψ, то нашли бы для $\psi = 84^\circ\ 35'.3$ отрицательную величину u', по этому мы должны отвергнуть такое значеніе ψ и принять для искомой точки $\psi = 264^\circ\ 35'.3$. Вообще четверть окружности, въ которой находится уголъ ψ вполнѣ опредѣляется тѣмъ условіемъ, что величина u', вычисленная для извѣстнаго значенія ψ, не должна переходить тѣхъ предѣловъ, въ которыхъ измѣняется u' для даннаго затмѣнія. Съ найденною величиною ψ изъ уравненій (289) и (290) получаемъ $u' = 0.29180$; $\lg \sin f = 6.51867$. На основаніи соотвѣтствующей величины f слѣдовало бы сдѣлать второе приближеніе, повторивъ вычисленіе величинъ ψ, u' и f еще разъ; но, какъ видно, f для разсматриваемой точки кривой есть столь малая величина, что измѣненій въ ψ, u' и f ожидать нельзя, а потому ограничимся отимъ первымъ приближеніемъ и изъ уравненій (282), (257) и (246) находимъ

$$H = -0^\circ\ 33'.5\,;\quad t = 239^\circ\ 5'.8\,,\quad \tau = 260^\circ\ 42'.5\,,\quad \varphi_1 = 33^\circ\ 4'.1$$

слѣдовательно координаты искомой точки будутъ

$$\lambda = +21^\circ\ 36'.7\,;\quad \varphi = 33^\circ\ 9'.4$$

Остается опредѣлить еще величину наибольшаго фаза затмѣнія, изъ найденной точки кривой видимаго на горизонтѣ. Для этого подставляя вмѣсто φ вычисленную величину f въ уравненіе

$$i = 12\left[\frac{\sin f_1 - \sin \varphi}{\sin f_2 + \sin f_1}\right]$$

которое получается изъ выраженія (212), находимъ $i = 5{,}6$. Такимъ образомъ во время наибольшаго фаза на горизонтѣ изъ опредѣленной нами теперь точки около пяти съ половиною двѣнадцатыхъ долей солнечнаго діаметра будутъ представляться закрытыми луною.

Покажемъ теперь способъ вычисленія координатъ точекъ линіи центральнаго затмѣнія. Мы сказали, что за произвольную величину при вычисленіи точекъ этой кривой принимаемъ τ и теперь прежде всего найдемъ предѣлы измѣнія этой перемѣнной. Для этого обращаясь уравненіямъ (295), находимъ изъ нихъ, для двухъ предѣльныхъ точекъ

$$W = 39^\circ\ 15'.4\,, \quad t = 284^\circ\ 39'.3\,; \quad W = 140^\circ\ 39'.4\,, \quad t = 244^\circ\ 14'.8$$

Какъ скоро H найдено изъ уравненія $\sin H = -r$, то искомыя координаты опредѣлятся изъ уравненій (246), которыя для разсматриваемыхъ двухъ точекъ даютъ

$$\tau = 95^\circ\ 23'.7, \quad \varphi_1 = +24^\circ\ 32'.5; \quad \tau = 254^\circ\ 5'.2, \quad \varphi_1 = +9^\circ\ 50'.4$$

слѣдовательно координатами точки начала кривой будутъ $\varphi = 51^\circ\ 43'.6$, $\lambda = +9^\circ\ 50'.4$, а конца $\varphi = 24^\circ\ 34'.8$, $\lambda = 170^\circ\ 44'.4$. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что нисшимъ предѣломъ измѣненія величины принимаемой за произвольную при вычисленіи линіи центральнаго затмѣнія служитъ $\tau = 254^\circ\ 5'$, а высшимъ $\tau = 95^\circ\ 24'$, при этомъ τ очевидно измѣняется, переходя черезъ нуль, а не черезъ 180°.

Имѣя это, можемъ вычислять кривую линію центральнаго затмѣнія. Прежде всего слѣдуетъ вычислить величины считаемыя за постоянныя для всей кривой, т. е. величины K, $\sin k$, $\cos k$, g, G, θ_1 и β. Для этого изъ уравненій (291), (272) и перваго изъ уравненій (292) находимъ

$$\log \sin k = 9.98728\,; \quad \log \cos k = 9.37764_n\,, \quad K = 98^\circ\ 13'.4, \quad G = 138^\circ\ 31'.7$$

$$\log g = 9.51403, \quad \log \theta_1 = 9.97407, \quad \log \beta = 0.79447_n$$

Дадимъ теперь τ какое нибудь произвольное значеніе, заключающееся въ указанныхъ предѣлахъ; примемъ напр. $\tau = 320^\circ\ 0'$, вычисляя соотвѣтствующія этому величины η_1 и α изъ уравненій (292) и (272), находимъ

$$\log \eta_1 = 9.50921\,; \quad \lg \alpha = 1.18277$$

По этимъ величинамъ изъ уравненій

$$\theta_1 = a \,.\, \cos A\,, \quad \eta_1 = a \,.\, \sin A$$

для разсматриваемой точки кривой имѣемъ

$$A = 18^\circ\ 55'.5, \quad \log a = 9.99818$$

и наконецъ опредѣляя искомыя координаты изъ уравненій (293) и (294), получаемъ

$$\varphi_1 = 58^\circ\ 16'.9\,; \quad \varphi = 58^\circ\ 22'.1\,; \quad \lambda = 68^\circ\ 53'.0$$

Покажемъ еще ходъ вычисленія границъ полосы полнаго или кольцеобразнаго затмѣнія. Для рѣшенія этого вопроса мы пользуемся тѣми же уравненіями какъ и для вычисленія сѣверной и южной границы частнаго затмѣнія; но при этомъ величинамъ w' и f дамъ тѣ значенія, какія они имѣютъ для внутренняго прикосновенія краевъ солнца и луны. За предѣлы измѣненія произвольной при этомъ вычисленіи величины τ мы принимаемъ тѣ ея значенія, которыя соотвѣтствуютъ конечнымъ точкамъ линіи центральнаго затмѣнія.

Строго говоря, за постоянныя величины для обоихъ кривыхъ могутъ считаться только k, K, β и α_1. Вычисляя ихъ изъ уравненій (266), (272), (276), находимъ какъ прежде

$$K = 93^\circ\ 13'.4\,; \quad \log\sin k = 9.98728\,; \quad \log\cos k = 9.37764_n$$
$$\log\beta = 0.79447_n\,; \quad \lg\alpha_1 = 7.01062_n$$

За произвольную величину мы примемъ τ и вычислимъ теперь точки разсматриваемыхъ границъ полосы полнаго затмѣнія, соотвѣтствующія найденной уже точкѣ линіи центральнаго затмѣнія, т. е. соотвѣтствующія значеніе $\tau = 320^\circ\ 0'$. Въ первомъ приближеніи мы примемъ для сѣверной границы $\psi = 90^\circ$ и для южной $\psi = 270^\circ$, тогда производя вычисленіе въ томъ же порядкѣ и по тѣмъ же уравненіямъ, которыя мы употребляли для вычисленія сѣверной и южной границы частнаго затмѣнія, находимъ

	Для южной границы полосы.	Для сѣверной границы полосы.
G	$139^\circ\ 7'.4$	$137^\circ\ 56'.6$
$\log g$	9.51011	9.51802
M	$+0^\circ\ 16'.4$	$-0^\circ\ 16'.4$
$\log m$	9.98659	9.98659
$\log\theta_1$	9.97452	9.97357
$\log\eta_0$	8.71031_n	8.65847_n
$\log\eta_1$	9.50458	9.51384
A	$18^\circ\ 43'.2$	$19^\circ\ 8'.0$
$\log a$	9.99812	9.99825
φ_1	$57^\circ\ 20'.8$	$59^\circ\ 13'.6$
ψ	$270^\circ\ 36'.5$	$90^\circ\ 31'.0$

Что касается до величинъ θ_0, α и β_1, то они хотя измѣняются отъ одной точки кривой до другой, но для одного даннаго значенія τ одинаковы на обѣихъ границахъ, ибо отъ ψ не зависятъ. Такимъ образомъ въ нашемъ случаѣ для $\tau = 320^\circ\ 0'$ мы имѣемъ какъ и для соотвѣтствующей точки линіи центральнаго затмѣнія

$$\log\theta_0 = 9.89086\,; \quad \log\alpha = 1.18277\,; \quad \log\beta_1 = 7.53674_n$$

Съ найденными величинами ψ слѣдовало бы повторить все вычисленіе произведенное до сихъ поръ и сдѣлать такимъ образомъ второе приближеніе, но одно изъ найденныхъ теперь значеній ψ такъ мало разнится отъ 270°, а другое—отъ 90°, что эти разности не произведутъ чувствительныхъ измѣненій не только въ величинахъ содержащихъ ψ совмѣстно съ $\tang f$, но и въ координатѣ φ_1; а потому всѣ величины найденныя въ первомъ приближеніи будемъ считать удовлетворительно точными для продолженія вычисленія и съ ними изъ уравненій (277) и (278) находимъ для разсматриваемыхъ точекъ границъ сначала u_1 а потомъ координату λ. И такъ вычисленной точкѣ линіи центральнаго затмѣнія на южной границѣ полосы полнаго затмѣнія соотвѣтствуетъ точка съ координатами

$$\varphi = 57^\circ\ 26'.1\,; \quad \lambda = +\,69^\circ\ 21'.1$$

а на сѣверной границѣ—точка съ координатами

$$\varphi = 59^\circ\ 18'.7\,; \quad \lambda = +\,68^\circ\ 43'.3$$

Хотя мы вычислили для поясненія теоріи по одной только точкѣ для каждой изъ разсмотрѣнныхъ нами кривыхъ линій, но чтобы дать читателямъ болѣе опредѣ-

ленное понятіе о видѣ всѣхъ этихъ кривыхъ линій, мы воспользовались вашимъ вычисленіемъ затмѣнія 1887 года произведеннымъ двѣнадцать лѣтъ тому назадъ *) и на основаніи этого вычисленія составили приложенную при этомъ томѣ нашего сочиненія карту, на которой назначены какъ границы того пространства земли, съ котораго будетъ видимъ какой либо фазъ затмѣнія, такъ равно и полоса полнаго затмѣнія.

Покажемъ наконецъ ходъ предвычисленія солнечнаго затмѣнія для даннаго мѣста на земной поверхности. Вычислимъ затмѣніе 18 Августа 1887 года для Кіевской Обсерваторіи, для которой $\varphi_1 = 50^\circ\ 21'.6$; $\lambda = +28^\circ\ 10'.1$ (долготы мы считаемъ отъ парижскаго меридіана и принимаемъ ихъ положительными для мѣстъ лежащихъ къ востоку отъ этого меридіана). Прежде всего по данной широтѣ изъ выраженій (299) находимъ $\log \zeta = 9.80480$ и $\log \eta = 9.88496$. Мы приняли для упрощенія вычисленія $\tau_0 = \lambda + \mu$; для разсматриваемаго случая $\tau_0 = 292^\circ\ 35'.5$. Взявъ изъ приведенныхъ въ началѣ вычисленія вспомогательныхъ величинъ значенія N' и δ соотвѣтствующія этому моменту, по уравненіямъ (300) находимъ

$$G = 138^\circ\ 31'.7;\qquad \log\sin g = 9.51406;\qquad \log\cos g = 9.97552$$
$$K = 93^\circ\ 13'.4;\qquad \log\sin k = 9.93728;\qquad \log\cos k = 9.37764_n$$

Послѣ этого по уравненіямъ (306) вычисляемъ M и m и получаемъ

$$M = 15^\circ\ 26'.0;\qquad \log m = 9.58958$$

такимъ образомъ мы имѣемъ теперь всѣ величины, которыя будемъ считать за постоянныя для всѣхъ послѣдовательныхъ приближеній. Въ первомъ приближеніи вычислимъ m', M' изъ уравненій (307), величину u_1 изъ уравненія (308), примемъ въ первомъ приближеніи $u = u_1$ и опредѣлимъ два значенія χ изъ уравненія (305); наконецъ вычислимъ искомыя времена по уравненію (304). Выполнивъ все это, найдемъ въ первомъ приближеніи:

$$M' = -2^\circ\ 0'.9;\qquad \log m' = 9.70090;\qquad u_1 = +0.53539$$

далѣе для начала частнаго затмѣнія въ Кіевѣ

$$\chi = 170^\circ\ 18'.1;\qquad \tau = 265^\circ\ 32'.4$$

для конца

$$\chi = 9^\circ\ 41'.9;\qquad \tau = 297^\circ\ 3'.8$$

Найденныя величины τ должны теперь служить основаніемъ второму приближенію, въ которомъ m' и M' вычисляемъ по двумъ послѣднимъ изъ уравненій (302) и величину u по уравненію (309), затѣмъ χ какъ прежде по уравненію (305) и искомыя величины τ по уравненію (304). Такимъ образомъ во второмъ приближеніи находимъ

	Для начала затмѣнія.	Для конца затмѣнія.
$\log a$	9.41394	9.41786
M'	$-3^\circ\ 4'.1$	$-1^\circ\ 48'.2$
$\log m$	9.73170	9.69595
u	$+0.53672$	$+0.53519$
χ	$171^\circ\ 5'.4$	$9^\circ\ 51'.5$
τ	$267^\circ\ 15'.4$	$297^\circ\ 6'.7$

*) см. *М. Хандриковъ.* Сравненіе способовъ предложенныхъ Бесселемъ, Гауссомъ и Ганссномъ для вычисленія солнечныхъ затмѣній. 1862.

Величины относящіяся къ концу затмѣнія весьма близки къ тѣмъ, которыя мы нашли въ первомъ приближеніи, а потому вычисленіе времени конца затмѣнія можемъ считать достаточно точнымъ и довольствоваться тѣми величинами χ и τ, которыя мы нашли въ этомъ второмъ приближеніи. Что касается до величинъ найденныхъ во второмъ приближеніи для времени начала затмѣнія, то онѣ еще значительно разнятся отъ величинъ вычисленныхъ по первому приближенію. Причина этой разности понятна. Выбранная величина τ_0 близка ко времени конца затмѣнія, разность между τ_0 и τ для конца затмѣнія сравнительно мала, она достигаетъ только $4^\circ\ 31'$, а слѣдовательно τ_0 мало разнится отъ $\frac{\tau + \tau_0}{2}$; тогда какъ для начала затмѣнія разность между τ и τ_0 есть приблизительно $25^\circ\ 20'$; значительно отличается также величина $\frac{\tau + \tau_0}{2}$ отъ τ_0, по этому нельзя еще считать близкими къ истиннымъ величины m' и M' найденныя въ первомъ приближеніи.

И такъ для опредѣленія времени начала затмѣнія сдѣлаемъ третье приближеніе. За τ примемъ въ немъ то значеніе, которое нашли во второмъ приближеніи, т. е. будемъ считать $\tau = 267^\circ\ 15'.4$. Тогда въ третьемъ приближеніи по двумъ послѣднимъ изъ уравненій (302) и по уравненіямъ (309), (305) и (304) находимъ для времени начала частнаго затмѣнія въ Кіевѣ:

$$\log \alpha = 9.41443; \quad M' = -3^\circ\ 1'.5; \quad \log m' = 9.72972; \quad u = +0.53663$$
$$\chi = 171^\circ\ 2'.8; \quad \tau = 267^\circ\ 10'.2$$

Эти величины уже мало разнятся отъ найденныхъ во второмъ приближеніи, а потому послѣднее опредѣленіе начала затмѣнія можемъ считать теперь достаточно точнымъ и ограничиться третьимъ приближеніемъ. Мы можемъ указать теперь какъ времена начала и конца частнаго затмѣнія въ Кіевѣ, такъ и тѣ точки солнечнаго диска, въ которыхъ луна коснется его въ первый и послѣдній разъ. По нашему означенію τ есть истинное солнечное время, считаемое въ разсматриваемомъ мѣстѣ. Слѣдовательно истинное кіевское время начала частнаго затмѣнія есть $17^h\ 28^m.7$, а конца $19^h\ 28^m.4$. Такъ какъ уравненіе времени соотвѣтствующее этимъ моментамъ можно считать равнымъ $3^m.6$, то среднее кіевское время начала затмѣнія будетъ

18-го авг., $17^h\ 32^m.3$

а конца

18-го авг., $19^h\ 32^m.0$

Если для начала и конца затмѣнія извѣстны величины χ, то извѣстны также и соотвѣтствующія этимъ моментамъ углы положенія точекъ прикосновенія краевъ, считаемые отъ круга склоненія проведеннаго черезъ центръ Солнца. Въ самомъ дѣлѣ мы видѣли, что

$$\theta' = N' + M' - \chi$$

а потому для нашего случая уголъ положенія точки прикосновенія краевъ при началѣ затмѣнія считаемый отъ упомянутаго круга склоненія по направленію отъ сѣверной точки солнечнаго диска черезъ востокъ къ западу, будетъ $\theta' = 290^\circ\ 5'.7$, а для точки прикосновенія краевъ при концѣ затмѣнія $\theta' = 92^\circ\ 30'.3$.

Считаемъ теперь не лишнимъ сдѣлать одно замѣчаніе касательно вычисленія величины α входящей въ уравненія (302) и (309). Эту величину слѣдуетъ вычислять по выраженію

$$\alpha = \frac{30 \,.\, \sin \dfrac{\tau - \tau_0}{2}}{\tau - \tau_0}$$

разность $\tau - \tau_0$ входящая въ знаменатоля должна быть представлена въ градусахъ и десятичныхъ доляхъ градуса. Для нахожденія величины α Гансенъ составилъ небольшую таблицу расположенную по аргументу $\tau - \tau_0$ и имѣющую видъ:

$\pm(\tau-\tau_0)$	$\log\alpha$	$\pm(\tau-\tau_0)$	$\log\alpha$	$\pm(\tau-\tau_0)$	$\log\alpha$	$\pm(\tau-\tau_0)$	$\log\alpha$
0°	9.41797	12°	9.41717	24°	9.41479	36°	9.41080
1	796	13	704	25	452	37	9.41040
2	795	14	689	26	424	38	9.40998
3	792	15	673	27	395	39	956
4	788	16	656	28	364	40	912
5	783	17	637	29	332	41	867
6	777	18	618	30	300	42	820
7	770	19	598	31	266	43	773
8	761	20	576	32	231	44	725
9	752	21	553	33	195	45	675
10	742	22	530	34	158	46	624
11	730	23	505	35	119	47	572
12	9.41717	24	9.41479	36	9.41080	48	9.40519

Опредѣлимъ еще для Кіева время и величину наибольшаго фаза затмѣнія 18 августа 1887 года. Такъ какъ время наибольшаго фаза близко къ срединѣ затмѣнія, то за величину τ въ уравненіяхъ (302) при этомъ вычисленіи примемъ ариометическую средину изъ временъ начала и конца затмѣнія, т. е. положимъ въ началѣ вычисленія $\tau = 282^\circ\ 8'.4$. Что касается до τ_0, то оно останется тоже какъ прежде. Слѣдовательно m и M сохранятъ найденную для нихъ величину. Положивъ это, посредствомъ двухъ послѣднихъ изъ уравненій (302) находимъ $M' = -2^\circ\ 28'.3$; $\log m' = 9.71270$. Съ этими величинами изъ уравненія (311) находимъ искомое время наибольшаго фаза $t = 281^\circ\ 35'.0$, другими словами, истинное кіевское время наибольшаго фаза затмѣнія есть $18^h\ 46^m.3$, а соотвѣтствующее ему среднее время считаемое въ моментъ наибольшаго фаза затмѣнія въ Кіевѣ будетъ $18^h\ 49^m.9$. Что касается до величины наибольшаго фаза, то для опредѣленія ея изъ уравненія (312) находимъ $\log\Delta = 8.94041$; затѣмъ вычислимъ $Z' = Z - z$. По уравненію (314), принимая $t = 281^\circ\ 35'.0$, получаемъ $\log z = 9.47145$ и такъ какъ можно принять $\lg Z = 1.75660$, то $\log Z' = 1.75434$. Имѣя это, изъ уравненія (313) находимъ $\log \sin\varphi = 7.51466_n$, послѣ чего уравненіе

$$i = 12\left[\frac{\sin f_1 - \sin\varphi}{\sin f_1 + \sin f_2}\right]$$

даетъ $i = 10{,}26$. Такимъ образомъ мы видимъ, что въ моментъ наибольшаго фаза въ Кіевѣ слишкомъ десять дюймовъ или двѣнадцатыхъ частей солнечнаго діаметра

будутъ закрыты луною. Впрочемъ если извѣстны углы положенія точекъ прикосновенія краевъ солнца и луны при началѣ и концѣ частнаго затмѣнія, то величину наибольшаго фаза болѣе удобно опредѣлить графически.

Примемъ одну линію за минуту и поэтому маштабу опишемъ видимымъ радіусомъ солнца кругъ $NWSO$ (фиг. 16) представляющій собою солнечный дискъ. Пусть кругъ склоненія центра солнца будетъ направленъ по линіи NS; отъ точки N по направленію стрѣлки будемъ считать углы положеній точки прикосновенія краевъ. Такъ какъ для начала затмѣнія $\theta' = 290^\circ\ 5'$ и для конца $\theta' = 92^\circ\ 30'$, то прикосновеніе краевъ солнца и луны при началѣ затмѣнія послѣдуетъ въ точкѣ A, а при концѣ затмѣнія въ точкѣ B. Слѣдовательно если въ C находится центръ солнца, то при началѣ затмѣнія центръ луны будетъ находиться на прямой CD проведенной чрезъ точки C и A, а при концѣ затмѣнія—на прямой CF проведенной чрезъ точки C и B. Если по этимъ прямымъ, начиная отъ точекъ A и B, отложимъ внѣ солнечнаго диска длины AL_1 и BL_2 равныя видимому радіусу луны по принятому маштабу, то точки L_1 и L_2 представятъ собою положенія центра луны при началѣ и концѣ частнаго затмѣнія. Соединивъ эти точки прямою L_1L_2, можемъ разсматривать эту линію какъ путь центра луны во время затмѣнія. Если опустимъ изъ центра солнца перпендикуляръ CE на прямую L_1L_2, то точка E пересѣченія перпендикуляра съ прямою L_1L_2 покажетъ положеніе луны во время средины затмѣнія, которое мы примемъ теперь за время наибольшаго фаза. Опишемъ изъ точки E видимымъ радіусомъ луны кругъ $abfh$, который представитъ собою положеніе луннаго диска во время наибольшаго фаза. Вырѣзокъ $afbg$ представляетъ оставшуюся свѣтлую часть солнечнаго диска, а если выразимъ линію fk, перпендикулярную къ пути луны, въ двѣнадцатыхъ доляхъ цѣлаго солнечнаго діаметра, то получимъ число опредѣляющее величину наибольшаго фаза затмѣнія, представленную въ дюймахъ. Изъ этого построенія мы нашли, что длина линіи fk для разсматриваемаго затмѣнія равна 10.3 дюйма, что совершенно согласно съ предыдущимъ вычисленіемъ.

Мы прослѣдили теперь весь ходъ вычисленія солнечнаго затмѣнія какъ для земли вообще, такъ и для даннаго мѣста ея поверхности и можемъ сказать, что теорія затмѣній предложенная Ганссномъ даетъ весьма простое средство предсказывать всѣ подробности явленія солнечнаго затмѣнія.

35. Къ категоріи затмѣній зависящихъ отъ параллакса, какъ мы уже сказали, относятся явленія прохожденій нижнихъ планетъ по солнцу. По поводу двухъ предстоящихъ прохожденій Венеры астрономы обратили особое вниманіе на это явленіе, находя въ наблюденіяхъ его одно изъ вѣрнѣйшихъ средствъ къ опредѣленію солнечнаго параллакса, т. е. той величины, знаніемъ которой объусловливается знаніе размѣровъ солнечной системы. Вниманіе астрономовъ къ предстоящему прохожденію Венеры выразилось не однимъ только снаряженіемъ многихъ экспедицій для наблюденія явленія въ разныхъ мѣстахъ земнаго шара, но и довольно значительнымъ приращеніемъ литературы касающейся вопроса о прохожденіяхъ нижнихъ планетъ по солнцу и особенно прохожденій Венеры. Между вновь явившимися мемуарами и трактатами едва ли не первое мѣсто занимаетъ трактатъ Ганссна изданный въ 1870 году подъ заглавіемъ: „Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintreffenden Vorüberganges“.

Это сочиненіе Гансена кромѣ метода предвычисленія явленія, метода основаннаго на тѣхъ же уравненіяхъ, которыя мы показали въ теоріи солнечныхъ затмѣній, заключаетъ въ себѣ изложеніе способовъ опредѣленія солнечнаго параллакса по наблюденіямъ прикосновеній краевъ Солнца и Венеры, а также и по микрометрическимъ измѣреніямъ разстоянія края Венеры проходящей уже по Солнцу отъ края этого послѣдняго свѣтила. Въ этомъ сочиненіи Гансена мы находимъ между прочимъ и полное предвычисленіе прохожденія Венеры въ 1874 году. Замѣтимъ однако, что подобное предвычисленіе еще до появленія работы Гансена было сдѣлано два раза. Прежде другихъ прохожденіе 1874 года было предвычислено Гейндомъ (Hind), издателемъ англійскаго Nautical Almanac *), послѣ того предвычисленіе было повторено Петерсомъ **).

Мемуаръ Оппольцера „Ueber den Venusdurchgang des Jahres 1874" помѣщенный въ „Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Band LXI, Heft IV. Mathem.-Naturwissenschaft. Classe", касается не столько метода предвычисленія явленія, сколько различныхъ способовъ наблюденія прохожденія Венеры съ цѣлію опредѣленія солнечнаго параллакса.

Въ изданныхъ въ 1872 году въ Вашингтонѣ Papers relating to the transit of Venus in 1874 мы находимъ предвычисленіе явленія 1874 съ изложеніемъ теоретическихъ соображеній, на которыхъ основано это предвычисленіе и между прочимъ рѣшеніе двухъ весьма существенныхъ вопросовъ теоріи. Именно вопроса объ опредѣленіи тѣхъ мѣстъ земной поверхности, для которыхъ прикосновеніе краевъ Солнца и Венеры будетъ имѣть мѣсто въ данное время и при данной высотѣ надъ горизонтомъ, а также вопроса объ опредѣленіи точекъ земли, въ которыхъ прикосновеніе краевъ будетъ видимо въ данной точкѣ солнечнаго края и при данной высотѣ Солнца надъ горизонтомъ.

Нѣсколько теоретическихъ соображеній касающихся предвычисленія прохожденія Венеры мы видимъ также въ статьѣ М. Пюизё (M. Puiseux) „Note sur le passage de Venus de 1882", помѣщенной въ прибавленіяхъ къ Connaissance des temps pour l'an 1875. Для поясненія этой теоріи Пюизё въ своей статьѣ вычисляетъ прохожденіе Венеры 1882, имѣющее быть видимымъ по преимуществу въ Америкѣ.

Въ послѣднее время парижская академія наукъ издала цѣлый томъ мемуаровъ, касающихся предвычисленія и наблюденій прохожденія Венеры по солнцу (Recuel de Memoires, rapports et documents, relatifs a l'observation du passage de Venus sur le Soleil). Въ этомъ собраніи особенно интересны тѣ статьи, въ которыхъ разсматриваются и сравниваются различные методы наблюденій и между прочимъ мемуаръ Вольфа и Андре „Recherches sur les apparences singulieres qui ont souvent accompagné l'observations des contacts de Mercure et de Venus avec le bord du Soleil". Въ этомъ мемуарѣ описаны между прочимъ приспособленія подобныя сдѣланнымъ на Пулковской обсерваторіи для наблюденія такъ называемыхъ искуственныхъ прохожденій, при которыхъ астрономы до извѣстной степени могутъ знакомиться съ особенностями встрѣчающимися при наблюденіяхъ подобныхъ явленій. Но такъ какъ въ настоящее время мы имѣемъ въ виду изложить въ извѣстныхъ подробностяхъ только способъ предвычисленія прохожденія нижнихъ планетъ по солнцу, то мы ограничимся этимъ простымъ указаніемъ на собраніе изданное парижской академіей.

*) См. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Academie des sciences. T. LIII, pg. 131.

**) См. Astronomische Nachrichten № 1781.

Наконецъ, говоря о литературѣ вопроса о прохожденіи Венеры по солнцу, мы можемъ указать еще на двѣ небольшія брошюры обще доступно изложенныя; одна принадлежитъ Шору (Dr. F. Schorr) и издана подъ заглавіемъ „Der Vorübergang der Venus vor der Sonnenscheibe am 9 December 1874. Другая составлена Астрономомъ Пулковской обсерваторіи В. К. Деллепомъ и носитъ заглавіе „О прохожденіяхъ Венеры черезъ дискъ солнца".

Если въ тѣхъ основныхъ уравненіяхъ, которыми мы пользовались для предвычисленія солнечнаго затмѣнія всѣ величины, относящіяся къ лунѣ, замѣнимъ величинами, относящимися къ разсматриваемой нижней планетѣ, то этими уравненіями мы можемъ пользоваться также для предвычисленія прохожденія этой послѣдней по солнцу. Но въ этомъ случаѣ всѣ величины выраженныя въ линейной мѣрѣ удобнѣе представить не въ единицахъ экваторіальнаго радіуса земли, но въ нѣкоторыхъ другихъ. Принять въ разсматриваемомъ случаѣ за единицу среднее разстояніе земли отъ солнца также неудобно, ибо многія числовыя величины, входящія въ это вычисленіе и представленныя въ такой единицѣ будутъ весьма малы. По этому выразивъ всѣ линейныя величины въ единицахъ средняго разстоянія земли отъ солнца, мы умножимъ ихъ на нѣкоторую величину m выбранную такимъ образомъ, чтобы радіусъ сѣченія конуса тѣни нижней планеты плоскостію xy съ введеніемъ этого множителя былъ близокъ къ единицѣ. Для прохожденія Венеры по Солнцу въ 1874 году, такая величина m приблизительно равна 640. Величинъ выраженныхъ въ линейной мѣрѣ и входящихъ въ наши основныя уравненія (239) теоріи затмѣній мы имѣемъ три, именно u, u' и ρ. Но чтобы представить ρ въ единицахъ средняго разстоянія земли отъ солнца стоитъ только, какъ мы уже видѣли, величину ρ выраженную въ экваторіальныхъ радіусахъ земли умножить на синусъ экваторіальнаго горизонтальнаго параллакса Солнца. Такимъ образомъ въ уравненія (239) вмѣсто ρ мы введемъ теперь произведеніе $\rho.\sin\pi_0$; гдѣ само ρ выражено въ единицахъ экваторіальнаго радіуса земли. И такъ основныя уравненія (239) будутъ имѣть теперь форму

$$(315)\quad \begin{aligned} u &= u' - \rho.\sin\pi_0 \operatorname{tang} f\,[\sin\varphi'\sin\delta + \cos\varphi'\cos\delta.\cos(\tau+\Delta\alpha)] \\ u.\sin\theta' &= -\gamma.\cos N' + \frac{\tau-\lambda-\mu}{15}n.\sin N' - \rho\sin\pi_0\cos\varphi'\sin(\tau+\Delta\alpha) \\ u.\cos\theta' &= \gamma.\sin N' + \frac{\tau-\lambda-\mu}{15}n.\cos N' - \rho.\sin\pi_0\Big[\sin\varphi'\cos\delta - \cos\varphi'\sin\delta.\cos(\tau+\Delta\alpha)\Big] \end{aligned}$$

Что касается до величинъ u', γ и n, то онѣ должны быть выражены также въ новыхъ единицахъ. Двѣ послѣднія зависятъ отъ координатъ Венеры P, Q, Z Такія координаты опредѣляются по уравненіямъ (215), но въ этихъ послѣднихъ подъ r разумѣется разстояніе Венеры отъ Солнца взятое изъ таблицъ Венеры и представленное въ единицахъ средняго разстоянія земли отъ солнца. Слѣдовательно если при этомъ означеніи вычислимъ координаты P, Q, Z по уравненіямъ (215), то упомянутыя координаты выразятся въ единицахъ средняго разстоянія земли отъ солнца. Для полученія же координатъ P, Q, Z въ новыхъ единицахъ мы будемъ вычислять ихъ изъ уравненій

$$(316)\quad \begin{aligned} P &= m\,r.\cos b.\cos(l-\lambda) \\ Q &= m.r\,[\sin b.\cos\beta - \cos b.\sin\beta.\cos(l-\lambda)] \\ Z &= m.r\,[\sin b.\sin\beta + \cos b.\cos\beta.\cos(l-\lambda)] \end{aligned}$$

гдѣ подъ r разумѣемъ взятый изъ таблицъ Венеры радіусъ векторъ этой планеты; подъ l и b геоцентрическія долготу и широту Венеры, подъ λ и β афродитоцентрическія долготу и широту солнца.

Величина u' представляется уравненіемъ (210). Въ примѣненіи къ нашему случаю подъ k слѣдуетъ разумѣть радіусъ Венеры. Если назовемъ чрезъ Δ уголъ, подъ которымъ видѣнъ радіусъ Венеры съ разстоянія равнаго среднему разстоянію земли отъ солнца, то, какъ легко видѣть, для нашего случая

$$k = \sin \Delta \tag{317}$$

Величина k вычисленная по этому выраженію будетъ представлена въ единицахъ средняго разстоянія земли отъ Солнца. Слѣдовательно величина u' выраженная въ новыхъ единицахъ найдется изъ уравненія

$$u' = [Z \sin f \pm m.k] \sec f$$

гдѣ Z должно быть вычислено по третьему изъ уравненій (316), а k по выраженію (317). Если назовемъ чрезъ Δ' уголъ, подъ которымъ видѣнъ радіусъ солнца съ средняго разстоянія земли отъ Солнца, то $k' = \sin \Delta'$, а потому для вычисленія f второе изъ уравненій (207) даетъ

$$\sin f = \frac{\sin \Delta' \pm \sin \Delta}{r}$$

гдѣ опять r есть табличный радіусъ векторъ Венеры. Во всѣхъ этихъ выраженіяхъ верхніе знаки относятся къ внѣшнему прикосновенію краевъ солнца и Венеры, а нижніе—къ внутреннему.

И такъ если въ основныхъ уравненіяхъ введемъ въ члены умноженные на ρ множителя m и положимъ какъ прежде

$$\rho \cos \varphi' = \cos \varphi_1 \,; \qquad \rho . \sin \varphi' = (1 - c) . \sin \varphi_1$$

то эти уравненія (315) для разсматриваемаго теперь случая будутъ имѣть видъ

$$u = u' - m.\sin \pi_0 \left[(1 - c) \sin \varphi_1 \sin \delta + \cos \varphi_1 \cos \delta.\cos (\tau + \Delta\alpha)\right] \operatorname{tang} f$$

$$u.\sin\theta' = -\gamma.\cos N' + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15} n.\sin N' - m.\sin \pi_0 \cos \varphi_1 \sin (\tau + \Delta\alpha)$$

$$u.\cos\theta' = \gamma.\sin N' + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15} n.\cos N' - m.\sin\pi_0 \left[(1 - c)\sin\varphi_1\cos\delta - \cos\varphi_1\sin\delta.\cos(\tau + \Delta\alpha)\right]$$

что посредствомъ уравненій (246) приводится къ формѣ

$$u = u' - m . \sin \pi_0 \operatorname{tang} f . \sin H$$

$$u . \sin \theta' = -\gamma . \cos N' + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15} n.\sin N' - m . \sin \pi_0 \cos H . \sin K \tag{318}$$

$$u . \cos \theta' = \gamma . \sin N' + \frac{\tau - \lambda - \mu}{15} n.\cos N' - m.d. \sin \pi_0 \cos H . \cos K$$

Въ такомъ видѣ представляются теперь основныя уравненія вопроса.

36. Въ случаѣ прохожденія нижней планеты по Солнцу, конусъ тѣни отбрасываемый планетой со всѣхъ сторонъ облекаетъ землю, поэтому восточно-западная кривая вполнѣ ограничиваетъ собою то пространство земли, съ котораго можетъ быть видимо явленіе. Сѣверная, равно какъ и южная границы затмѣнія, если не всегда, то въ большинствѣ случаевъ не существуютъ. Что касается до формы восточно-западной кривой, то какъ убѣждаетъ построеніе по точкамъ, обѣ вѣтви имѣютъ форму оваловъ, входящихъ одинъ въ другой и пересѣкающихся въ двухъ точкахъ, изъ которыхъ одна лежитъ вблизи сѣвернаго, а другая вблизи южнаго полюса.

И такъ опредѣленіе границъ затмѣнія для земли вообще въ этомъ случаѣ приводится къ вычисленію восточно-западной кривой, а эта послѣдняя можетъ быть найдена по основнымъ уравненіямъ посредствомъ того же самаго пріема, какой мы употребили для подобной цѣли въ теоріи солнечныхъ затмѣній.

Въ самомъ дѣлѣ, тѣмъ же способомъ какъ прежде посредствомъ двухъ послѣднихъ изъ уравненій (318) составляемъ сначала уравненія

$$u'.\sin(\theta'-N') = -\gamma - m.\sin\pi_0[\cos H\sin K\cos N' - d.\cos H\cos K\sin N']$$

$$u'.\cos(\theta'-N') = \frac{\tau-\lambda-\mu}{15}n - m.\sin\pi_0[\cos H\sin K.\sin N' + d.\cos H\cos K\cos N']$$

Полагая потомъ

$$d.\sin N' = e.\sin(N'+\nu); \qquad \sin N' = e'\sin(N'+\nu')$$
$$\cos N' = e.\cos(N'+\nu); \qquad d.\cos N' = e'\cos(N'+\nu')$$
$$\theta' - N' = \psi$$

опять находимъ

$$u.\sin\psi = -\gamma - em\sin\pi_0\cos H\sin(K-N'-\nu)$$
(319)
$$u.\cos\psi = \frac{\tau-\lambda-\mu}{15}n - e'.m\sin\pi_0\cos H\cos(K-N'-\nu')$$

Для опредѣленія восточно-западной кривой къ этимъ уравненіямъ слѣдуетъ прибавить еще условіе, что прикосновеніе краевъ Солнца и Венеры видимо на горизонтѣ; условіе выражающееся, какъ извѣстно, уравненіемъ

(320) $$\tang H = -\tang f\cos(\psi+W)$$

гдѣ какъ прежде $W = N' - K$. Такъ какъ для всей этой кривой можно принять $\cos H = 1$, то первое изъ уравненій (319) для нашего случая дастъ

(321) $$\sin\psi = \frac{e.m}{u'}\cdot\sin\pi_0\sin(W+\nu) - \frac{\gamma}{u'}$$

Давая здѣсь произвольныя значенія величинѣ $W+\nu$, получимъ рядъ соотвѣтствующихъ значеній ψ, для которыхъ въ свою очередь вычислимъ изъ уравненія (320) рядъ величинъ H. Затѣмъ полагая какъ прежде $\tau-\lambda = t$, по второму изъ уравненій (319) найдемъ

(322) $$t = \mu + \frac{15}{n}\cdot e'.m\sin\pi_0\cos(W+\nu') + \frac{15}{n}u'.\cos\psi$$

если такимъ образомъ будутъ вычислены H и t, то координаты точекъ искомой кри-

вой получатся изъ трехъ послѣднихъ уравненій (246). Что касается до опредѣленія границъ, въ которыхъ измѣняется величина принимаемая при этомъ вычисленіи за произвольную, то они найдутся тѣмъ же пріемомъ какъ и въ теоріи солнечныхъ затмѣній, а потому останавливаться на этихъ подробностяхъ болѣе не будемъ.

37. Прохожденія нижнихъ планетъ по солнцу и особенно Венеры наблюдаются съ спеціальною цѣлью изслѣдованія солнечнаго параллакса. Поэтому, вычисливъ границы пространства земли, съ котораго можетъ быть видимо явленіе, опредѣлимъ тѣ точки земной поверхности, изъ которыхъ особенно выгодно наблюдать съ упомянутою цѣлію прохожденіе планеты. Рѣшеніе этого вопроса въ разсматриваемомъ теперь случаѣ и составляетъ существенную часть предвычисленія явленія.

Чтобы рѣшить вопросъ о выборѣ мѣстъ на землѣ для наблюденія прохожденія нижней планеты по солнцу, необходимо имѣть выраженіе, служащее для вычисленія солнечнаго параллакса. Составъ такаго выраженія укажетъ намъ при какихъ условіяхъ должны быть произведены тѣ или другія наблюденія и какія мѣста земли наиболѣе выгодны въ этомъ смыслѣ для размѣщенія наблюдателей. Обратимся для опредѣленія неизвѣстной величины $\sin\pi_0$ къ уравненіямъ (318). Если положимъ

$$S \,.\, \sin\sigma = \gamma$$
$$S \,.\, \cos\sigma = \frac{\tau - \lambda - \mu}{15} \cdot n \tag{323}$$

то два послѣднія изъ уравненій (318) примутъ видъ

$$u \,.\, \sin\theta' = S \,.\, \sin(N' - \sigma) - m \sin\pi_0 \cos H \,.\, \sin K$$
$$u \,.\, \cos\theta' = S \,.\, \cos(N' - \sigma) - m.d \,.\, \sin\pi_0 \cos H \,.\, \cos K$$

Положимъ еще здѣсь

$$l_0 \sin L = \sin K$$
$$l_0 \cos L = d \,.\, \cos K \tag{324}$$

и сдѣлаемъ для краткости

$$\sin\pi_0 = \rho_0$$

тогда будемъ имѣть уравненія

$$u \,.\, \sin\theta' = S \,.\, \sin(N' - \sigma) - m \,.\, l_0\, \rho_0 \cos H \,.\, \sin L$$
$$u \,.\, \cos\theta' = S \,.\, \cos(N' - \sigma) - m \,.\, l_0\, \rho_0 \cos H \,.\, \cos L$$

посредствомъ которыхъ легко составимъ

$$u \,.\, \cos(\theta' - L) = S \,.\, \cos(N' - L - \sigma) - m \,.\, \rho_0\, l_0 \cos H$$
$$u \,.\, \sin(\theta' - L) = S \,.\, \sin(N' - L - \sigma) \tag{325}$$

полагая здѣсь $N' - L = W'$, возвысимъ эти уравненія въ квадратъ и сложимъ ихъ, тогда получимъ

$$m^2 \rho_0^2 . l_0^2 \cos^2 H - 2m\, l_0\, \rho_0\, S \cos(W' - \sigma) \cos H + S^2 - u^2 = 0 \tag{326}$$

Это и есть то уравненіе, которое служитъ для опредѣленія солнечнаго параллакса по наблюдаемымъ временамъ вступленія и выступленія Венеры на солнечный дискъ. Не-

извѣстное ρ_0 входитъ въ это уравненіе еще неявно, въ зависимости отъ величины u, ибо по первому изъ уравненій (318)

$$u = u' - m.\sin\pi_0 \sin H.\tang f$$

Но членъ $m.\sin\pi_0\sin H.\tang f$ всегда столь малъ и такъ мало вліяетъ на результатъ опредѣленія солнечнаго параллакса этимъ способомъ, что вполнѣ удовлетворительно может быть вычисленъ при помощи нынѣ извѣстнаго солнечнаго параллакса, а потому въ предыдущемъ уравненіи величина u можетъ быть разсматриваема какъ вполнѣ извѣстная. Рѣшая найденное квадратное уравненіе относительно ρ_0, получимъ

$$\rho_0 = \frac{S.\cos(W'-\sigma) \pm \sqrt{u^2 - S^2.\sin^2(W'-\sigma)}}{ml_0 \cos H}$$

Полагая

$$\sin w = \frac{S}{u}\sin(W'-\sigma)$$

приведемъ это къ виду

$$\rho_0 = \frac{S.\cos(W'-\sigma) \pm u.\cos w}{ml_0.\cos H}$$

То обстоятельство, что каждый изъ членовъ значительно болѣе ихъ разности, заставляетъ отказаться отъ этого прямаго рѣшенія и искать другое послѣдовательными приближеніями. Для этого, рѣшая уравненіе (326), относительно первой степени ρ_0, получимъ

(327) $$\rho_0 = \frac{(S+u)(S-u) + m.l_0^2.\rho_0^2.\cos^2 H}{2\,ml_0\cos H.\cos(W'-\sigma)}$$

При вычисленіи ρ_0 по этому выраженію отбросимъ въ первомъ приближеніи второй членъ числителя; во второмъ приближеніи вычислимъ этотъ членъ при помощи величины ρ_0 найденной въ первомъ приближеніи и т. д. Обыкновенно послѣдовательныя приближенія сходятся весьма быстро.

Уравненіемъ (326) астрономы пользовались до сихъ поръ для вычисленія параллакса солнца по наблюденіямъ временъ внутреннихъ и внѣшнихъ прикосновеній Солнца и Венеры, но, по предложенію Гансена, это уравненіе можетъ имѣть гораздо болѣе обширное примѣненіе. Наблюденія временъ вступленія и выступленія Венеры съ солнечнаго диска можно разсматривать какъ наблюденія моментовъ, въ которые видимыя разстоянія центровъ Солнца и Венеры равны суммѣ или разности ихъ видимыхъ радіусовъ. Такимъ образомъ наблюденія временъ вступленія и выступленія сводятся къ наблюденіямъ разстояній имѣющихъ только двѣ опредѣленныя величины.

Но легко понять, что это уравненіе можетъ быть примѣнено къ опредѣленію солнечнаго параллакса также и изъ тѣхъ наблюденій, при которыхъ измѣрялись въ извѣстные моменты разстоянія какаго либо края уже вступившей Венеры на Солнце отъ того или другаго края этого послѣдняго свѣтила. Въ самомъ дѣлѣ чтобы примѣнить уравненіе (326) къ вычисленію такихъ наблюденій стоитъ только подставить въ него вмѣсто u величину соотвѣтствующую этому измѣренному разстоянію.

Такимъ образомъ рѣшеніе задачи, въ которой требуется по измѣреннымъ видимымъ разстояніямъ краевъ Венеры и Солнца опредѣлить солнечный параллаксъ, приводится къ опредѣленію величины u соотвѣтствующей измѣренному разстоянію.

Проведемъ чрезъ мѣсто наблюденія и центры Венеры и Солнца плоскость и въ этой плоскости прямую VM (фиг. 17) соединяющую мѣсто наблюденія M съ центромъ Венеры. Если проведемъ черезъ мѣсто наблюденія плоскость перпендикулярную къ оси конуса тѣни, то эта плоскость съ выше упомянутою пересѣчется по прямой MC и составится прямоугольный треугольникъ MCV, катетами котораго, по принятому означенію, будутъ $CV = Z'$ а $CM = u$. Мы предполагаемъ, что Z' и u выражены въ новыхъ единицахъ. Означимъ въ этомъ треугольникѣ уголъ при центрѣ Венеры, т. е. уголъ CVM чрезъ a, тогда

$$\operatorname{tang} a = \frac{u}{Z'}$$

Построимъ подобный же прямоугольный треугольникъ для центра Солнца. Назовемъ уголъ при центрѣ этого свѣтила, т. е. уголъ CSM чрезъ a' и радіусъ векторъ Венеры выраженный въ новыхъ единицахъ—чрезъ $m.r$. Такъ какъ мы принимаемъ, что ось z параллельна оси конуса тѣни, то координата центра Солнца считаемая по этой оси относительно начала координатъ расположеннаго въ мѣстѣ наблюденія будетъ $Z' + mr$, такъ что

$$\operatorname{tang} a' = \frac{u}{Z' + m.r}$$

Назовемъ наконецъ чрезъ b уголъ, подъ которымъ видимо изъ мѣста наблюденія разстояніе центровъ Солнца и Венеры въ данное время. Понятно, что $b = a - a'$, а потому

$$\operatorname{tang} b = \frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} a'}{1 + \operatorname{tang} a \,.\, \operatorname{tang} a'}$$

или

$$\operatorname{tang} b = \frac{\dfrac{u}{Z'} - \dfrac{u}{Z' + mr}}{1 + \dfrac{u^2}{Z'(Z' + mr)}} = \frac{m.ru}{Z'(Z' + mr) + u^2}$$

Но такъ какъ $Z' = Z - z$, то

$$\operatorname{tang} b = \frac{m.ru}{Z(Z + mr) - (2Z + mr)z + z^2 + u^2}$$

Координата Z мало разнится отъ разстоянія Венеры отъ земли. Если назовемъ чрезъ r_1 это разстояніе выраженное въ единицахъ средняго разстоянія земли отъ солнца, тогда $Z = mr_1$. Кромѣ того $r_1 + r = r'$, гдѣ r' какъ прежде есть разстояніе земли отъ солнца.

Легко видѣть, что третье изъ уравненій (216) посредствомъ трехъ первыхъ изъ уравненій (221) и уравненій (222) приводится къ виду:

$$z = \rho\,[\sin \varphi' \sin \delta + \cos \varphi' \cos \delta \,.\, \cos (\mu - \alpha)]$$

но мы знаемъ, что $\mu - \alpha = \tau + \Delta\alpha$. Введемъ это въ предыдущее уравненіе и выразимъ величину z въ единицахъ средняго разстоянія земли отъ Солнца, тогда

$$z = \rho . \sin \pi_0 [\sin \varphi' \sin \delta + \cos \varphi' . \cos \delta \cos (\tau + \Delta\alpha)]$$

Но при $c = 0$

$$\delta = D; \quad \rho . \sin \varphi' = \sin \varphi_1; \quad \rho . \cos \varphi' = \cos \varphi_1$$

Слѣдовательно

$$z = \sin \pi_0 [\sin \varphi_1 \sin D + \cos \varphi_1 \cos D \cos (\tau + \Delta\alpha)]$$

Что по уравненію (247) приводится къ

$$z = \sin \pi_0 \sin H = \rho_0 . \sin H$$

Поэтому координата z выраженная въ новыхъ единицахъ можетъ быть представлена въ видѣ

$$z = m \rho_0 \sin H$$

Внося это вмѣстѣ съ $Z = mr_1$ и $r = r' - r_1$ въ предыдущее выраженіе $\tang b$ получимъ

$$\tang b = \frac{r . u}{m . r' r_1 - m (r_1 + r') \rho_0 \sin H}$$

откуда

$$(328) \qquad u = [r_1 r' - (r_1 + r') \rho_0 \sin H] \frac{m}{r} \tang b$$

Означимъ величину b соотвѣтствующую наблюдаемому разстоянію краевъ Солнца, и Венеры чрезъ b'. Понятно, что мы получимъ величину u соотвѣтствующую наблюдаемому разстоянію краевъ Венеры и Солнца, если изъ величины u соотвѣтствующей прикосновенію краевъ вычтемъ предыдущее выраженіе для u, поставивъ въ немъ предварительно b' вмѣсто b. Такимъ образомъ, если означимъ разстояніе наблюдателя отъ оси конуса тѣни въ моментъ измѣренія разстоянія краевъ чрезъ u, а туже величину для момента прикосновенія краевъ чрезъ (u), то

$$(329) \qquad u = (u) - [r_1 r' - (r_1 + r') \rho_0 \sin H] \frac{m}{r} . \tang b'$$

38. Послѣ этихъ краткихъ замѣчаній о различныхъ способахъ наблюденія прохожденія Венеры съ цѣлію изслѣдованія солнечнаго параллакса, возвратимся къ предвычисленію явленія. Посмотримъ на чемъ долженъ основываться выборъ мѣстъ земной поверхности для наблюденій прохожденія. Выраженіе (327) показываетъ прежде всего, что солнечный параллаксъ не можетъ быть опредѣленъ изъ наблюденій произведенныхъ въ зенитѣ или вблизи его, ибо тогда $\cos H = 0$, или есть малая величина. Изъ этого заключаемъ, что благопріятныя для опредѣленія солнечнаго параллакса мѣста наблюденій должны быть выбраны подъ тѣмъ условіемъ, чтобы высота солнца надъ горизонтомъ для избранныхъ мѣстъ въ продолженіи прохожденія Венеры по его диску не превосходила извѣстныхъ предѣловъ. Тоже выраженіе (327) показываетъ, что совмѣстно съ указаннымъ сейчасъ условіемъ должно выполняться еще другое условіе, заключающееся въ томъ, чтобы $\cos (W' - \sigma)$ не былъ нулемъ или малою величиною. Чтобы видѣть предѣлы, которыхъ могутъ достигать величины $\cos H$ и $\cos (W' - \sigma)$ для достаточно вѣрнаго опредѣленія солнечнаго параллакса, будемъ

дифференцировать выраженіе для ρ_0 и по коэффиціентамъ при каждомъ отдѣльномъ дифференціалѣ въ полученномъ уравненіи можно будетъ судить о вліяніи измѣненія составныхъ частей этого выраженія на измѣненіе искомой величины ρ_0.

Возвышая уравненія (324) въ квадратъ и складывая ихъ, получимъ

$$l_0^2 = \sin^2 K + d^2 . \cos^2 K$$

Но при $c = 0$ мы имѣемъ $d = 1$. Слѣдовательно если примемъ поверхность земли за поверхность сферы, то

$$l_0 = 1 \qquad \text{и} \qquad L = K$$

Допуская это, можемъ уравненіямъ (325) дать видъ

$$\begin{aligned} u . \cos (\theta' - K) &= S \cos (N' - K - \sigma) - m \rho_0 \cos H \\ u . \sin (\theta' - K) &= S \sin (N' - K - \sigma) \end{aligned} \tag{330}$$

Принимая въ этихъ уравненіяхъ за постоянныя только N' и m (первое относится къ орбитѣ Венеры) получимъ

$$\cos (\theta' - K)\, du - u . \sin (\theta' - K)\, d (\theta' - K) =$$

$$\cos (N' - K - \sigma)\, dS + S . \sin (N' - K - \sigma)\, d (K + \sigma) + m \rho_0 \sin H . dH - m . \cos H . d\rho_0$$

$$\sin(\theta' - K) du + u . \cos(\theta' - K) d(\theta' - K) = \sin(N' - K - \sigma) dS - S \cos(N' - K - \sigma) d(K + \sigma)$$

исключая отсюда $d(\theta' - K)$, находимъ

$$\begin{aligned} du = {} & \cos (N' - \sigma - \theta')\, dS + S \sin (N' - \sigma - \theta')\, d (K + \sigma) \\ & + m \rho_0 \sin H \cos (\theta' - K)\, dH - m \cos H \cos (\theta' - K) . d\rho_0 \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \cos H . \cos (\theta' - K) . d\rho_0 = {} & \rho_0 \sin H \cos (\theta' - K)\, dH \\ & + \frac{S}{m} \sin (N' - \sigma - \theta')\, dK \\ & + \frac{S}{m} \sin (N' - \sigma - \theta')\, d\sigma \\ & + \frac{1}{m} \cos (N' - \sigma - \theta')\, dS - \frac{du}{m} \end{aligned}$$

Исключая изъ уравненій (330) величину u, находимъ

$$0 = S . \sin (N' - \sigma - \theta') + m . r_0 \cos H . \sin (\theta' - K)$$

Опредѣлимъ отсюда величину $S . \sin (N' - \sigma - \theta')$ и подставимъ ее во второй членъ предыдущаго уравненія, тогда получимъ

$$\begin{aligned} \cos H . \cos (\theta' - K)\, d\rho_0 = {} & \rho_0 \sin H \cos (\theta' - K)\, dH \\ & - \rho_0 \cos H \sin (\theta' - K)\, dK \\ & + \frac{1}{m} \cdot \cos (N' - \sigma - \theta')\, dS \\ & + \frac{S}{m} \cdot \sin (N' - \sigma - \theta')\, d\sigma - \frac{du}{m} . \end{aligned} \tag{331}$$

опредѣлимъ входящіе сюда дифференціалы. Три послѣднія изъ уравненій (246) даютъ

(332)
$$\begin{aligned} \cos H . \sin K &= \cos \varphi_1 \sin (\tau + \Delta\alpha) \\ \cos H . \cos K &= \sin \varphi_1 \cos D - \cos \varphi_1 \sin D \cos (\tau + \Delta\alpha) \\ \sin H \quad &= \sin \varphi_1 \sin D + \cos \varphi_1 \cos D \cos (\tau + \Delta\alpha) \end{aligned}$$

Будемъ дифференцировать эти уравненія и по смыслу нашего вопроса будемъ считать при этомъ дифференцированіи за перемѣнныя величины H, K и τ. Тогда два первыя изъ этихъ уравненій дадутъ

$$- \sin H \sin K . dH + \cos H \cos K . dK = \cos \varphi_1 \cos (\tau + \Delta\alpha) . d\tau$$
$$- \sin H \cos K . dH - \cos H \sin K . dK = \cos \varphi_1 \sin D \sin (\tau + \Delta\alpha) . d\tau$$

опредѣляя отсюда dH и dK, находимъ

$$- \sin H . dH = [\cos \varphi_1 \sin K \cos (\tau + \Delta\alpha) + \cos \varphi_1 \sin D \cos K \sin (\tau + \Delta\alpha)]\, d\tau$$
$$\cos H . dK = [\cos \varphi_1 \cos K \cos (\tau + \Delta\alpha) - \cos \varphi_1 \sin K \sin D \sin (\tau + \Delta\alpha)]\, d\tau$$

Для опредѣленія дифференціаловъ S и σ обратимся къ уравненіямъ (323), которыя послѣ дифференцированія дадутъ

$$\sin \sigma . dS + S . \cos \sigma . d\sigma = 0$$
$$\cos \sigma . dS - S . \sin \sigma . d\sigma = \frac{n}{15} \cdot d (\tau - \lambda)$$

изъ этихъ уравненій находимъ

$$dS = \quad \frac{n}{15} \cdot \cos \sigma . d (\tau - \lambda)$$
$$S . d\sigma = - \frac{n}{15} \cdot \sin \sigma . d (\tau - \lambda)$$

Наконецъ для опредѣленія du обратимся къ уравненіе (328) и, отвергая въ немъ всегда малый членъ $(r_1 + r') \rho_0 \sin H$, получаемъ

$$du = \frac{r_1 r'}{r} \cdot \frac{m}{\cos^2 b}\, db$$

но такъ какъ b не превышаетъ нѣсколькихъ минутъ, то примемъ

$$du = \frac{r_1 r'}{r} \cdot m . db$$

Внося найденныя выраженія дифференціаловъ dH, dK, dS, $d\sigma$ и du въ уравненіе (331), легко получимъ

(333)
$$\begin{aligned} \cos H \cos (\theta' - K)\, d\rho_0 = - \rho_0 \cos \varphi_1 [\sin \theta' \cos (\tau + \Delta\alpha) + \sin D \cos \theta' \sin (\tau + \Delta\alpha)]\, d\tau \\ + \frac{n}{15} \cos (N' - \theta')\, d\, (\tau - \lambda) - \frac{r_1 r'}{r} \cdot db \end{aligned}$$

39. Этимъ уравненіемъ представляется зависимость погрѣшности опредѣляемаго параллакса отъ погрѣшности db измѣреннаго разстоянія краевъ Венеры и Солнца, погрѣшности $d\tau$ времени наблюденія и погрѣшности долготы того мѣста, въ которомъ производилось измѣреніе. Разсматривая это выраженіе видимъ, что производитель при $d\rho_0$, т. е. величина $\cos H . \cos (\theta' - K)$ имѣетъ значительное вліяніе на точность

опредѣленія паравлакса солнца изъ наблюденій прохожденія Венеры, ибо этотъ множитель войдетъ дѣлителемъ во всѣ члены выраженія $d\varrho_0$. Опредѣленіе параллакса будетъ тѣмъ точнѣе чѣмъ болѣе будетъ, ceteris paribus, этотъ дѣлитель. За наибольшее значеніе множителя $\cos H . \cos (\theta' - K)$ нужно считать величины ± 1. Но такого значенія произведеніе $\cos H . \cos (\theta' - K)$ достигаетъ только тогда, когда одновременно будетъ

$$\cos H = 1 \qquad \text{и} \qquad \cos (\theta' - K) = \pm 1$$

другими словами наибольшаго значенія достигаотъ упомянутое произведеніе въ самомъ горизонтѣ. Но на горизонтѣ или вблизи его наблюденія не могутъ быть точны, а потому для наблюденія прохожденія придется выбирать тѣ точки земли, для которыхъ произведеніе $\cos H . \cos (\theta' - K)$ разнится отъ единицы.

Если $\cos H \cos (\theta' - K) < \pm 1$, то каждой опредѣленной величинѣ этого произведенія соотвѣтствуетъ на земной поверхности цѣлый рядъ точекъ или непрерывная кривая, на которой въ то время какъ $\cos H$ измѣняется въ предѣлахъ 1 и a, измѣненіе $\cos (\theta' - K)$ происходитъ въ предѣлахъ ± 1 и $\pm a$, смотря по тому, остается ли разсматриваемая функція равною $+ a$ или $- a$. Но значенія равныя по величинѣ и противуположныя по знаку множитель $\cos H . \cos (\theta' - K)$ получаетъ въ двухъ полушаріяхъ земли въ сѣверномъ и южномъ. Поэтому заключаемъ, что если сочетаемъ для вычисленія солнечнаго параллакса наблюденія произведенныя на соотвѣтствующихъ кривыхъ расположенныхъ одна въ сѣверномъ, другая въ южномъ полушаріи, то при такой комбинаціи неизбѣжныя ошибки наблюденій будутъ имѣть противуположное вліяніе на опредѣляемую величину.

Посмотримъ теперь къ чему приводится выполненіе условія $\cos (\theta' - K) = \pm 1$. Для верхняго знака $\theta' = K$, а для нижняго $\theta' = K + 180^\circ$.

Если назовемъ чрезъ θ_0 уголъ положенія точки прикосновенія краевъ Венеры и Солнца считаемый относительно круга высоты проведеннаго черезъ центръ солнца, то

$$\theta_0 = \theta' - K$$

ибо K, какъ это видно изъ уравненій (332), есть параллактическій уголъ при центрѣ Солнца. И такъ условіе

$$\cos (\theta' - K) = \pm 1$$

приводится къ $\cos \theta_0 = \pm 1$, или къ $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = 180$; но вообще условіе

$$\cos H . \cos \theta_0 = a$$

представляетъ собою уравненіе извѣстнаго числа кривыхъ линій на поверхности земли и если вмѣстѣ съ этимъ условіемъ существуютъ

$$\cos \theta_0 = \pm 1$$

то кривыя характеризующіяся уравненіемъ $\cos H . \cos \theta_0 = a$ мы будемъ называть, слѣдуя Гавсеву, *главными кривыми высоты* (Haupt höhencurven) и заключимъ, что: *изъ каждой точки главной кривой высоты во время вступленія или выступленія Венеры на солнечный дискъ (точнѣе, во время прикосновенія краевъ) центры Солнца и Венеры представляются наблюдателю въ одномъ кругѣ высоты.*

Такъ какъ для всякой величины H условіе $\cos\theta_0 = \pm 1$ соотвѣтствуетъ наибольшему значенію функціи $\cos H . \cos\theta_0$, то отсюда слѣдуетъ, что независимо отъ величины H, мѣста земной поверхности, выбранныя наиболѣе благопріятно для наблюденій прохожденія съ цѣлію изслѣдованія солнечнаго параллакса, будутъ тѣ, изъ которыхъ въ моментъ прикосновенія краевъ или вообще въ моментъ наблюденія центры Венеры и Солнца будутъ находиться въ одномъ кругѣ высоты.

Также функція $\cos H . \cos\theta_0$ показываетъ, что изъ наблюденій производенныхъ въ тѣхъ мѣстахъ земли, для которыхъ $\theta_0 = 90^\circ$ или $\theta_0 = 270^\circ$. солнечный параллаксъ вовсе не можетъ быть опредѣленъ.

Возвратимся опять къ условію $\cos H . \cos\theta_0 = \pm 1$. Если оно выполняется, то необходимо должно быть $H = 0$ при $\theta_0 = 0$, или при $\theta_0 = 180^\circ$. Не трудно видѣть, что эти условія удовлетворятся въ тѣхъ точкахъ земной поверхности, въ которыхъ конусъ полутѣни Венеры касается поверхности земли. Въ самомъ дѣлѣ точки прикосновенія конуса полутѣни лежатъ на восточно-западной границѣ того пространства земли, съ котораго можетъ быть наблюдаемо прохожденіе. Для всѣхъ точекъ этой кривой $H = 0$. Самыя точки прикосновенія конуса полутѣни и земли мы опредѣляемъ подъ условіемъ представленнымъ уравненіемъ (261), которое если пренебрегаемъ сжатіемъ земли приводится къ

$$\tan\theta' = \tan K.$$

что удовлетворяется или при $\theta' = K$, или при $\theta' = 180 + K$. Отсюда заключаемъ, что каждая изъ главныхъ кривыхъ высоты, опредѣляемая подъ условіемъ $\cos H . \cos\theta_0 = \pm 1$, выходитъ изъ одной изъ точекъ прикосновеній конуса полутѣни Венеры съ землею, а потому число кривыхъ главной высоты равно числу точекъ прикосновенія упомянутыхъ поверхностей.

Посмотримъ теперь, какимъ способомъ можетъ быть найдено положеніе на земной поверхности кривыхъ линій главной высоты.

Если примемъ, какъ это уже дѣлали, $l_0 = 1$ и $L = K$, то уравненія (325) обратятся въ

$$(334) \quad \begin{aligned} u . \cos\theta_0 &= S . \cos(W' - \sigma) - m\rho_0 \cos H \\ u . \sin\theta_0 &= S \sin(W' - \sigma) \end{aligned}$$

Такъ какъ разсматриваемыя кривыя должны быть опредѣлены при условіи $\cos\theta_0 = \pm 1$, то послѣднее уравненіе при выполненіи этого условія даетъ

$$\sin(W' - \sigma) = 0$$

что удовлетворится при $W' - \sigma = 0$ и при $W' - \sigma = 180^\circ$. Слѣдовательно совмѣстно съ условіемъ $\cos\theta_0 = \pm 1$ должно удовлетворяться для разсматриваемыхъ кривыхъ условіе $\cos(W' - \sigma) = \pm 1$. И такъ первое изъ уравненій (334), для опредѣляемыхъ кривыхъ принимаетъ видъ

$$\pm u = \pm S - m\rho_0 \cos H$$

для верхняго знака имѣемъ

$$u = S - m\rho_0 \cos H$$

и для нижняго

$$u = S + m\rho_0 \cos H$$

слѣдовательно оба случая заключаются въ формѣ

$$u = S \pm m\rho_0 \cos H \qquad (335)$$

Собственно говоря, разсматривая первое изъ уравненій (334), мы имѣемъ четыре отдѣльные случая. Въ самомъ дѣлѣ, при совмѣстномъ существованіи условій $\cos \theta_0 = \pm 1$ и $\cos(W' - \sigma) = \pm 1$ эти четыре случая мы будемъ имѣть, соединяя сначала значеніе $\cos \theta_0 = +1$ съ двумя значеніями $\cos(W' - \sigma) = \pm 1$, а потомъ значеніе $\cos \theta_0 = -1$ съ тѣми же двумя значеніями $\cos(W' - \sigma)$. Отъ этихъ сочетаній мы получимъ такія четыре уравненія

$$+u = +S - m\rho_0 \cos H; \qquad -u = +S - m\rho_0 \cos H$$
$$+u = -S - m\rho_0 \cos H; \qquad -u = -S - m\rho_0 \cos H$$

Но такъ какъ u и S суть величины существенно положительныя, то уравненія

$$u = -S - m\rho_0 \cos H \quad \text{и} \quad -u = +S - m\rho_0 \cos H$$

должны быть отвергнуты; а остальныя два уравненія заключаются въ формѣ (335).

Такимъ образомъ, если будемъ измѣнять H въ предѣлахъ 0° и 90°, то изъ уравненія (335) получимъ двойной рядъ величинъ S. Первое изъ уравненій (323) даетъ

$$\sin \sigma = \frac{\gamma}{S}$$

откуда для каждой величины S получимъ два значенія σ. Если γ есть положительная величина, то двѣ величины σ лежатъ въ первой полуокружности, для обратнаго случая—во второй.

Примемъ сначала $W' - \sigma = 0$; тогда S опредѣлится изъ уравненія

$$u = S - m\rho_0 \cos H$$

Предположимъ, что числовая величина угла σ опредѣляемаго изъ уравненія

$$\sin \sigma = \frac{\gamma}{S}$$

независимо отъ четверти, въ которой лежитъ этотъ уголъ, есть χ, тогда для положительнаго значенія γ, величины σ найденныя изъ этого уравненія будутъ

$$\sigma = \chi \quad \text{и} \quad \sigma = 180^\circ - \chi$$

а такъ какъ мы разсматриваемъ случай $W' - \sigma = 0$, то для него

$$W' = \chi \quad \text{и} \quad W' = 180^\circ - \chi$$

Что касается до t, то такъ какъ $t = \tau - \lambda$, то общее выраженіе для t найдется по второму изъ уравненій (323) въ формѣ

$$t = \mu + \frac{15}{n} \cdot S \,.\, \cos \sigma$$

что въ примѣненіи къ нашему случаю даетъ

$$t = \mu + \frac{15}{n} S \,.\, \cos \chi, \qquad t = \mu - \frac{15}{n} S \,.\, \cos \chi$$

Если γ есть отрицательная величина, то

$$\sigma = 180^\circ + \chi \quad \text{и} \quad \sigma = 360^\circ - \chi$$

а потому для случая $W' - \sigma = 0$ имѣемъ

$$W' = 180^\circ + \chi, \qquad W' = 360^\circ - \chi$$

$$t = \mu - \frac{15}{n} S . \cos\chi; \qquad t = \mu + \frac{15}{n} S \cos\chi$$

Если примемъ теперь $W' - \sigma = 180^\circ$, то S опредѣлится изъ уравненія

$$u = S + m\rho_0 \cos H$$

и для положительнаго γ будемъ имѣть

$$\sigma = \chi; \qquad \sigma = 180^\circ - \chi$$

$$W' = 180^\circ + \chi \qquad W' = 360^\circ - \chi$$

$$t = \mu + \frac{15}{n} S \cos\chi; \qquad t = \mu - \frac{15}{n} S \cos\chi$$

Для отрицательнаго γ получимъ

$$\sigma = 180^\circ + \chi \qquad \sigma = 360^\circ - \chi$$

$$W' = \chi \qquad W' = 180^\circ - \chi$$

$$t = \mu - \frac{15}{n} \cdot S \cos\chi; \qquad t = \mu + \frac{15}{n} \cdot S . \cos\chi$$

И такъ мы видимъ, что для случая положительнаго, равно какъ и для случая отрицательнаго γ существуютъ четыре вѣтви кривой главной высоты.

Если W' и t найдено, то вычисленіе координатъ точекъ разсматриваемыхъ кривыхъ не представляетъ никакой трудности. Замѣтимъ, что если $L = K$, то $W' = W$, а слѣдовательно

$$K = N' - W$$

имѣя это, положимъ въ уравненіяхъ (246)

(336)
$$\begin{aligned} \cos P . \sin Q &= \sin H \\ \cos P . \cos Q &= \cos H \cos (N' - W) \\ \sin P \quad &= \cos H \sin (N' - W) \end{aligned}$$

и опредѣлимъ Q подъ тѣмъ условіемъ, чтобы $\cos P$ былъ всегда положительною величиною. Послѣ этого уравненія (246) приведутся къ виду

(337)
$$\begin{aligned} \cos\varphi_1 \sin(\tau + \Delta\alpha) &= \sin P \\ \cos\varphi_1 \cos(\tau + \Delta\alpha) &= \cos P \sin (Q - D) \\ \sin\varphi_1 \quad &= \cos P \cos (Q - D) \end{aligned}$$

если φ_1 и τ вычислены изъ этихъ уравненій, то будетъ извѣстна и другая координата каждой изъ точекъ разсматриваемыхъ кривыхъ, ибо $\lambda = \tau - t$.

40. Между фазами всякаго затмѣнія особаго вниманія заслуживаетъ наибольшій фазъ. Опредѣленіе кривой линіи главной высоты для наибольшаго фаза, т. е. опре-

дѣленіе той кривой линіи, изъ точекъ которой при различныхъ высотахъ солнца центры Солнца и Венеры въ моментъ наибольшаго фаза будутъ находиться въ одномъ кругѣ высоты, представляетъ нѣкоторыя особенности.

Кривая линія наибольшаго фаза на горизонтѣ имѣетъ двѣ точки аналогичныхъ точкамъ прикосновенія конуса полутѣни и земли. Въ этихъ двухъ точкахъ ось конуса тѣни въ первый и послѣдній разъ касается земной поверхности. Поэтому для наибольшаго фаза могутъ существовать только двѣ кривыхъ главной высоты.

Такъ какъ для кривой линіи наибольшаго фаза на горизонтѣ u есть перемѣнная величина, то теперь мы должны разсматривать ее какъ неизвѣстную.

Чтобы имѣть условіе наибольшаго фаза въ возможно простой формѣ, мы сдѣлаемъ нѣкоторыя только приближенныя къ истинѣ положенія. Въ уравненіи (265_*) мы примемъ $f = 0$ и $\delta = D$, послѣ этого вмѣсто $\cos\varphi_1 \cos\tau$ и $\cos\varphi_1 \sin\tau$ внесемъ изъ уравненій (246) ихъ величины, полагая предварительно въ этихъ уравненіяхъ $\Delta\alpha = 0$. Послѣ этихъ преобразованій уравненіе (265_*) приметъ видъ

$$\left[\frac{n}{\varkappa . m\rho_0} + \cos H \sin D \sin W - \sin H \cos D \sin N'\right] \cos\psi$$
$$+ \left[\cos H \sin D \cos W - \sin H \cos D \cos N\right] \sin\psi = 0.$$

Принимая потомъ $d = 1$, помножимъ второе изъ уравненій (318) на $\cos N'$ и вычтемъ изъ произведенія третье уравненіе умноженное на $\sin N'$, тогда получимъ

$$u . \sin\psi = -\gamma + m\rho_0 \cos H . \sin W$$

гдѣ, какъ прежде, $W = N' - K$ и $\psi = \theta' - N'$. Послѣднее даетъ

$$u = \frac{m\rho_0 \cos H . \sin W - \gamma}{\sin\psi}$$

Замѣтимъ, что такъ какъ $\theta_0 = \theta' - K$, то $\theta_0 = \psi + W$ Но для каждой кривой главной высоты $\theta_0 = 0^\circ$ или $\theta_0 = 180^\circ$, слѣдовательно для нашего случая $W = -\psi$, или $W = 180^\circ - \psi$. Подставляя эти величины въ преобразованное теперь условіе наибольшаго фаза, получимъ какъ для $W = -\psi$, такъ и для $W = 180^\circ - \psi$ выраженіе

$$\left[\frac{n}{\varkappa . m\rho_0} - \sin H \cos D \sin N'\right] \cos\psi - \sin H \cos D \cos N' \sin\psi = 0$$

откуда

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\dfrac{n}{\varkappa . m\rho_0} - \sin H \cos D \sin N'}{\sin H . \cos D . \cos N'} \tag{338}$$

что касается до u, то выраженія его для двухъ разсматриваемыхъ случаевъ будутъ различны. Очевидно что для $W = -\psi$

$$u = -\frac{m\rho_0 \cos H \sin\psi + \gamma}{\sin\psi} \tag{339}$$

а для $W = 180^\circ - \psi$

$$u = \frac{m\rho_0 \cos H . \sin\psi - \gamma}{\sin\psi} \tag{339_*}$$

Хотя ψ опредѣляется по тангенсу, по сомнѣнія на счетъ четверти, въ которой лежитъ этотъ уголъ, быть не можетъ, ибо для ψ должно быть взято то значеніе, при которомъ u будетъ положительно. Если u и ψ опредѣлены, то извѣстно также и W, ибо $W = -\psi$, или $W = 180^\circ - \psi$. Что касается до σ, то и оно легко вычисляется. Въ самомъ дѣлѣ, для разсматриваемыхъ нами теперь кривыхъ линій должны удовлетворяться уравненія (334) при условіи $\theta_0 = 0^\circ$, или $\theta_0 = 180^\circ$. Такимъ образомъ по второму изъ этихъ уравненій заключаемъ, что

$$W - \sigma = 0^\circ, \quad \text{или} \quad W - \sigma = 180^\circ$$

а это въ связи съ предыдущимъ даетъ

$$\sigma = -\psi$$

послѣ чего по второму изъ уравненій (323) находимъ

(340) $$t = \mu + \frac{15}{n} S . \cos \psi$$

исключая отсюда S посредствомъ перваго изъ уравненій (323), которое для нашего случая принимаетъ видъ

$$- S . \sin \psi = \gamma$$

находимъ

(340_*) $$t = \mu - \frac{15}{n} \gamma . \operatorname{cotg} \psi$$

Если величины H, W и t извѣстны, то координаты точекъ искомыхъ кривыхъ линій получатся по уравненіямъ (336) и (337).

41. Во всемъ предыдущемъ, говоря о функціи $\cos H . \cos \theta_0$, мы всегда имѣли въ виду только тотъ случай, когда $\cos \theta_0 = \pm 1$, т. е. тотъ случай, въ которомъ для данной высоты солнца, для данной величины $\cos H$, эта функція достигаетъ положительнаго или отрицательнаго maximum. Понятно однако, что и при другихъ величинахъ $\cos \theta_0$ эта функція можетъ достигать той же опредѣленной величины, но тогда долженъ измѣняться $\cos H$. Въ самомъ дѣлѣ, при данной величинѣ $\cos H$, напр. при $\cos H = b$ и при $\cos \theta_0 = \pm 1$ функція $\cos H . \cos \theta_0 = \pm b$. Положимъ, что $\cos \theta_0$ не равенъ единицѣ, но меньше ея и требуется, чтобы при этомъ условіи функція $\cos H . \cos \theta_0$ сохраняла прежнюю числовую величину b. Для этого необходимо, чтобы H было менѣе чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ, тогда $\cos H$ увеличится и произведеніе $\cos H . \cos \theta_0$ можетъ сохранить числовую величину b, хотя $\cos \theta_0$ и будетъ отлично отъ единицы.

Такъ какъ не всегда можно выбрать для наблюденій мѣста земной поверхности, въ которыхъ $\cos \theta_0 = \pm 1$, то очень важно показать какъ опредѣляются тѣ мѣста, въ которыхъ функція $\cos \theta_0 \cos H$ будетъ имѣть данную опредѣленную величину для различныхъ значеній $\cos \theta_0$. Понятно, что если на всей кривой линіи соединяющей эти мѣста функція $\cos H . \cos \theta_0$ будетъ сохранять ту величину, которую она имѣетъ въ опредѣленной точкѣ кривой линіи главной высоты, то наблюденія произведенныя въ какой либо изъ точекъ этой новой кривой будутъ столько же благопріятны для опредѣленія солнечнаго параллакса, какъ и въ данной точкѣ кривой главной высоты.

Поэтому эти новыя кривыя линіи Гансонъ называетъ равносильными или *изостеническими* (Isosthenische curve).

Каждому опредѣленному значенію функціи $\cos\theta_0 \cos H$, имѣющему мѣсто при $\cos\theta_0 = \pm 1$ соотвѣтствуетъ своя изостеническая кривая, на которой произведеніе $\cos\theta_0 \cos H$ сохраняетъ свою величину, хотя $\cos\theta_0$ измѣняется. Поэтому условіе, подъ которымъ должны быть опредѣлены изостеническія кривыя, выражается слѣдующимъ образомъ. Если для данной высоты солнца H_1 произведеніе $\cos H \cos\theta_0$ на кривой главной высоты имѣетъ величину b и при этомъ вообще для кривой главной высоты $\cos\theta_0 = \pm 1$, то это значитъ, что $\pm \cos H_1 = b$. На изостенической кривой произведеніе $\cos H . \cos\theta_0$ для какаго либо значенія $\cos\theta_0$, отличнаго отъ единицы, также должно имѣть числовую величину b, а потому для всей разсматриваемой изостенической кривой должно существовать уравненіе

$$\cos H . \cos\theta_0 = \pm \cos H_1 \tag{341}$$

Таково условіе, подъ которымъ должна быть вычислена та или другая изостеническая кривая линія. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что для разсматриваемой точки кривой главной высоты H_1 есть данная постоянная величина, а для изостенической кривой, проходящей чрезъ эту точку кривой наибольшей высоты, такая величина H_1 представляетъ собою наибольшую высоту солнца между тѣми высотами, которыя будутъ наблюдаться въ различныхъ точкахъ разсматриваемой изостенической кривой. Введемъ найденное условіе въ уравненія (334), но предварительно представимъ ихъ въ другой формѣ. Помножимъ первое изъ нихъ на $\cos\theta_0$, второе на $\sin\theta_0$ и сложивъ произведенія, получимъ

$$u = S \cos(W' - \sigma - \theta_0) - m\rho_0 \cos H \cos\theta_0$$

помножимъ первое изъ тѣхъ же уравненій на $\sin\theta_0$ и вычтемъ произведеніе изъ втораго умноженнаго на $\cos\theta_0$, тогда будемъ имѣть

$$0 = S . \sin(W' - \sigma - \theta_0) + m\rho_0 \cos H . \sin\theta_0$$

полагая въ этихъ уравненіяхъ для краткости

$$W' - \sigma - \theta_0 = \chi$$

получимъ

$$\left.\begin{aligned} u &= S . \cos\chi - m\rho_0 \cos H . \cos\theta_0 \\ 0 &= S . \sin\chi + m\rho_0 \cos H . \sin\theta_0 \end{aligned}\right\} \tag{342}$$

Возвышая уравненіе (341) въ квадратъ, находимъ

$$\cos^2 H - \cos^2 H . \sin^2\theta_0 = \cos^2 H_1$$

или

$$\cos H . \sin\theta_0 = \pm\sqrt{\cos^2 H - \cos^2 H_1}$$

полагая здѣсь

$$\frac{\cos H_1}{\cos H} = \cos\eta$$

имѣемъ

$$\cos H . \sin\theta_0 = \pm \cos H_1 \operatorname{tang}\eta$$

послѣ чего уравненія (342) представляются въ формѣ

$$(343) \qquad \begin{aligned} S.\sin\chi &= \pm m\rho_0 \cos H_1 . \operatorname{tang}\eta \\ S.\cos\chi &= u \pm m\rho_0 \cos H_1 \end{aligned}$$

Эти уравненія служатъ для опредѣленія S и χ. Если S извѣстно, то σ и t могутъ быть опредѣлены по общимъ уравненіямъ (323), которыя даютъ

$$(344) \qquad \sin\sigma = \frac{\gamma}{S}; \qquad t = \mu + \frac{15}{n} \cdot S.\cos\sigma$$

Такъ какъ каждой величинѣ $\sin\sigma$ соотвѣтствуютъ двѣ величины σ, то для каждой величины S находимъ такимъ образомъ двѣ величины t принадлежащія различнымъ изостеническимъ кривымъ. Наконецъ раздѣливъ уравненія

$$\cos H.\sin\theta_0 = \pm \cos H_1 . \operatorname{tang}\eta$$
$$\cos H.\cos\theta_0 = \pm \cos H_1$$

одно на другое, находимъ

$$\operatorname{tang}\theta_0 = \pm \operatorname{tang}\eta$$

что удовлетворится положеніями

$$\theta_0 = \eta; \qquad \theta_0 = 180^\circ - \eta; \qquad \theta_0 = 180^\circ + \eta; \qquad \theta_0 = 360^\circ - \eta$$

Слѣдовательно для каждой величины η находимъ четыре величины θ_0, а такъ какъ каждой величинѣ S соотвѣтствуютъ двѣ величины σ, то слѣдовательно для каждаго S, находимъ восемь значеній W изъ уравненія

$$W = \chi + \sigma + \theta_0$$

Если величины H, W и t найдены, то координаты φ и λ точекъ искомыхъ кривыхъ опредѣлятся изъ уравненій (336) и (337).

42. О величинѣ χ мы можемъ составить себѣ понятіе a priori. Для всякой изостенической кривой H измѣняется отъ 0° до H_1, а потому по уравненію

$$\frac{\cos H_1}{\cos H} = \cos\eta$$

заключаемъ, что η измѣняется также отъ 0° до H_1; слѣдовательно maximum значенія χ, какъ показываетъ уравненіе (343), найдется изъ выраженія

$$\sin\chi = \pm \frac{m\rho_0}{S} \sin H_1$$

Для времени вступленія Венеры на дискъ Солнца и выступленія съ него S близко къ единицѣ, а потому, помня, что приблизительно $m\rho_0 = 0.0277$, заключаемъ, что maximum значенія χ есть $\pm 1^\circ\ 35'$ (при этомъ для вычисленія maximum χ мы полагаемъ $H_1 = 90^\circ$). Но эта наибольшая величина χ все таки такъ еще мала, что можемъ считать $\cos\chi = 1$, а при этомъ второе изъ уравненій (343) даетъ

$$S = u \pm m\rho_0 \cos H_1$$

Принимая это, не трудно доказать, что: *всякая изостеническая кривая есть дуга круга, радіусъ котораго, измѣренный по поверхности сферы, есть* H_1 *или*

$180^0 - H_1$, смотря по тому будетъ ли измѣряться этотъ радіусъ отъ того или отъ другаго полюса этого круга.

Чтобы убѣдиться въ справедливости этого положенія, достаточно видѣть, что на поверхности земли для всякой изостенической кривой и внѣ ея существуетъ точка, разстояніе которой отъ всякой точки изостенической кривой, равно или H_1, или $180^0 - H_1$, считая по поверхности земли принятой за поверхность сферы. Назовемъ чрезъ Φ и L широту и долготу какой либо точки земной поверхности. Широту и долготу точки изостенической кривой означимъ чрезъ φ и λ. Назовемъ разстояніе этихъ двухъ точекъ считаемое по большему кругу на поверхности земли чрезъ ζ. Тогда изъ сферическаго треугольника между этими точками и полюсомъ земнаго экватора будемъ имѣть

$$\cos\zeta = \sin\Phi\sin\varphi + \cos\Phi\cos\varphi\cos(L-\lambda)$$

Пусть T, H_0, K_0 будутъ имѣть для точки (Φ, L) то же значеніе, какое имѣютъ τ, H и K для точки (φ, λ) изостенической кривой. Если для изостенической кривой существуютъ извѣстныя уравненія

$$\begin{aligned}\cos\varphi\sin(\tau+\Delta\alpha) &= \cos H\sin K\\ \cos\varphi\cos(\tau+\Delta\alpha) &= \cos D\sin H - \sin D\cos H.\cos K\\ \sin\varphi &= \sin D\sin H + \cos D\cos H.\cos K\end{aligned} \qquad (345)$$

то для точки (Φ, L) подобно этому имѣемъ

$$\begin{aligned}\cos\Phi\sin(T+\Delta\alpha) &= \cos H_0\sin K_0\\ \cos\Phi\cos(T+\Delta\alpha) &= \cos D\sin H_0 - \sin D\cos H_0\cos K_0\\ \sin\Phi &= \sin D\sin H_0 + \cos D\cos H_0\cos K_0\end{aligned} \qquad (346)$$

Мы знаемъ, что $\lambda = \tau - t$, но при $S = 1$ мы видимъ изъ уравненій (344), что t есть постоянная величина для всей изостенической кривой. Поэтому для точки (Φ, L) подобно предыдущему имѣемъ

$$L = T - t$$

Слѣдовательно

$$L - \lambda = T - \tau$$

а потому

$$\cos\zeta = \sin\Phi\sin\varphi + \cos\Phi\cos\varphi\cos(L-\lambda)$$

Если помножимъ первое изъ уравненій (345) на первое изъ уравненій (346), перемножимъ подобнымъ же образомъ вторыя изъ упомянутыхъ уравненій и произведенія сложимъ, тогда получимъ

$$\begin{aligned}\cos\Phi\cos\varphi.\cos(T-\tau) = {} & \cos H.\cos H_0\sin K.\sin K_0 + \cos^2 D\sin H.\sin H_0\\ & - \sin D.\cos D\sin H_0\cos H.\cos K\\ & - \sin D.\cos D\sin H.\cos H_0\cos K_0\\ & + \sin^2 D\cos H.\cos H_0\cos K.\cos K_0\end{aligned}$$

или

$$\cos\Phi\cos\varphi\cos(L-\lambda)=\cos H.\cos H_0\cos(K_0-K)$$
$$+\cos^2 D\,[\sin H.\sin H_0-\cos H.\cos H_0\cos K.\cos K_0]$$
$$-\sin D\cos D\,[\sin H_0\cos H\cos K+\sin H\cos H_0\cos K_0]$$

помножая третье изъ тѣхъ же уравненій (345) на третье изъ уравненій (346), имѣемъ

$$\sin\Phi\sin\varphi=\sin^2 D\sin H\sin H_0+\sin D\cos D\cos H\sin H_0\cos K$$
$$+\sin D.\cos D\sin H\cos H_0\cos K_0+\cos^2 D\cos H\cos H_0\cos K\cos K_0$$

складывая это съ предыдущимъ, находимъ

$$\cos\zeta=\sin H_0\sin H+\cos H_0\cos H\cos(K_0-K)$$

Если выберемъ точку (Φ, L) такъ, чтобы для нея

$$H_0=0^\circ \quad \text{и} \quad K_0=\theta_0+K$$

тогда вслѣдствіе уравненія (341), которымъ характеризуется изостеническая кривая, предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$\cos\zeta=\mp\cos H_1$$

откуда заключаемъ, что

$$\zeta=H_1, \quad \text{или} \quad \zeta=180^\circ-H_1$$

Этимъ и подтверждается высказанное выше положеніе. Что касается до условій

$$H_0=0^\circ \quad \text{и} \quad K_0=\theta_0+K$$

при которыхъ выбирается точка (Φ, L), то ими опредѣляется положеніе центра изостенической кривой. Въ самомъ дѣлѣ мы знаемъ, что вообще

$$W=N'-K=\chi+\sigma+\theta_0$$

но такъ какъ мы приняли выше $\cos\chi=1$, то слѣдовательно считаемъ $\chi=0^\circ$, а потому, обращая вниманіе на условіе $K_0=\theta_0+K$, имѣемъ отсюда

$$K_0=N'-\sigma$$

внося это вмѣстѣ съ условіемъ $H_0=0^\circ$ въ уравненія (346), получимъ три уравненія вида

$$\cos\Phi\sin(T+\Delta\alpha)=\sin(N'-\sigma)$$
$$\cos\Phi\cos(T+\Delta\alpha)=-\cos(N'-\sigma)\sin D$$
$$\sin\Phi=\cos(N'-\sigma).\cos D$$

эти уравненія служатъ для вычисленія T и Φ, если эти величины найдены, то другая координата L искомаго центра опредѣлится по выраженію $L=T-t$.

Такъ какъ величины Φ и L для каждой изостенической кривой различны, то дуги, которыми представляются эти кривыя, не концентричны. Если бы мы стали чертить изостеническія кривыя какъ дуги малыхъ круговъ (изостеническая кривая сдѣлается большимъ кругомъ при $H_1=90^\circ$, но какъ мы видѣли, изъ наблюденій въ такихъ мѣстахъ земли солнечный параллаксъ вовсе не можетъ быть опредѣленъ), то получили бы только приближенныя положенія этихъ кривыхъ, ибо мы доказали, что изостеническія кривыя имѣютъ форму круга только въ томъ предположеніи, что $S=1$ и $\chi=0^\circ$, что только въ извѣстной степени близко къ истинѣ. Если же мы

не хотимъ дѣлать никакаго заключенія a priori о величинѣ χ, то должны будемъ вычисленіе изостеническихъ кривыхъ основать на точныхъ выраженіяхъ служащихъ для этой цѣли.

Мы прослѣдили теперь рѣшеніе всѣхъ главныхъ вопросовъ касающихся предвычисленія для земли вообще прохожденія нижней планеты по Солнцу. Что касается до предвычисленія того же явленія для даннаго мѣста на земной поверхности, то оно можетъ быть выполнено по тѣмъ же самымъ уравненіямъ, по которымъ предвычисляется солнечное затмѣніе для даннаго мѣста на земной поверхности. При этомъ стоитъ только всѣ величины относящіяся къ лунѣ замѣнить соотвѣтствующими величинами относящимися къ нижней планетѣ *).

43. Наконецъ къ разряду затмѣній зависящихъ отъ параллакса относятся еще явленія покрытій звѣздъ и планетъ луною. Наблюденія покрытій звѣздъ приводятъ къ рѣшенію двухъ весьма важныхъ вопросовъ практической Астрономіи. Эти наблюденія даютъ возможность опредѣлять долготы мѣстъ земной поверхности и повѣрять лунныя таблицы. Имѣя въ виду эти два важныя примѣненія наблюденій покрытій, мы считаемъ необходимымъ подробно изложить здѣсь методъ предвычисленія этихъ явленій. Вопросъ о предвычисленіи покрытій звѣздъ луною окончательно разработанъ Бесселемъ и Энке и рѣшенія изложены ими въ мемуарахъ помѣщенныхъ въ журналахъ Astronomische Nachrichten и Berliner Astronomisches Jahrbuch **).

При наблюденіяхъ покрытій звѣздъ луною возможно точно отмѣчаются по часамъ или хронометру какъ моментъ исчезновенія звѣзды за луннымъ дискомъ, такъ и моментъ ея появленія. Понятно, что даже при наблюденіи одного и того же покрытія оба эти момента не могутъ быть опредѣлены одинаково точно. Вообще говоря, всегда болѣе точно наблюдается время вступленія звѣзды, изъ выступленій же наблюдаются болѣе точно тѣ, которыя происходятъ на темномъ краѣ луннаго диска, впрочемъ тоже въ извѣстной степени справедливо и относительно вступленій. Звѣзда, покрываясь темнымъ краемъ луннаго диска, исчезаетъ мгновенно, между тѣмъ какъ при вступленіи на свѣтломъ краѣ блескъ звѣзды постепенно ослабляется, по мѣрѣ ея приближенія къ лунѣ, и явленіе исчезновенія звѣзды становится по этому менѣе интенсивнымъ. Понятно, что тоже имѣетъ мѣсто и при выступленіи звѣзды, но неточность наблюденія этого явленія можетъ зависѣть еще и отъ другой причины, именно отъ неточнаго знанія того мѣста луннаго края, въ которомъ должно произойти выступленіе звѣзды.

Такъ какъ собственнымъ движеніемъ луна перемѣщается по сферѣ небесной по направленію отъ запада къ востоку, то понятно, что при всѣхъ покрытіяхъ имѣющихъ мѣсто до полнолунія всѣ вступленія звѣздъ происходятъ на темномъ краѣ луннаго диска, а выступленія на свѣтломъ. Для покрытій происходящихъ послѣ полнолунія имѣетъ мѣсто обратное.

---

*) Другой способъ предвычисленія прохожденія нижней планеты для даннаго мѣста на земной поверхности можно видѣть въ мемуарѣ Энке «Ueber die Vorausberechnung der Planeten Durchgänge», помѣщенномъ въ Berl. Astr. Jahrbuch für 1842.

**) *Bessel.* Ueber die Vorausberechnung der Sternbedeckungen. 1828. Astr. Nachr. № 145.
Encke. Ueber die Vorausberechnung der Sternbedeck. Berliner Astr. Jahrb. für 1830.
Bessel. Ueber die Vorausberechnung der Sternbedeck. Berliner Astron. Jahrb. für 1831.

Предвычисленіе покрытій заключается въ опредѣленіи моментовъ вступленія и выступленія звѣзды для даннаго мѣста земной поверхности, а также въ опредѣленіи положенія тѣхъ точекъ на краѣ луны, въ которыхъ происходитъ то и другое явленіе. Метода Бесселя предвычисленія покрытій, наиболѣе удобная на практикѣ заключается въ слѣдующемъ.

Пусть точка P (фиг. 18) представляетъ собою полюсъ міра, точки L и S— видимыя положенія центра луны и звѣзды. Если назовемъ чрезъ A и D прямое восхожденіе и склоненіе звѣзды, чрезъ α' и δ' видимыя прямое восхожденіе и склоненіе центра луны, то въ разсматриваемомъ треугольникѣ сторонами будутъ: $90^0 - D$, $90^0 - \delta'$ и σ, гдѣ чрезъ σ означаемъ дугу большаго круга заключающуюся между видимымъ положеніемъ центра луны и звѣздой, на нашемъ чертежѣ $\sigma = SL$. Уголъ въ этомъ треугольникѣ при полюсѣ очевидно будетъ равенъ разности $A - \alpha'$. Означимъ въ томъ же треугольникѣ уголъ при S, т. е. уголъ положенія центра луны при звѣздѣ чрезъ P. При такихъ означеніяхъ разсматриваемый сферическій треугольникъ даетъ

$$\text{(347)}\qquad \begin{aligned} \sin\sigma \,.\, \sin P &= \cos\delta' \sin(A - \alpha') \\ \sin\sigma \,.\, \cos P &= \sin\delta' \cos D - \cos\delta' \sin D \cos(A - \alpha') \\ \cos\sigma &= \sin\delta' \sin D + \cos\delta' \cos D \cos(A - \alpha') \end{aligned}$$

Означимъ геоцентрическія координаты луны соотвѣтствующія введеннымъ видимымъ чрезъ α и δ. Пусть Δ' будетъ разстояніе центра луны отъ мѣста наблюденія и Δ разстояніе той же точки отъ центра земли; пусть r и φ' будутъ разстояніе мѣста наблюденія отъ центра земли и геоцентрическая широта этого мѣста; пусть наконецъ θ будетъ звѣздное время считаемое въ мѣстѣ наблюденія. При такихъ означеніяхъ по уравненіямъ (184) имѣемъ

$$\begin{aligned} \Delta' . \cos\delta' \cos\alpha' &= \Delta \,.\, \cos\delta \cos\alpha - r \,.\, \cos\varphi' \cos\theta \\ \Delta' . \cos\delta' \sin\alpha' &= \Delta \,.\, \cos\delta \sin\alpha - r \,.\, \cos\varphi' \sin\theta \\ \Delta' . \sin\delta' &= \Delta \,.\, \sin\delta - r \,.\, \sin\varphi' \end{aligned}$$

Если условимся принимать въ этихъ уравненіяхъ за начало угловъ считаемыхъ въ плоскости экватора не точку весенняго равноденствія, а пересѣченіе экватора съ кругомъ склоненія разсматриваемой звѣзды, другими словами, если уменьшимъ всѣ углы, считаемые въ плоскости экватора на уголъ A, то предыдущія уравненія примутъ видъ

$$\begin{aligned} \Delta' . \cos\delta' \cos(\alpha' - A) &= \Delta \cos\delta \cos(\alpha - A) - r \,.\, \cos\varphi' \cos(\theta - A) \\ \Delta' . \cos\delta' \sin(\alpha' - A) &= \Delta . \cos\delta \sin(\alpha - A) - r \,.\, \cos\varphi' \sin(\theta - A) \\ \Delta' . \sin\delta' &= \Delta . \sin\delta - r \,.\, \sin\varphi' \end{aligned}$$

Назовемъ горизонтальный экваторіальный параллаксъ луны чрезъ Π и, принимая экваторіальный радіусъ земли за единицу, на основаніи уравненія (171) получимъ

$$\sin\Pi = \frac{1}{\Delta}$$

а потому раздѣливъ предыдущія уравненія на Δ, представимъ ихъ въ формѣ

$$\frac{\Delta'}{\Delta}\cos\delta'\cos(\alpha'-A)=\cos\delta\cos(\alpha-A)-r.\sin\Pi\cos\varphi'\cos(\theta-A)$$
$$\frac{\Delta'}{\Delta}\cos\delta'\sin(\alpha'-A)=\cos\delta\sin(\alpha-A)-r.\sin\Pi\cos\varphi'\sin(\theta-A)$$
$$\frac{\Delta'}{\Delta}\sin\delta'\qquad=\sin\delta-r.\sin\Pi\sin\varphi'$$

Вставляя взятыя отсюда величины $\cos\delta'\cos(\alpha'-A)$; $\cos\delta'\sin(\alpha'-A)$ и $\sin\delta'$ въ два первыя изъ уравненій (347), получимъ

$$\frac{\Delta'}{\Delta}\sin\sigma\sin P=-\cos\delta\sin(\alpha-A)+r.\sin\Pi\cos\varphi'\sin(\theta-A)$$
$$\frac{\Delta'}{\Delta}\sin\sigma\cos P=\cos D\sin\delta-\sin D\cos\delta\cos(\alpha-A)\qquad(348)$$
$$-r.\sin\Pi\,[\sin\varphi'\cos D-\sin D\cos\varphi'\cos(\theta-A)]$$

Что касается до третьяго изъ уравненій (347), то оно служитъ только для опредѣленія четверти, въ которой лежитъ уголъ σ; но такъ какъ въ моментъ начала или конца покрытія видимое разстояніе звѣзды отъ центра луны равно видимому радіусу луны, то на счетъ четверти, въ которой лежитъ уголъ σ сомнѣнія быть не можетъ, а потому третьимъ изъ уравненій (347) далѣе пользоваться мы не будемъ. Назовемъ радіусъ луны выраженный въ линейной мѣрѣ чрезъ R, назовемъ уголъ, подъ которымъ видѣнъ радіусъ луны изъ мѣста наблюденія, чрезъ ρ', а изъ центра земли чрезъ ρ. Пусть въ L (фиг. 19) будетъ находиться центръ луны, въ T центръ земли и въ A мѣсто наблюденія на поверхности земли. Проведя касательныя Aa и $a'T$ изъ мѣста наблюденія и изъ центра земли къ сѣченію поверхности луны плоскостію LAT, изъ составившихся треугольниковъ ALa и TLa' при нашихъ означеніяхъ получимъ

$$\Delta'.\sin\rho'=R\qquad\text{и}\qquad\Delta.\sin\rho=R$$

Слѣдовательно

$$\Delta'\sin\rho'=\Delta\sin\rho;\qquad\frac{\Delta'}{\Delta}\sin\rho'=\sin\rho$$

Но такъ какъ для начала и конца покрытія $\sigma=\rho'$, то, обращая вниманіе на послѣднее уравненіе, дадимъ уравненіямъ (348) видъ

$$\frac{\sin\rho}{\sin\Pi}\sin P=-\frac{\cos\delta.\sin(\alpha-A)}{\sin\Pi}+r.\cos\varphi'\sin(\theta-A)$$
$$\frac{\sin\rho}{\sin\Pi}\cos P=\frac{\cos D\sin\delta-\sin D\cos\delta\cos(\alpha-A)}{\sin\Pi}$$
$$-r\left[\sin\varphi'\cos D-\sin D\cos\varphi'\cos(\theta-A)\right]$$

Легко показать, что отношеніе $\dfrac{\sin\rho}{\sin\Pi}$ есть величина постоянная. Пусть T и T' (фиг. 19) представляютъ собою два положенія центра земли на двухъ различныхъ разстояніяхъ отъ центра луны. Пусть $LT=\Delta$ и $LT'=\Delta_1$, тогда имѣемъ

$$AT = A'T' = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot = \Delta.\sin \Pi = \Delta_1 \sin \Pi_1 = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$ML = \Delta.\sin \rho = \Delta_1 \sin \rho_1 = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

гдѣ ρ_1 и т. д. есть радіусъ луны видимый изъ положенія центра земли въ T' и т. д. Отсюда заключаемъ, что

$$\frac{\sin \rho}{\sin \Pi} = \frac{ML}{AT}$$

Принимая за единицу радіусъ земли и назвавъ радіусъ луны выраженный въ этихъ единицахъ черезъ k, получимъ

$$\frac{\sin \rho}{\sin \Pi} = k$$

по изслѣдованіямъ Гансена $\log k = 9.4360942$. И такъ

$$-k.\sin P = \frac{\cos \delta.\sin(\alpha - A)}{\sin \Pi} - r.\cos \varphi' \sin(\theta - A)$$

(349) $$k.\cos P = \frac{\sin \delta \cos D - \cos \delta.\sin D \cos(\alpha - A)}{\sin \Pi} - r\left[\sin \varphi' \cos D - \sin D \cos \varphi' \cos(\theta - A)\right]$$

Вторыя части этихъ уравненій содержатъ время и явно и въ зависимости отъ координатъ луны. Предположимъ, что для времени T незначительно отдаленнаго отъ времени начала или конца покрытія, напр. для времени геоцентрическаго соединенія луны со звѣздою по прямому восхожденію, четыре функціи

(350) $$\frac{\cos \delta \sin(\alpha - A)}{\sin \Pi}, \quad r.\cos \varphi' \sin(\theta - A),$$
$$\frac{\sin \delta \cos D - \cos \delta \sin D \cos(\alpha - A)}{\sin \Pi}, \quad r\left[\sin \varphi' \cos D - \sin D \cos \varphi' \cos(\theta - A)\right]$$

имѣютъ числовыя величины p, u, q, v. Предположимъ, что время начала или конца покрытія отстоитъ отъ момента T на промежутокъ времени t; тогда если t настолько малъ, что въ теченіи его координаты луны можно считать измѣняющимися пропорціонально времени, то, назвавъ часовыя измѣненія четырехъ предыдущихъ функцій чрезъ p', u', q', v' и предполагая, что t выражено въ часахъ, найдемъ, что четыре упомянутыя функціи для времени начала или конца покрытія будутъ имѣть величины:

$$p + p'.t; \quad u + u'.t; \quad q + q'.t; \quad v + v'.t$$

Внося эти величины въ уравненія (349), возвысимъ эти уравненія въ квадратъ, сложимъ квадраты и получимъ

$$k^2 = [p - u + (p' - u')\,t]^2 + [q - v + (q' - v')\,t]^2$$

Понятно, что это уравненіе справедливо на столько, на сколько вѣрно предположеніе о пропорціональномъ времени измѣненіи координатъ луны въ теченіи промежутка t. Пусть

(351) $$p - u = m.\sin M; \quad q - v = m.\cos M$$
$$p' - u' = n.\sin N; \quad q' - v' = n.\cos N$$

При такихъ означеніяхъ предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$k^2 = m^2 + n^2 . t^2 + 2\,mn . t \cos (M - N)$$

Придавая и вычитая во второй части уравненія по $m^2 . \cos^2 (M - N)$, получимъ

$$k^2 = m^2 . \sin^2 (M - N) + [nt + m . \cos (M - N)]^2$$

положимъ здѣсь

$$m . \sin (M - N) = k . \cos \psi \tag{352}$$

тогда предыдущее уравненіе приведется къ виду

$$k^2 . \sin^2 \psi = [nt + m . \cos (M - N)]^2$$

откуда

$$t = -\frac{m}{n} \cos (M - N) \pm \frac{k}{n} \cdot \sin \psi \tag{353}$$

два знака относятся: одинъ къ началу, а другой къ концу покрытія. Этимъ выраженіемъ рѣшается вопросъ о предвычисленіи времени начала и конца покрытія какой либо звѣзды луною.

Вычисленіе покрытія основанное на этой теоріи должно быть произведено въ слѣдующемъ порядкѣ. Для времени T, за которое будемъ принимать время геоцентрическаго соединенія луны и звѣзды по прямому восхожденію, вычислимъ четыре функціи (350). Если означимъ величины координатъ α и δ соотвѣтствующія времени T чрезъ α_0 и δ_0 и замѣтимъ, что въ первомъ приближеніи можно принять $\sin (\alpha - A)$ за самую дугу, а косинусъ той же разности за единицу, то можемъ считать въ первомъ приближеніи

$$\begin{aligned} p &= \frac{(\alpha_0 - A)}{\sin \Pi_0} \cos \delta_0 = 0\,; \qquad u = r . \cos \varphi' \sin (\theta_0 - A) \\ q &= \frac{(\delta_0 - D) \sin 1''}{\sin \Pi_0}\,; \qquad v = r \left[\sin \varphi' \cos D - \sin D \cos \varphi' \cos (\theta_0 - A)\right] \end{aligned} \tag{354}$$

подъ θ_0 мы разумѣемъ здѣсь звѣздное время, соотвѣтствующее времени геоцентрическаго соединенія звѣзды и луны по прямому восхожденію.

Если означимъ часовыя измѣненія координатъ луны чрезъ $\Delta\alpha_0$ и $\Delta\delta_0$, то, разсматривая предыдущія выраженія, легко убѣдимся, что за функціи p' и q' слѣдуетъ принять

$$p' = \frac{\Delta\alpha_0 . \cos \delta_0 \sin 1''}{\sin \Pi_0}\,; \qquad q' = \frac{\Delta\delta_0 \sin 1''}{\sin \Pi_0} \tag{355}$$

Чтобы получить наконецъ u' и v' будемъ дифференцировать двѣ послѣднія изъ функцій (350) относительно времени входящаго явно. Тогда получимъ

$$du = r . \cos \varphi' \cos (\theta - A) . d\theta$$
$$dv = r . \cos \varphi' \sin D \sin (\theta - A) . d\theta$$

Такъ какъ мы имѣемъ въ виду опредѣлять часовыя измѣненія функцій u и v, то за $d\theta$ должны принимать здѣсь измѣненіе звѣзднаго времени (выраженное въ линейной мѣрѣ) въ продолженіи одного часа средняго времени, слѣдовательно

$$d\theta = 3609^s,\ 86 . 15 . \sin 1''$$

Если назовемъ эту величину чрезъ λ, то $\log \lambda = 9.41916$; слѣдовательно

(356)
$$u' = r\,.\,\lambda\,.\cos\varphi'\,.\cos(\theta_0 - A)$$
$$v' = r\,.\,\lambda\,.\cos\varphi'\,.\sin(\theta_0 - A)\sin D$$

Здѣсь $\theta_0 - A$ представляетъ собою часовой уголъ звѣзды во время T. Если T считается для меридіана эфемеридъ, то вычисляя покрытіе для всякаго другаго меридіана, придется къ T придать со знакомъ долготу этого мѣста считаемую отъ меридіана эфемеридъ.

Для вычисленія функцій u' и v' Бесселемъ составлена особая таблица. Означимъ чрезъ θ_0 выраженное въ дугѣ звѣздное время соотвѣтствующее среднему T; тогда, помня, что измѣненіе звѣзднаго времени въ теченіи средняго часа выраженное въ секундахъ дуги есть 54147".84, найдемъ, что звѣздное время соотвѣтствующее моменту $T + t$ будетъ

$$\theta = \theta_0 + t\,.\,54147'',84$$

откуда

$$\sin(\theta - A) = \sin(\theta_0 - A) + 2\sin(t\,.\,27073{,}92)\cos(\theta_0 - A + t\,.\,27073{,}92)$$
$$\cos(\theta - A) = \cos(\theta_0 - A) - 2\sin(t\,.\,27073{,}92)\sin(\theta_0 - A + t\,.\,27073{,}92)$$

Такъ какъ вторые члены вторыхъ частей этихъ выраженій представляютъ собою измѣненія функцій $\sin(\theta - A)$ и $\cos(\theta - A)$ въ теченіи t часовъ, то часовыя измѣненія тѣхъ же функцій получимъ, раздѣливъ эти вторыя члены на t. Слѣдовательно

(357)
$$u' = r\,.\cos\varphi'\,\frac{2.\sin(t\,.\,27073'',92)}{t}\cos(\theta_0 - A + t\,.\,27073{,}92)$$
$$v' = r\,.\cos\varphi'\sin D\,\frac{2.\sin(t\,.\,27073{,}92)}{t}\sin(\theta_0 - A + t\,.\,27073{,}92)$$

Для вычисленія логарифма множителя $\frac{2}{t}\cdot\sin(t\,.\,27073{,}92)$ Бессель составилъ таблицу расположенную по аргументу t измѣняющемуся въ предѣлахъ $t = 0$ и $t = 1^h,5$. Что касается до произведенія $t\,.\,27073{,}92$, то, означивъ его чрезъ $\varkappa$, Бессель даетъ его въ той же таблицѣ и по тому же аргументу.

Очевидно, что предыдущими выраженіями u' и v' можно пользоваться, начиная только со втораго приближенія. Для перваго же приближенія въ предыдущихъ выраженіяхъ слѣдуетъ принять $t = 0$, тогда вмѣсто производителя $\frac{2}{t}\sin(t\,.\,27073{,}92)$ слѣдуетъ принять $2.27073{,}92\,.\sin 1''$; логарифмъ этого частнаго значенія λ будетъ 9.41916 и выраженія (357) обратятся въ (356).

Если величины p, q, u, v, p', q', v', u' вычислены тѣмъ или другимъ способомъ, то изъ уравненій (351) найдемъ соотвѣтствующія величины m, n, M и N и по нимъ изъ уравненій (352) и (353) вычислимъ ψ и t. Если при вычисленіи ψ окажется, что

$$\frac{m}{k}\sin(M - N) > 1$$

то это будетъ служить признакомъ того, что покрытія разсматриваемой звѣзды не произойдетъ, т. е. луна пройдетъ мимо звѣзды, не покрывъ ее. Надо однако замѣтить, что такое заключеніе не всегда можетъ быть выведено изъ перваго приближенія. Въ самомъ дѣлѣ, если мы въ первомъ приближеніи, принимая измѣненія координатъ луны пропорціональными времени, вводимъ въ опредѣленіе N ошибку, тогда въ нѣкоторыхъ случаяхъ эта ошибка можетъ повести насъ къ невѣрному заключенію касательно существованія покрытія. Поэтому если въ первомъ приближеніи получится $\cos\psi > 1$, то мы опредѣлимъ все таки t по выраженію

$$t = -\frac{m}{n}\cdot\cos(M-N)$$

и принимая эту величину за основаніе втораго приближенія, которое должно рѣшить теперь дѣйствительно ли $\cos\psi$ болѣе единицы, или нѣтъ. Можетъ случиться конечно и обратное,—величина ψ возможная при первомъ приближеніи окажется не возможною во второмъ. Однако всѣ эти случаи могутъ встрѣтиться только тогда, когда во время всего покрытія звѣзда описываетъ за луной очень малую хорду и остается такимъ образомъ вблизи луннаго края.

Остается опредѣлить тѣ точки луннаго края, въ которыхъ произойдетъ начало и конецъ покрытія. Рѣшеніе этого вопроса приводится къ опредѣленію угла P. Если допустимъ, что координаты луны измѣняются въ теченіи малаго промежутка t пропорціонально времени, то четыремъ функціямъ (350), какъ мы видѣли, можно дать форму

$$p+p't,\qquad u+u't,\qquad q+q't,\qquad v+v't$$

и тогда уравненія (349) примутъ видъ

$$-k.\sin P = p - u + (p'-u').t$$
$$k.\cos P = q - v + (q'-v').t$$

Вводя сюда значенія (351), получимъ

$$\begin{aligned}-k.\sin P &= m.\sin M + nt.\sin N\\ k.\cos P &= m.\cos M + nt.\cos N\end{aligned}\qquad(358)$$

кромѣ того мы видѣли, что

$$nt = -m.\cos(M-N) \pm k.\sin\psi$$

Умножимъ и раздѣлимъ послѣдній членъ на $\cos\psi$, тогда, обращая вниманіе на уравненіе (352), легко найдемъ

$$nt = -m.\cos(M-N) \pm m.\sin(M-N).\operatorname{tang}\psi$$

Раздѣливъ уравненія (358) одно на другое и внося въ частное эту величину nt, получимъ

$$-\operatorname{tang} P = \frac{\sin M - \cos(M-N)\sin N \pm \sin(M-N)\sin N \operatorname{tang}\psi}{\cos M - \cos(M-N)\cos N \pm \sin(M-N)\cos N.\operatorname{tang}\psi}$$

что легко приводится къ виду

$$-\operatorname{tang} P = \frac{\cos N\sin(M-N) \pm \sin(M-N)\sin N.\operatorname{tang}\psi}{-\sin N.\sin(M-N) \pm \sin(M-N)\cos N.\operatorname{tang}\psi}$$

или къ виду

$$\tang P = \cotg (N \mp \psi)$$

откуда слѣдуетъ, что

$$P = 270^\circ - (N \mp \psi)$$

это есть величина угла положенія центра луны при звѣздѣ въ моментъ начала или конца покрытія, но точки вступленія и выступленія удобнѣе опредѣлять угломъ положенія звѣзды при центрѣ луны. Если назовемъ уголъ положенія звѣзды при центрѣ луны въ моментъ начала или конца покрытія чрезъ Q, то весьма близко къ истинѣ можемъ допустить, что

$$Q = 180^\circ - P$$

откуда

$$Q = -90^\circ + N \pm \psi$$

гдѣ знакъ $+$ соотвѣтствуетъ началу покрытія, а $-$ концу.

44. Для поясненія изложенной теоріи примѣромъ вычислимъ покрытіе луною Альціоны, наибольшей звѣзды изъ группы Плеядъ. Это покрытіе произойдетъ 30 ноября 1876 года. Мы предвычислимъ явленіе для кіевской обсерваторіи. Въ Nautical Almanac на 1876, въ отдѣлѣ Elements of occultations, стр. 443, находимъ, что геоцентрическое соединеніе луны съ звѣздой η Tauri (Alcyone) произойдетъ 30 ноября 1876 года въ $4^h\, 47^m\, 4^s$ средняго гриничскаго времени. Слѣдовательно среднее кіевское время геоцентрическаго соединенія луны съ Альціоной, или по нашему означенію $T = 6^h\, 49^m\, 5^s.1$; вычисляя соотвѣтствующее этому кіевское звѣздное время, получаемъ $\theta_0 = 23^h\, 28^m\, 39^s.9$. Кромѣ того въ тѣхъ же Elements of occultations находимъ, что геоцентрическое прямое восхожденіе центра луны, а слѣдовательно и звѣзды для момента геоцентрическаго соединенія есть $A = 3^h\, 40^m\, 11^s.68$, склоненіе звѣзды $D = +23^\circ\, 43'\, 34''.6$, склоненіе луны $\delta_0 = +24^\circ\, 28'\, 38''.6$, наконецъ по величинамъ горизонтальнаго параллакса луны даннымъ въ Nautical Almanac для 1876 на стр. 184 находимъ $\Pi_0 = 59'\, 54''.2$. Имѣя всѣ эти данныя, по выраженіямъ (354) вычисляемъ

$$p = 0; \qquad \log q = 9.87643, \qquad \log u = 9.75423_n, \qquad \log v = 9.76759$$

Замѣтимъ при этомъ, что въ выраженіи для q разность $\delta_0 - D$ мы представляемъ въ секундахъ дуги. По величинамъ координатъ луны даннымъ въ Nautical Almanac для каждаго часа средняго времени заключаемъ, что въ нашемъ случаѣ $\Delta\alpha = +2^m\, 34^s.5$; $\Delta\delta = +9'\, 18''.4$. Для вычисленія p' и q' по выраженіямъ (355) эти величины $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ мы также представляемъ въ секундахъ дуги. Такимъ образомъ для нашего случая $\Delta\alpha = +2317''.5$, $\Delta\delta = +558''.4$. Послѣ этого выраженія (355) даютъ

$$\log p' = 9.77195, \qquad \log q' = 9.19137$$

Наконецъ по выраженіямъ (356) находимъ

$$\log u' = 8.88275; \qquad \log v' = 8.77703_n$$

Имѣя это изъ уравненій (351), (352) и (353) имѣемъ

$$M = 73^0\ 37'.9; \qquad \log m = 9.77219$$
$$N = 67^0\ 19'.7; \qquad \log n = 9.74685$$
$$\psi = 76^0\ 13'.7$$
$$t = -0.5788; \qquad t = -1.5284$$

эти величины t выражены, какъ мы видѣли, въ часахъ и десятичныхъ доляхъ часа; первая изъ нихъ соотвѣтствуетъ очевидно времени конца покрытія, а вторая — времени начала. Выражая эти величины t въ часахъ и минутахъ, имѣемъ

$$t = -0^h\ 34^m.7; \qquad t = -1^h\ 31^m.7$$

Такъ какъ искомое время начала и конца покрытія есть $\tau = T + t$, гдѣ подъ t разумѣемъ ту и другую изъ найденныхъ теперь величинъ, то заключаемъ, что начало покрытія Альціоны луною послѣдустъ въ $5^h\ 17^m.4$, а конецъ въ $6^h\ 14^m.4$ средняго кіевскаго времени. Мы видимъ, что время начала покрытія отдалено отъ времени геоцентрическаго соединенія на довольно значительный промежутокъ времени, а потому для вычисленія времени начала явленія слѣдовало бы сдѣлать второе приближеніе, принимая въ основаніе его найденную величину t соотвѣтствующую началу покрытія, но такъ какъ ходъ вычисленія теперь достаточно ясно указанъ нами, то мы ограничимся этимъ и найденныя времена начала и конца покрытія будемъ считать удовлетворительно точно извѣстными. Что касается до опредѣленія точекъ луннаго диска, въ которыхъ произойдетъ начало и конецъ покрытія, то по выраженію

$$Q = N - 90^0 \pm \psi$$

находимъ для начала покрытія $Q = 53^0\ 33'.4$, а для конца $Q = 261^0\ 6'$. Уголъ Q считается отъ круга склоненія, проведеннаго черезъ центръ луны, по направленію отъ сѣвера черезъ востокъ и югъ къ западу.

45. Нельзя не сознаться, что изложенный аналитическій способъ Бесселя требуетъ довольно сложнаго вычисленія для предсказанія каждаго покрытія. Имѣя это въ виду, нельзя не признать практическую пользу геометрическаго построенія предложеннаго профессоромъ Казанскаго Университета М. Ковальскимъ *) для опредѣленія элементовъ покрытія. Впрочемъ попытки получить чисто геометрическое рѣшеніе вопроса были дѣланы и прежде. Указаніе на подобныя рѣшенія можно видѣть между прочимъ въ сочиненіяхъ Шмидта и Герлинга **).

Способъ профессора Ковальскаго имѣетъ еще и ту выгоду, что данныя для него берутся изъ упомянутой выше таблицы Elements et occultations помѣщаемой въ наиболѣе распространенномъ астрономическомъ календарѣ Nautical Almanac. Построеніе какого бы то не было покрытія основано М. Ковальскимъ приблизительно на слѣдующихъ соображеніяхъ.

Назовемъ, какъ прежде, время геоцентрическаго соединенія по прямому восхожденію луны съ покрываемою звѣздою чрезъ T. Въ упомянутой выше таблицѣ дается

*) См. *М. Ковальскій.* О затмѣніяхъ. стр. 123 и слѣд.

**) *Schmidt.* Methode Sonnenfinst. und Sternbedeckungen nach einer orthogr. Projection zu berechnen. 1808.

Gerling. Methodi projectionis orthographicae usum ad calculos parallacticos facilitandos. 1812.

между прочимъ разность склоненій звѣзды и луны въ моментъ ихъ геоцентрическаго соединенія. Означивъ эту разность чрезъ η и будемъ принимать ее положительною, когда склоненіе луны будетъ болѣе склоненія звѣзды и отрицательною въ обратномъ случаѣ. Означимъ чрезъ π, ρ, n и μ экваторіальный параллаксъ луны, ея видимый геоцентрическій радіусъ и часовыя движенія по прямому восхожденію и склоненію имѣющія мѣсто около времени T. Обратимъ среднее гриничское время T въ звѣздное и къ этому послѣднему придадимъ восточную долготу мѣста наблюденія. Такимъ образомъ получимъ звѣздное время геоцентрическаго соединенія, считаемое въ данномъ мѣстѣ. Назовемъ это звѣздное время чрезъ θ. Геоцентрическія склоненіе и прямое восхожденіе луны соотвѣтствующія какому либо опредѣленному моменту, напр. моменту отстоящему отъ геоцентрическаго соединенія на промежутокъ времени τ, означимъ чрезъ δ и α. Пусть наконецъ геоцентрическая широта мѣста наблюденія будетъ φ'. Понятно, что при такихъ означеніяхъ часовой уголъ луны для момента отдаленнаго отъ геоцентрическаго соединенія на промежутокъ времени τ будетъ $\theta - \alpha + \tau$.

Представимъ себѣ двѣ прямоугольныя оси координатъ, проведенныя во касательной плоскости къ сферѣ небесной чрезъ мѣсто разсматриваемой звѣзды. Ось y пусть совпадаетъ съ пересѣченіемъ круга склоненія этой звѣзды съ упомянутою касательною плоскостію, а ось x пусть будетъ проведена черезъ мѣсто звѣзды перпендикулярно къ оси y. Понятно, что геоцентрическія координаты луны относительно такихъ осей для времени $T + \tau$ при нашихъ означеніяхъ будутъ

(359)
$$x = \tau . n . \cos\delta$$
$$y = \eta + \tau . \mu$$

Эти величины представляютъ собою разность прямыхъ восхожденій и склоненій луны и звѣзды для времени $T + \tau$ въ плоскости xy. Къ предыдущимъ величинамъ слѣдуетъ придать теперь измѣненія координатъ, зависящія отъ вліянія параллакса. Если назовемъ чрезъ α' и δ' видимыя изъ мѣста наблюденія координаты луны, соотвѣтствующія времени $T + \tau$, то, какъ извѣстно изъ уравненій (186_2) и (190_2),

$$(\alpha' - \alpha) \sin 1'' = \frac{\rho . \sin\pi \cos\varphi'}{\cos\delta} \sin(\alpha - \theta_1)$$

$$(\delta' - \delta) \sin 1'' = - \rho . \beta . \sin\pi \sin(\gamma - \delta)$$

гдѣ

$$\beta = \frac{\sin\varphi'}{\sin\gamma}; \quad \operatorname{cotg}\gamma = \operatorname{cotg}\varphi' \cos\left(\theta_1 - \frac{\alpha + \alpha'}{2}\right) \sec\left(\frac{\alpha - \alpha'}{2}\right); \quad \theta_1 = \theta + \tau$$

Въ упомянутыхъ уравненіяхъ мы удержали только первые члены, что совершенно достаточно для той цѣли, которую мы теперь имѣемъ въ виду. Условимся при вычисленіи покрытій принимать, какъ прежде, экваторіальный радіусъ земли за единицу. Тогда вездѣ вмѣсто множителя $\rho . \sin\pi$ придется брать просто $\sin\pi$. Послѣ этого предыдущія выраженія представятся въ видѣ

$$(\alpha' - \alpha) \sin 1'' = \sin\pi \cos\varphi' \sec\delta \sin(\alpha - \theta_1)$$
$$(\delta' - \delta) \sin 1'' = - \sin\pi \cos\delta \sin\varphi' + \sin\pi \sin\delta \sin\varphi' \operatorname{cotg}\gamma$$

послѣднему дадимъ видъ

$$(\delta'-\delta)\sin 1''=-\sin\pi\sin\varphi'\cos\delta+\sin\pi\cos\varphi'\sin\delta\cos\left(\theta_1-\frac{\alpha+\alpha'}{2}\right)\sec\frac{\alpha'-\alpha}{2}$$

или

$$(\delta'-\delta)\sin 1''=-\sin\pi\sin\varphi'\cos\delta+\sin\pi\cos\varphi'\sin\delta\cos\left[\theta_1-\alpha-\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right]\sec\frac{\alpha'-\alpha}{2}$$

или наконецъ

$$(\delta'-\delta)\sin 1''=-\sin\pi\left[\sin\varphi'\cos\delta-\sin\delta\cos\varphi'\cos(\theta_1-\alpha)\right]$$
$$+\sin\pi\cos\varphi'\sin\delta\sin(\theta_1-\alpha)\operatorname{tang}\frac{\alpha'-\alpha}{2}$$

Послѣдній членъ весьма малъ въ сравненіи съ двумя предыдущими, а потому, отвергнувъ его, представимъ вліяніе параллакса на прямое восхожденіе и склоненіе луны въ видѣ

$$\alpha'-\alpha=-\pi\,.\cos\varphi'\sec\delta\sin(\theta_1-\alpha)$$
$$\delta'-\delta=-\pi\,.[\sin\varphi'\cos\delta-\sin\delta\cos\varphi'\cos(\theta_1-\alpha)]$$

Если умножимъ разность $\alpha'-\alpha$ на $\cos\delta$ и придадимъ со знакомъ произведеніе къ координатѣ x, а разность $\delta'-\delta$ придадимъ также со знакомъ къ координатѣ y, то очевидно получимъ величины координатъ видимаго изъ мѣста наблюденія положенія луны въ принятой плоскости xy. И такъ если назовемъ отнесенныя къ принятой системѣ осей координаты видимаго положенія луны для времени $T+\tau$ чрезъ x' и y', то получимъ

$$x'=\tau\,.\,n\,.\cos\delta-\pi\,.\cos\varphi'\sin(\theta-\alpha+\tau)\tag{360}$$
$$y'=\eta+\tau\mu-\pi[\sin\varphi'\cos\delta-\cos\varphi'\sin\delta\cos(\theta-\alpha+\tau)]$$

Если покажемъ способъ построенія этихъ выраженій, то тѣмъ самымъ дадимъ возможность нанести для каждаго момента видимое положеніе центра луны на плоскость xy; другими словами, дадимъ возможность построить видимый путь луны, послѣ чего будетъ уже не трудно графически опредѣлить моменты начала и конца покрытія. Построеніе первыхъ членовъ, т. е. $\tau.n.\cos\delta$ и $\eta+\tau.\mu$ весьма просто. Объясняя способъ построенія покрытій, мы будемъ вмѣстѣ съ тѣмъ строить вычисленное уже нами покрытіе Альціоны луной. Все построеніе мы сдѣлали въ маштабѣ, при которомъ одна минута дуги имѣетъ величину одной линіи или $\frac{1}{120}$ части англійскаго фута. Черезъ произвольно взятую точку O (фиг. 20), въ которой по нашему предположенію находится видимое мѣсто покрываемой звѣзды, въ нашемъ случаѣ—звѣзды η Tauri, проведемъ прямоугольную систему осей координатъ Ox и Oy. Примемъ, какъ сказали, ось y за кругъ склоненія звѣзды. На оси y отъ начала координатъ отложимъ линію $OL_0=\eta$. Для разсматриваемаго покрытія Альціоны, какъ видимъ изъ Nautical Almanac, $\eta=+45'\ 4''$. Для построенія точки L_0 мы отложили отъ начала координатъ по оси y длину въ 45 линій. Точка L_0 представляетъ геоцентрическое положеніе центра луны на плоскости xy во время соединенія луны со звѣздою по прямому восхожденію. Предположимъ, что собственное движеніе луны происходитъ на нашемъ чертежѣ справа

на лѣво, а потому, чтобы получить геоцентрическое положеніе центра луны спустя часъ послѣ соединенія, отложимъ по оси x влѣво отъ начала координатъ длину $n.\cos\delta$, изъ конца этой линіи возставимъ перпендикуляръ равный по длинѣ $\eta+\mu$ и получимъ такимъ образомъ точку L_1, которая представляетъ собою геоцентрическое положеніе центра луны спустя часъ послѣ соединенія со звѣздою. Для разсматриваемаго покрытія мы принимаемъ $n = 2317''.5$ и $\delta = +23^\circ\ 28'$, слѣдовательно для нашего случая $n.\cos\delta = 35.5$ линій. На фиг. 20 эта длина представляется линіей Oc. Линія $cL_1 = \eta + \mu$ въ нашемъ случаѣ равна 54.3 линій, ибо мы принимаемъ часовое движеніе луны по склоненію равнымъ $+9'\ 18''$. Для того чтобы получить геоцентрическое положеніе луны на плоскости xy за часъ до соединенія, отложимъ по оси x вправо отъ начала координатъ длину $n.\cos\delta$ и изъ конца этой линіи возставимъ перпендикуляръ равный $\eta-\mu$, тогда получимъ точку L', которая представитъ собою искомое положеніе. Въ нашемъ случаѣ $\eta-\mu = dL' = 35.7$ линій. Такимъ образомъ при построеніи точки L_1 мы принимаемъ въ уравненіяхъ (360) $\tau = +1$; для построенія точки L' въ тѣхъ же уравненіяхъ полагаемъ $\tau = -1$. Найденныя три точки L', L_0, L_1 находятся на одной прямой линіи и разстоянія L_0L_1, L_0L' равны и представляютъ собою пространства проходимыя центромъ луны въ одинъ часъ.

Не трудно также построить въ выраженіяхъ (360) члены

$$\pi.\cos\varphi'\sin(\theta-\alpha+\tau)$$
$$\pi\,[\sin\varphi'\cos\delta - \cos\varphi'\sin\delta\cos(\theta-\alpha+\tau)]$$

представляющіе собою вліяніе параллакса на положеніе луны. Для этого проведемъ произвольную прямую FG (фиг. 21). При точкѣ A, произвольно взятой на этой прямой, построимъ уголъ BAC, равный геоцентрическому склоненію луны во время T. Для разсматриваемаго покрытія Альціоны мы построили уголъ $BAC = 23^\circ\ 28'$. Если склоненіе луны южное, то прямая BA должна быть проведена подъ линіей FG. На линіи AM, начиная отъ точки A, откладываемъ прямую $AB = \pi$, въ нашемъ случаѣ $AB = 59.9$ линіямъ, ибо $\pi = 59'\ 54''$. Послѣ этого опускаемъ изъ точки B перпендикуляръ BC на линію FG и изъ точки A радіусомъ AC описываемъ дугу. При точкѣ A на той же прямой FG построимъ уголъ равный геоцентрической широтѣ того мѣста, для котораго вычисляемъ покрытіе. При нашемъ построеніи уголъ $KAC = \varphi' = 50^\circ\ 16'$. Продолжимъ сторону этого угла до пересѣченія съ описанною теперь изъ A окружностію въ точкѣ K, изъ которой опустимъ перпендикуляръ KO на прямую FG. Пересѣченіемъ перпендикуляра KO съ прямою AB опредѣляется точка N. За тѣмъ изъ точки O описываемъ двѣ окружности одну радіусомъ ON, другую радіусомъ AN. На одной изъ этихъ окружностей откладываемъ, начиная отъ точки N, часовые углы луны. Если склоненіе луны южное, то начало часовыхъ угловъ будетъ въ точкѣ N'. Мы приняли, что собственнымъ движеніемъ луна перемѣщается справа на лѣво, а потому часовые углы на нашемъ чертежѣ слѣдуетъ считать въ обратномъ направленіи, ибо въ дѣйствительности собственное движеніе луны происходитъ отъ запада къ востоку, а часовые углы считаются отъ южной части меридіана по направленію суточнаго движенія свода небеснаго. Такимъ образомъ мы будемъ откладывать часовые углы по направленію отъ N къ w къ N' и т. д. Построимъ прежде всего при точкѣ O часовой уголъ луны $NOa = \theta - \alpha_0$, т. е. часовой уголъ соотвѣтствующій моменту геоцентрическаго соединенія луны со звѣздой. Для разсма-

тривасиаго покрытія Альціоны $\theta - \alpha_0 = 297° 7'$, отъ этого точка a и находится на нашемъ чертежѣ въ четвертой четверти окружности NwN'. Чтобы построить часовой уголъ имѣющій мѣсто черезъ часъ послѣ соединенія, построимъ на прямой Oa при точкѣ O уголъ въ $15°$ т. е. отложимъ отъ точки a дугу $ab = 15°$ по направленію возрастающихъ часовыхъ угловъ. Для построенія часоваго угла имѣющаго мѣсто за часъ до соединенія отложимъ дугу $ac = 15°$ и т. д. Продолжимъ стороны Ob, Oa, Oc построенныхъ теперь угловъ до пересѣченія въ точкахъ a', b', c' съ окружностію описанною около O радіусомъ AN. Если опустимъ изъ a перпендикуляръ aH на прямую KO, то линія KH представитъ собою параллаксъ склоненія соотвѣтствующій моменту геоцентрическаго соединенія луны со звѣздой. Если опустимъ изъ точки a' перпендикуляръ $a'h$ на туже прямую KO, то линія $a'h$ представитъ параллаксъ прямаго восхожденія соотвѣтствующій тому же моменту. Подобнымъ образомъ линіи KH_1 и KH' будутъ представлять величины параллакса склоненія соотвѣтствующія часу спустя послѣ соединенія и часу до соединенія луны со звѣздой. Линіи $b'\,h_1$ и $c'\,h'$ представляютъ собою величины параллакса прямаго восхожденія для тѣхъ же двухъ моментовъ. Откладывая произвольное число часовыхъ угловъ, будемъ получать подобно предыдущему для каждаго изъ нихъ величину параллакса склоненія и прямаго восхожденія

Не трудно убѣдиться въ справедливости этого. Такъ какъ сказанное о времени геоцентрическаго соединенія будетъ справедливо и для другихъ моментовъ, то мы докажемъ только, что

$$KH = \pi\,[\sin\varphi' \cos\delta - \cos\varphi' \sin\delta \cos(\theta - \alpha_0)]$$
$$ah = \pi.\cos\varphi' \sin(\theta - \alpha_0)$$

Въ самомъ дѣлѣ, $KH = KO - HO$, но $KO = AK.\sin\varphi'$; $AK = AC = \pi.\cos\delta$; слѣдовательно

$$KO = \pi.\cos\delta \sin\varphi'$$

Изъ подобныхъ треугольниковъ $a'hO$ и aHO имѣемъ

$$\frac{a'O}{aO} = \frac{Oh}{OH}$$

откуда

$$HO = \frac{Oh.\,aO}{a'O}$$

Но по построенію

$$aO = NO; \qquad a'O = AN.$$

слѣдовательно

$$HO = \frac{Oh.\,NO}{AN}$$

или

$$HO = \frac{AN.\cos(\theta - \alpha_0)\,AN.\sin\delta}{AN}$$

слѣдовательно

$$HO = AN.\sin\delta\cos(\theta - \alpha_0)$$

Что касается до AN, то изъ подобныхъ треугольниковъ ANO и ABC имѣемъ

$$\frac{AN}{AO} = \frac{AB}{AC}$$

откуда

$$AN = \frac{AO \,.\, AB}{AC}$$

но $AO = AK.\cos\varphi' = AC.\cos\varphi'$; слѣдовательно

$$AN = \pi.\cos\varphi'$$

И такъ

$$HO = \pi.\cos\varphi'\sin\delta\cos(\theta - \alpha_0)$$

а потому

$$KH = \pi\left[\cos\delta\sin\varphi' - \sin\delta\cos\varphi'.\cos(\theta - \alpha_0)\right]$$

Что касается до $a'h$, то $a'h = Oa'.\sin(a'Oh)$, или $a'h = AN.\sin(\theta - \alpha_0)$, или наконецъ

$$a'h = \pi.\cos\varphi'\sin(\theta - \alpha_0)$$

что мы и имѣли въ виду показать.

Хотя эти построенія параллакса прямаго восхожденія и склоненія луны не представляетъ ни какой трудности и выполняются при помощи только циркуля и линейки, но склоненія и прямыя восхожденія луны измѣняются непрерывно, а потому для каждаго часоваго угла положенія линій AB и KO и зависящихъ отъ нихъ точекъ K и N будутъ измѣняться; однако вполнѣ удовлетворительно построеніе относящееся ко времени соединенія сохранить для всѣхъ разсматриваемыхъ моментовъ, и прямо на немъ наносить различные часовые углы, какъ мы это и сдѣлали теперь. Фигурой (21) мы можемъ пользоваться также и для построенія произведенія $n.\cos\delta$ по данному n. Въ самомъ дѣлѣ, если на линіи AM, начиная отъ точки A, отложимъ линію равную n, то проэкція этой линіи на прямую FG представитъ собою произведеніе $n.\cos\delta$.

Если величины параллакса въ склоненіи и прямомъ восхожденіи построеніемъ найдены, т. е. если построены линіи KH', KH, KH_1 и т. д. $c'h'$, $a'h$, $b'h_1$ и т. д., то для нанесенія на плоскость xy видимыхъ положеній луны соотвѣтствующихъ разсматриваемымъ моментамъ снова обратимся къ фигурѣ 20. Сначала проведемъ черезъ точки L', L_0, L_1 линіи параллельныя осямъ первоначальной системы, имѣющимъ начало въ покрываемой звѣздѣ. Если хотимъ имѣть видимое положеніе луны соотвѣтствующее моменту геоцентрическаго соединенія, то отъ точки L_0 по линіи параллельной оси x отложимъ длину $a'h$ найденную на фигурѣ 21. Изъ полученной точки α параллельно оси y въ отрицательномъ направленіи отложимъ длину αl_0 равную найденной линіи KH и точка l_0 представитъ собою искомое положеніе. Мы отложили длину $a'h$ влѣво отъ точки L_0, т. е. по направленію возрастающихъ координатъ x, потому что въ нашемъ случаѣ $\sin(\theta - \alpha_0)$ есть отрицательная величина и второй

членъ перваго изъ выраженій (360) дѣлается отъ этого положительнымъ. Чтобы построить видимое положеніе луны имѣющее мѣсто за часъ до геоцентрическаго соединенія ея со звѣздою, отложимъ отъ точки L' влѣво по линіи параллельной оси x длину $c'b'$ (фиг. 21) и изъ полученной точки α' опять параллельно оси y по отрицательному ея направленію отложимъ линію $\alpha'l'$ равную найденной длинѣ KH'. Точка l' представитъ искомое видимое положеніе центра луны. Сдѣлавъ подобное же построеніе при точкѣ L_1 найдемъ точку l, представляющую видимое положеніе луны часъ спустя послѣ соединенія.

Если соединимъ точки l', l_0, l_1 и т. д. непрерывной линіей, то получимъ видимый путь луны. Послѣ этого не трудно уже назначить видимыя мѣста центра луны, въ то время какъ звѣзда касается луннаго края при началѣ и концѣ покрытія. Для этого опишемъ изъ точки O (фиг. 20) кругъ FGH радіусомъ по маштабу равнымъ видимому радіусу луны выраженному въ минутахъ. (Вмѣсто видимаго при этомъ построеніи совершенно удовлетворительно взять геоцентрическій радіусъ луны). Этотъ кругъ пересѣчетъ найденный видимый путь $l'l_0l_1$ луны въ точкахъ F и G. Точка G представитъ собою положеніе центра луны при началѣ покрытія, а точка F—положеніе центра луны при концѣ явленія. Разстоянія $l'l_0$ и l_0l_1 представляютъ собою пространства, которыя видимо проходитъ центръ луны въ теченіи одного часа. Поэтому понятно, что отношенія $\frac{l_0F}{l_0l'}$ и $\frac{l_0G}{l_0l_1}$ представляютъ собою выраженныя въ часахъ тѣ промежутки времени, которые протекаютъ отъ времени геоцентрическаго соединенія до конца покрытія и отъ начала покрытія до времени того же соединенія. Въ нашемъ случаѣ послѣдній промежутокъ точнѣе будетъ представить отношеніемъ $\frac{l_0G}{l_0l'}$. Слѣдовательно величинами этихъ отношеній вполнѣ опредѣляются времена начала и конца покрытія. Опредѣляя по нашему маштабу длину линій l_0F, l_0G, l_0l', находимъ, что для построеннаго нами покрытія Альціоны $\frac{l_0F}{l_0l'}=\frac{19.2}{34.5}=0^h.56$; $\frac{l_0G}{l_0l'}=\frac{51.0}{34.5}=1^h.48$. Отсюда заключаемъ, что начало покрытія произойдетъ за $1^h\,28^m.8$, а конецъ покрытія — за $33^m.6$ до времени геоцентрическаго соединенія луны со звѣздой. Такимъ образомъ посредствомъ построенія находимъ, что начало покрытія Альціоны луной для кіевской обсерваторіи послѣдуетъ въ $5^h\,20^m.3$, а конецъ въ $6^h\,15^m.5$ кіевскаго средняго времени. Эти результаты удовлетворительно согласны съ результатами найденными по способу Бесселя.

Чтобы судить о положеніи тѣхъ точекъ луннаго края, въ которыхъ происходитъ начало и конецъ покрытія, замѣтимъ, что звѣзда во время покрытія описываетъ за луною хорду параллельную видимому пути луннаго центра во время покрытія; а потому, если проведемъ черезъ звѣзду прямую параллельную видимому пути луннаго центра, то пересѣченія этой прямой съ положеніемъ луннаго диска во время средины покрытія укажутъ намъ положенія точекъ вступленія и выступленія звѣзды. Опустивъ изъ звѣзды перпендикуляръ на видимый путь луны, точку λ (фиг. 20) пересѣченія этихъ двухъ прямыхъ мы примемъ за положеніе луннаго центра во время средины покрытія. За тѣмъ радіусомъ луны изъ точки λ опишемъ кругъ и черезъ звѣзду проведемъ прямую линію ab параллельную видимому пути луны. Точки M и N пересѣ-

ченія этой прямой съ описаннымъ кругомъ суть искомыя, — точка M указываетъ на положеніе мѣста вступленія звѣзды за лунный дискъ и точка N—мѣсто выступленія. Если черезъ точку λ проведемъ линію параллельную оси y, то уголъ $C\lambda M$ представитъ собою уголъ положенія звѣзды при центрѣ луны во время начала покрытія, а уголъ $C\lambda N$ будетъ служить дополненіемъ до 360° углу положенія звѣзды при концѣ покрытія. Измѣряя эти углы на нашемъ чертежѣ, мы нашли ихъ совершенно согласными съ тѣми, которые получены аналитическимъ способомъ.

Чтобы яснѣе составить себѣ понятіе о положеніи точекъ вступленія и выступленія слѣдуетъ провести на чертежѣ кругъ высоты. Мы знаемъ, что при извѣстномъ допущеніи можно считать, что дѣйствіемъ параллакса свѣтило не выводится изъ этого круга; слѣдовательно, если соединимъ прямою линіею видимое положеніе центра луны для какаго нибудь времени съ соотвѣтствующимъ геоцентрическимъ положеніемъ того же центра, то получимъ на чертежѣ направленіе круга высоты. Въ разсматриваемомъ покрытіи Альціовы положеніе круга высоты для времени покрытія мы опредѣляемъ прямою $L_0\,l_0$. Если будемъ держать чертежъ такъ, чтобы прямая $L_0\,l_0$ была вертикальна и чтобы точка L_0 была вверху, то этотъ чертежъ покажетъ намъ мѣста начала и конца покрытія при такомъ положеніи круга склоненій проведеннаго через центръ луны, какое онъ будетъ имѣть въ дѣйствительности.

Если кромѣ звѣзды O, черезъ положеніе которой на фиг. 20 проведены оси координатъ Ox, Oy есть еще другія звѣзды не очень удаленныя отъ первой и въ тотъ же день покрываемыя луною, то, назначивъ ихъ мѣсто на этомъ чертежѣ, весьма просто подобнымъ же способомъ найдемъ времена начала и конца покрытія для каждой изъ нихъ, ибо видимый путь луны для нѣсколькихъ часовъ уже нанесенъ на нашемъ чертежѣ.

30 Ноября 1876 года луна пройдетъ черезъ группу Плеядъ и въ вечеръ этого дня покроетъ многія изъ звѣздъ группы. Кромѣ Альціопы изъ болѣе значительныхъ по величинѣ звѣздъ группы будутъ покрыты Merope, Plejone и Atlas. Изъ нашего построенія мы опредѣлили времена начала и конца покрытія для каждой изъ этихъ звѣздъ и нашли, что вступленія послѣдуютъ: Merope въ $4^h\,48^m.5$, Plejone въ $5^h\,57^m.6$, Atlas въ $5^h\,59^m.4$, а выступленія—Merope въ $5^h\,45^m.5$, Plejone въ $6^h\,53^m.4$ и Atlas въ $6^h\,54^m.8$ средняго кіевскаго времени. Вообще мы можемъ сказать, что этотъ графическій способъ особенно выгоденъ для предвычисленія покрытія Плеядъ.

46. Ко второй категоріи затмѣній относятся затмѣнія независящія отъ параллакса. Изъ нихъ мы разсмотримъ пока только лунныя затмѣнія. Что скажемъ о предвычисленіи этихъ послѣднихъ то, какъ увидимъ въ свое время, съ весьма малыми измѣненіями будетъ относиться и къ предвычисленію затмѣній спутниковъ Юпитера.

Посмотримъ прежде всего при какихъ условіяхъ можетъ произойти лунное затмѣніе. Пусть въ S (фиг. 22) будетъ центръ солнца, въ T центръ земли, отъ которой распространяется коническая тѣнь BCB'. Видимый радіусъ сѣченія этой тѣни сдѣланнаго на мѣстѣ лунной орбиты будетъ LTC, назовемъ его чрезъ u. Проведя прямую BS, изъ треугольника SBC найдемъ, что уголъ $BCT = ABS - BST$. Означивъ видимый радіусъ солнца и его горизонтальный параллаксъ чрезъ ρ и π, представимъ уголъ BCT въ видѣ: $BCT = \rho - \pi$. Треугольникъ TLC даетъ $LTC = u = BLT - BCT$. Назвавъ чрезъ p горизонтальный параллаксъ луны,

получимъ $u = p + \pi - \rho$. Если назовемъ видимый радіусъ луны чрезъ R, то понятно, что когда луна, проходя по своей орбитѣ, будетъ только касаться конуса тѣни, тогда видимое разстояніе центра отъ оси конуса или, что все равно, отъ эклиптики выразится чрезъ $k = u + R$. И такъ, если вблизи полнолунія, или точнѣе во время противуположенія луны съ солнцемъ широта луны λ будетъ менѣе k, то лунное затмѣніе возможно; въ противномъ случаѣ—нѣтъ. Извѣстно, что наибольшія значенія p, π, ρ и R суть

$$p = 1^\circ\,1'\,32''; \qquad \pi = 9''; \qquad \rho = 16'\,18''; \qquad R = 16'\,46'';$$

а наименьшія

$$p = 52'\,50''; \qquad \pi = 9''; \qquad \rho = 15'\,45''; \qquad R = 14'\,24'';$$

поэтому наибольшая величина для k будетъ $1^\circ\,2'\,42''$, а наименьшая $51'\,5''$, слѣдовательно, если во время противуположенія луны съ солнцемъ $\lambda < 51'$, то затмѣніе неизбѣжно. При $\lambda > 1^\circ\,3'$ оно невозможно и при условіи $63' > \lambda > 51'$—сомнительно.

Назовемъ чрезъ u' радіусъ сѣченія конуса полутѣни земли на мѣстѣ лунной орбиты, т. е. положимъ $CTL' = u'$. Изъ треугольника $C'TL'$ имѣемъ

$$u' = TC'L' + TL'C' = TC'L' + p$$

Что касается до угла $TC'L'$, то онъ очевидно равенъ углу $A'C'S$, который $A'C'S = C'A'T + A'TS$ или $A'C'S = \pi + \rho$. И такъ $u' = p + \pi + \rho$. Слѣдовательно, если назовемъ чрезъ k' видимое разстояніе центра луны отъ оси конуса земной тѣни во время прикосновенія луны къ конусу полутѣни, то $k' = u' + R$. И отсюда могутъ быть найдены подобно предыдущему условія вступленія луны въ земную полутѣнь.

Приступимъ теперь къ опредѣленію моментовъ начала и конца луннаго затмѣнія. Пусть QN (фиг. 23) будетъ эклиптика, $L'N$—орбита луны, C—центръ земной тѣни. Долгота этой точки разнится отъ долготы Солнца на 180°. Слѣдовательно, если изъ C возставимъ къ QN перпендикуляръ LC, то точкою L опредѣлится мѣсто луны въ моментъ ея противуположенія и линіею LC представится широта луны β_0, соотвѣтствующая моменту противуположенія этого свѣтила съ Солнцемъ. Предположимъ, что по истеченіи часа луна перемѣстится по своей орбитѣ въ точку L', а центръ тѣни въ точку C'. Если опустимъ изъ L' перпендикуляръ $L'G$ на NQ и изъ L перпендикуляръ LM на $L'G$, то прямыя $L'M$ и LM представятъ собою часовыя движенія луны по широтѣ и долготѣ. Назовемъ эти часовыя измѣненія широты и долготы луны чрезъ $\Delta\beta$ и $\Delta\lambda$. Прямая CC' представитъ часовое движеніе Солнца по долготѣ. (Для малыхъ промежутковъ времени мы разсматриваемъ движеніе луны и Солнца какъ прямолинейныя и равномѣрныя). По истеченіи часа послѣ соединенія разстояніе центра луны отъ центра тѣни представится прямою $C'L'$. Построивъ на линіяхъ $C'L'$ и CC' параллелограммъ $L'lCC'$, найдемъ, что $L'C' = lC$, Слѣдовательно можно принять, что центръ тѣни оставался неподвижнымъ, а луна по линіи lLN' прошла въ теченіи часа путь lL. Мы можемъ поэтому за часовыя движенія луны по широтѣ и долготѣ принимать линіи ll' и $l'L$. Такимъ образомъ, если назовемъ часовое измѣненіе долготы Солнца чрезъ Δl, то

$$l'L = \Delta\lambda - \Delta l; \qquad ll' = \Delta\beta$$

Прямая lLN' называется относительною орбитою и положеніе ея опредѣляется угломъ $lLM = n$, который вычислимъ изъ выраженія

$$\operatorname{tang} n = \frac{\Delta\beta}{\Delta\lambda - \Delta l}$$

Кромѣ того

$$lL = \frac{\Delta L - \Delta l}{\cos n}$$

положимъ $lL = h$. Пусть $HA'M$ (фиг. 24) представляетъ сѣченіе земной тѣни сдѣланное на мѣстѣ лунной орбиты. Пусть HOM будетъ эклиптика, NLL'' пусть представляетъ относительную лунную орбиту. Мѣсто луны L' въ моментъ ея противустоянія съ солнцемъ опредѣляется пересѣченіемъ перпендикуляра OL' съ относительной орбитой. Если въ моменты двухъ внѣшнихъ прикосновеній съ конусомъ тѣни центръ луны имѣетъ положенія L и L_1, то въ продолженіи всего затмѣнія центръ луны пройдетъ путь LL_1 и при томъ пространства LL'' и $L''L_1$ пройденныя отъ средины до начала и конца затмѣнія будутъ равны, ибо треугольникъ LOL_1 равнобедренный. Замѣтимъ еще, что по нашему означенію $LO = L_1O = k = u + R$.

Для опредѣленія временъ начала и конца найдемъ прежде всего тѣ времена, которыя употребляетъ лунный центръ для прохожденія пространствъ LL'' или $L''L_1$. Замѣтимъ, что уголъ $L'OL'' = L''N'O = n$, а потому $L''L' = L'O \,.\, \sin n$ или

$$L''L' = \beta_0 \,.\, \sin n$$

Мы видѣли, что пространство $Ll = h$ луна проходитъ въ одинъ часъ, слѣдовательно пространство $L''L'$ она пройдетъ въ $\frac{L''L'}{h}$ часовъ. И такъ, если назовемъ чрезъ T время протекшее отъ средины затмѣнія до момента противуположенія луны съ солнцемъ, то

$$T = \frac{\beta_0 \sin n}{h} = \frac{\beta_0 . \sin^2 n}{\Delta\beta}$$

Придавъ эту величину со знакомъ ко времени противостоянія, получимъ время средины затмѣнія. Изъ треугольника $LL''O$ имѣемъ

$$LL'' = \sqrt{k^2 - \beta_0^2 . \cos^2 n}$$

а потому заключаемъ, что для прохожденія пространствъ LL'' и $L''L_1$ луна употребляетъ время

$$T'' = \frac{1}{h}\sqrt{k^2 - \beta_0^2 . \cos^2 n} \tag{361}$$

Слѣдовательно, если вычтемъ эту величину изъ времени средины затмѣнія, то получимъ время начала, а придавъ — найдемъ время конца затмѣнія. Такимъ же образомъ найдутся времена начала и конца затмѣнія полутѣнью; для этого стоитъ только въ предыдущія уравненія вмѣсто k поставить величину k'. Въ моментъ средины затмѣнія происходитъ наибольшее помраченіе луны. Въ это время наибольшая ширина затмившейся части представляется линіею $A'B$ (фиг. 24), но $A'B = AB - AA'$, притомъ $AB = 2R$, $AA' = AO - A'O = L'O + R - u$. И такъ

$$AA' = \beta_0 \,.\, \cos n + R - u$$

Отсюда заключаемъ, что въ моментъ наибольшаго фаза ширина затмившейся части будетъ

$$A'B = R + u - \beta_0 . \cos n$$

Эта величина, подобно тому какъ и для солнечныхъ затмѣній, выражается обыкновенно въ дюймахъ или двѣнадцатыхъ доляхъ луннаго діаметра. Если раздѣлимъ лунный діаметръ $2R$ на двѣнадцать частей, то число минутъ заключающееся въ одномъ дюймѣ будетъ $\frac{2R}{12}$ (мы предполагаемъ, что R представлено въ минутахъ дуги). Раздѣливъ предыдущее выраженіе на эту величину дюйма, найдемъ величину наибольшаго фаза представленную въ дюймахъ. Такимъ образомъ величина наибольшаго фаза луннаго затмѣнія будетъ

$$\frac{6}{R}(R + u - \beta_0 . \cos n)$$

Когда весь дискъ луны погрузится въ земную тѣнь, тогда произойдетъ полное затмѣніе луны. Начало и конецъ этого явленія опредѣляются временами перваго и послѣдняго внутренняго прикосновенія поверхности луны къ поверхности земной тѣни. Такъ какъ для этихъ внутреннихъ прикосновеній видимое разстояніе центра луны отъ центра сѣченія тѣни представится разностію $u - R$, то для вычисленія начала и конца полнаго луннаго затмѣнія въ уравненіе (361) должно вмѣсто k поставить разность $u - R$.

Не трудно имѣть выраженія, которыми слѣдуетъ пользоваться въ томъ случаѣ, когда въ основаніе вычисленія примемъ координаты отнесенныя къ экватору. Назовемъ прямыя восхожденія луны и центра тѣни чрезъ α и A, склоненія обѣихъ точекъ чрезъ δ и D; часовыя измѣненія этихъ координатъ пусть будутъ $\Delta\alpha$, ΔA, $\Delta\delta$ и ΔD. Прямое восхожденіе земной тѣни отличается отъ той же координаты Солнца постоянной величиной, а склоненіе центра тѣни разнится отъ склоненія Солнца только знакомъ. Такимъ образомъ если прямое восхожденіе и склоненіе Солнца суть A_0 и D_0, то $A = 180° + A_0$, $D = -D_0$. Представимъ себѣ, что въ моментъ соединенія по прямому восхожденію центры луны и тѣни находятся въ L и C (фиг. 25), пусть прямая Ck представляетъ линію проведенную параллельно экватору чрезъ центръ тѣни. Предположимъ, что чрезъ часъ послѣ соединенія центръ тѣни придетъ въ C', а центръ луны въ L'; тогда, опустивъ изъ точекъ L' и C' перпендикуляры на прямую Ck, а изъ точекъ L и C'—на прямую $L'k$, представимъ часовыя измѣненія склоненій центра тѣни и луны прямыми $c'a$ и $L'f$; такъ что $c'a = \Delta D$; $L'f = \Delta\delta$. Линіи же ck и ca извѣстнымъ образомъ зависятъ отъ измѣненій прямыхъ восхожденій. Именно: $ca = \Delta A . \cos\delta$; $ck = \Delta\alpha . \cos\delta$. Если на прямыхъ cc' и $c'L'$ построимъ параллелограммъ, то этимъ опредѣлится точка l'', соединивъ которую съ L, найдемъ направленіе относительной орбиты луны. Назовемъ наклоненіе относительной орбиты къ экватору чрезъ n, тогда изъ прямоугольнаго треугольника $l''Ll'$ получимъ

$$\text{tang}\,(l''Ll') = \text{tang}\, n = \frac{\Delta\delta - \Delta D}{(\Delta\alpha - \Delta A)\cos\delta}$$

$$L''L = h = \frac{\Delta\delta - \Delta D}{\sin n}$$

подъ h разумѣемъ здѣсь часовое движеніе по относительной орбитѣ.

Имѣя это, не трудно уже вычислить времена начала и конца затмѣнія. Обратимся опять къ фигурѣ 24, но предположимъ теперь, что линія $N'MH$ проведена черезъ центръ земной тѣни параллельно экватору. Названъ чрезъ e кратчайшее разстояніе центра тѣни отъ относительной орбиты въ моментъ противуположенія луны съ солнцемъ, получимъ

$$e = (\delta - D) \cos n$$

Изъ треугольника $L''OL_1$ имѣемъ

$$\cos i = \frac{e}{k}; \qquad L''L_1 = e \,.\, \operatorname{tang} i$$

Слѣдовательно время протекающее отъ средины затмѣнія до конца его выразится чрезъ

$$T' = \frac{e \,.\, \operatorname{tang} i}{h}$$

а такъ какъ $L''L' = (\delta - D) \sin n$, то промежутокъ времени отъ средины затмѣнія до момента противуположенія представится чрезъ

$$T = \frac{\sin n}{h} (\delta - D)$$

Зная T, опредѣлимъ по данному времени противуположенія время средины затмѣнія, а зная T', по найденному времени средины затмѣнія вычислимъ времена начала и конца разсматриваемаго явленія.

Говоря о лунныхъ затмѣніяхъ, считаемъ не лишнимъ сдѣлать слѣдующія два замѣчанія.

Луна при различныхъ своихъ затмѣніяхъ представляется намъ различно. Иногда во время полнаго затмѣнія она имѣетъ темно-красный цвѣтъ, иногда темнѣетъ и исчезаетъ вполнѣ. Надо думать, что эти видоизмѣненія цвѣта лунной поверхности во время затмѣнія объусловливаются состояніемъ земной атмосферы, которая или поглощаетъ въ извѣстной степени солнечные лучи, или же дѣйствіемъ рефракціи заставляетъ ихъ проникать въ конусъ земной тѣни. Но есть еще одно обстоятельство, которое имѣетъ значительное вліяніе на видъ луны во время затмѣнія. Во время различныхъ затмѣній луна проходитъ черезъ конусъ земной тѣни на различныхъ разстояніяхъ отъ вершины этого конуса. Солнечные лучи, проходя черезъ атмосферу, около поверхности земли отклоняются дѣйствіемъ рефракціи къ оси конуса тѣни, встрѣчаютъ эту линію между вершиною конуса и землею и даютъ лунѣ извѣстное, хотя слабое освѣщеніе. Это освѣщеніе будетъ тѣмъ сильнѣе, чѣмъ ближе къ вершинѣ конуса будетъ проходить луна черезъ земную тѣнь. Если же на оборотъ луна во время затмѣнія проходитъ черезъ конусъ тѣни на болѣе близкомъ разстояніи отъ земли, то во время средины затмѣнія эти лучи могутъ совсѣмъ не попасть на лунную поверхность и тогда луна исчезнетъ. Однако полное исчезновеніе луны во время затмѣнія наблюдается весьма рѣдко.

Представляя величину радіуса сѣченія конуса земной тѣни въ видѣ суммы $u = p + \pi - \rho$, мы предполагаемъ, что около поверхности земли нѣтъ атмосферы;

на самомъ дѣлѣ она существуетъ и части ея расположенныя около земной поверхности въ извѣстной степени поглащаютъ солнечные лучи; чрезъ это тѣнь, отбрасываемая землею въ сторону луны, увеличивается. Наблюденія подтверждаютъ это заключеніе и показываютъ, что для того чтобы согласить съ ними теорію, необходимо увеличить вычисленный, но обращая вниманіе на дѣйствіе атмосферы, радіусъ тѣни на одну шестидесятую его долю, т. е. необходимо принять

$$u = \frac{61}{60}(p + \pi - \rho)$$

VI.

Аберрація и годичный параллаксъ звѣздъ.

47. Возвратимся опять къ главному предмету сферической астрономіи, — къ изученію разностей видимыхъ и истинныхъ положеній свѣтилъ. Эти разности зависятъ, какъ мы сказали, съ одной стороны отъ положенія наблюдателя на поверхности земли и отъ атмосферы окружающей эту поверхность, съ другой стороны они обусловливаются двоякимъ движеніемъ земли въ пространствѣ. Эту вторую категорію разностей намъ и предстоитъ теперь разсмотрѣть.

Движеніе земли около солнца при извѣстныхъ условіяхъ должно бы явиться для насъ причиною видимыхъ перемѣщеній звѣздъ на сферѣ небесной. Въ самомъ дѣлѣ, если разсмотримъ двѣ какія нибудь звѣзды расположенныя въ той части пространства, отъ которой земля удаляется въ извѣстное время года, то очевидно, что угловое разстояніе этихъ звѣздъ должно бы представляться намъ постепенно уменьшающимся. При обратномъ движеніи земли, при движеніи по направленію къ этимъ звѣздамъ упомянутое угловое разстояніе должно бы было возрастать до извѣстнаго предѣла. Такія измѣненія относительнаго положенія неподвижныхъ звѣздъ необходимо будутъ тѣмъ менѣе для насъ замѣтны, чѣмъ болѣе будетъ разстояніе отдѣляющее землю отъ этихъ свѣтилъ. Если бы разстояніе звѣздъ отъ земли было безконечно велико въ сравненіи съ размѣрами земной орбиты, то, двигаясь съ землею около солнца, мы незамѣтили бы никакихъ измѣненій въ относительномъ положеніи звѣздъ. Это постоянство картины звѣзднаго неба существуетъ на самомъ дѣлѣ, на самомъ дѣлѣ діаметръ земной орбиты можетъ быть принимаемъ за величину исчезающую въ сравненіи съ разстояніями отдѣляющими насъ отъ неподвижныхъ звѣздъ. Но астрономы жившіе до Брадлея не представляли себѣ такой громадности размѣровъ вселенной, и далеки были отъ той мысли, что съ каждой изъ неподвижныхъ звѣздъ солнце и земля должны представляться слившимися въ одну точку. Такое заблужденіе астрономовъ жившихъ до начала XVIII вѣка дало однако поводъ къ одному изъ блестящихъ открытій новой астрономіи,—оно привело къ изслѣдованію явленія теперь извѣстнаго подъ именемъ *аберраціи*.

Съ тѣхъ поръ какъ система Коперника была принята за несомнѣнную истину всѣ астрономы старались подтвердить ученіе о движеніи земли около солнца открытіемъ видимаго перемѣщенія неподвижныхъ звѣздъ; но всѣ попытки ихъ не имѣли

успѣха до тѣхъ поръ, пока въ 1726 году Англійскій астрономъ Д. Брадлей *) совмѣстно съ С. Молинё не предпринялъ подобныхъ же изысканій и не началъ изучать положеніе звѣзды γ Draconis. При своихъ изслѣдованіяхъ Брадлей употреблялъ превосходный для того времени зенитный секторъ, устроенный часовщикомъ Граганомъ. Располагая этимъ снарядомъ, Брадлей скоро замѣтилъ хотя малыя, но чрезвычайно правильныя измѣненія въ положеніи звѣзды γ Draconis. Прежде всего Брадлей замѣтилъ, что измѣненія долготы и широты этой звѣзды имѣютъ годичный періодъ. Такъ какъ подобную же величину долженъ имѣть и періодъ измѣненій зависящихъ отъ параллакса (если только неподвижныя звѣзды имѣютъ параллаксъ, т. е. если только съ этихъ звѣздъ радіусъ земной орбиты представляется подъ угломъ отличнымъ отъ нуля), то первоначально Брадлей предположилъ, что имъ найденъ наконецъ годичный параллаксъ неподвижной звѣзды. Болѣе подробный обзоръ полученнаго результата скоро однако заставилъ Брадлея отказаться отъ этого предположенія.

Не трудно простымъ построеніемъ показать тѣ измѣненія, которыя должны происходить въ положеніи звѣзды въ теченіи одного оборота земли около солнца, если эта звѣзда имѣетъ параллаксъ. Представимъ себѣ, что чрезъ звѣзду S (фиг. 26) и точки t_1, t_2, t_3, t_4 земной орбиты проведены прямыя линіи, тогда эти прямыя будутъ находиться на поверхности конуса, основаніемъ которому будетъ служить плоскость земной орбиты, а вершиною—разсматриваемая звѣзда S. Продолжимъ прямыя St_1, St_2 и т. д. до пересѣченія съ видимой сферой небесной въ точкахъ S_1, S_2, S_3, S_4, которыя будутъ лежать на эллиптической кривой и будутъ представлять собою параллактическія мѣста звѣзды. Въ этихъ точкахъ S_1, S_2, S_3, S_4 будетъ видна звѣзда изъ положеній земли t_1, t_2, t_3, t_4. Изъ этого простаго построенія видно, что если звѣзда имѣетъ параллаксъ, то она относительно своего средняго положенія, т. е. относительно центра эллипсиса, описываемаго ею въ теченіи года, будетъ видна въ противуположной сторонѣ земли. Когда земля находится въ точкѣ t_1, то изъ этого положенія звѣзда видна въ точкѣ S_1. Понятно, что въ этой точкѣ звѣзда будетъ имѣть широту наименьшую изъ всѣхъ своихъ широтъ, ибо линія $EAKB$ представляетъ собою на нашемъ чертежѣ пересѣченіе эклиптики со сферой небесной. Если земля находится въ точкѣ t_1, то для этого положенія звѣзда находится въ соединеніи съ солнцемъ, ибо солнце будетъ представляться изъ положенія t_1 въ точкѣ A, т. е. въ одномъ кругѣ широты съ положеніемъ S_1. Такимъ образомъ для наблюдателя находящагося въ t_1 звѣзда и солнце будутъ имѣть долготу представляющуюся дугою $A\nu$, если ν есть точка весенняго равноденствія. Когда земля придетъ въ t_3, то наблюдателю изъ этого положенія будетъ казаться, что звѣзда находится въ противуположеніи съ солнцемъ (ибо звѣзда будетъ въ части LS_3A круга широты и долгота ея будетъ νA, какъ прежде, а долгота солнца представится дугою νAKB) и имѣетъ наибольшую изъ своихъ широтъ. Долгота звѣзды для обоихъ ея положеній въ S_1 и S_3 будетъ средняя изъ всѣхъ, которую звѣзда можетъ имѣть, находясь на разсматриваемомъ эллипсисѣ. Въ положеніяхъ земли t_2 и t_4, откуда звѣзда представляется въ квадратурахъ съ солнцемъ, имѣетъ мѣсто совершенно обратное: широта звѣзды достигаетъ средней величины, тогда какъ долгота ея для положенія t_2 есть наибольшая, а для положенія t_4—наименьшая. И такъ, если звѣзда имѣетъ параллаксъ, то

*) Джемсъ Брадлей родился въ 1692 г., скончался въ 1762. Въ 1731 былъ назначенъ директоромъ гринвичской обсерваторіи.

долготы ея во время соединенія и противуположенія съ солнцемъ имѣютъ среднюю изъ своихъ величинъ, въ квадратурахъ же — наибольшую и наименьшую; широты звѣзды на оборотъ въ квадратурахъ достигаютъ своего средняго значенія, въ соединеніи съ солнцемъ—наибольшей, а въ противуположеніи—наименьшей величины. Брадлей, производя наблюденія надъ положеніемъ звѣзды γ Draconis, скоро замѣтилъ годичныя перемѣны въ этомъ положеніи, но онѣ были совершенно несогласны съ тѣми измѣненіями, о которыхъ мы сейчасъ говорили и которыя должны бы существовать, если бы звѣзда γ Draconis дѣйствительно имѣла параллаксъ. Брадлей нашелъ что γ Draconis въ мартѣ 1726 года была южнѣе на 20″ чѣмъ въ Декабрѣ 1725 года и что отъ Марта до слѣдующаго Сентября она перемѣстилась къ сѣверу почти на 39″, наконецъ замѣтилъ, что въ Декабрѣ она возвратилась въ ту точку, которую занимала въ томъ же мѣсяцѣ ровно годъ тому назадъ. Такъ какъ въ срединѣ Марта, Іюня, Сентября и Декабря солнце имѣетъ долготы 0°, 90°, 180° и 270°, долгота же звѣзды γ Draconis близка къ 270°, то поэтому заключаемъ, что въ срединѣ Декабря эта звѣзда приходитъ въ соединеніе съ солнцемъ, въ Іюнѣ она находится въ противуположеніи съ солнцемъ, а въ срединѣ Марта и Сентября—въ квадратурахъ. Слѣдовательно, если бы измѣненія, замѣченныя Брадлеемъ въ положеніи звѣзды γ Draconis зависили отъ параллакса, то въ Декабрѣ звѣзда должна бы имѣть наиболѣе южное положеніе а въ Іюнѣ наиболѣе сѣверное, въ Сентябрѣ же и Мартѣ она должна бы имѣть по широтѣ среднее положеніе (ибо полюсъ эклиптики находится между нею и полюсомъ экватора, а кругъ широты проведенный черезъ звѣзду близко проходитъ отъ положенія солнца во время зимняго солнцестоянія). Такимъ образомъ мы видимъ, что наблюдаемыя перемѣщенія γ Draconis совсѣмъ противуположны тѣмъ, которыя имѣла бы эта звѣзда отъ дѣйствія параллакса. Слѣдовательно объяснять эти перемѣщенія параллаксомъ нельзя.

Стараясь истолковать наблюдаемое движеніе звѣзды γ Draconis, Брадлей скоро пришелъ къ вѣрному заключенію и объяснилъ причину явленія, принявъ во вниманіе скорость свѣта впервые опредѣленную почти за 50 лѣтъ передъ тѣмъ астрономомъ О. Рёмеромъ. Въ 1728 году Брадлей напечаталъ въ Philos. Trans. мемуаръ подъ заглавіемъ „Account of a new descovered motion of the fixed stars“, въ которомъ далъ полное объясненіе явленія и назвалъ его Аберраціей.

Сущность Брадлеева объясненія заключается въ слѣдующемъ. Предположимъ, что матеріальная точка A (фиг. 27) падаетъ отвѣсно на горизонтальную прямую EF и на пути въ точкѣ R встрѣчаетъ отверстіе цилиндрической трубы QR. Если бы труба во время движенія точки оставалась въ покоѣ, то матеріальная точка скатилась бы къ Q по нижней стѣнкѣ трубы. Но если труба будетъ двигаться по направленію отъ E къ F, оставаясь параллельною сама себѣ, и притомъ будетъ двигаться съ такою скоростію, что пространство QC пройдётъ въ тоже время, въ которое точка свободнымъ паденіемъ можетъ перейти отъ R къ C по прямой RC, тогда точка во все время паденія изъ R въ C постоянно будетъ оставаться на оси трубы RQ и наблюдателю находящемуся въ Q будетъ казаться, что точка движется по оси трубы BQ.

Предположимъ теперь, что по направленію къ A находится неподвижная звѣзда, отъ которой лучъ свѣта AR достигаетъ объэктива R трубы QR находящейся на землѣ и вмѣстѣ съ нею движущейся по направленію отъ E къ F. Если труба наклонена къ направленію движенія EF подъ такимъ угломъ RQF, при которомъ

образовавшіеся отрѣзки CR и CQ имѣютъ такую длину, что свѣтъ, двигаясь по CR, а глазъ наблюдателя по CQ, одновременно достигаютъ точки C, то наблюдателю находящемуся въ Q будетъ казаться, что свѣтъ отъ звѣзды A достигаетъ его глаза по направленію оси трубы $A'Q$, а не по направленію AC. Слѣдовательно при совмѣстномъ движеніи свѣта и земли и при извѣстномъ отношеніи между скоростями обоихъ движеній наблюдатель увидитъ свѣтило не по направленію AR, а по направленію $A'R$ и свѣтило будетъ ему казаться отклоненнымъ отъ истиннаго своего положенія на уголъ ARA' названный Брадлеемъ *Аберраціей*.

Такимъ образомъ если принять аналогію между движеніемъ матеріальной точки и свѣтовой волны, то по объясненіе Брадлея *аберрація есть оптическій обманъ, производимый совмѣстнымъ движеніемъ свѣта и земли.* По причинѣ этого обмана мы видимъ свѣтило не по направленію дѣйствительно идущаго отъ него къ глазу наблюдателя луча, но по другому направленію, отклоненному отъ перваго въ сторону движенія земли.

Новѣйшія, болѣе сложныя объясненія аберраціи даны между прочимъ Гёкомъ, Клинкерфусомъ и Кетлеромъ *), но мы ограничимся выше приведеннымъ, принятымъ въ послѣдствіи К. Ф. Гауссомъ.

48. Легко показать вліяніе аберраціи на координаты свѣтилъ. Опредѣлимъ прежде всего вліяніе аберраціи на склоненія и прямыя восхожденія. Представимъ себѣ неподвижную въ пространствѣ систему прямоугольныхъ осей координатъ и пусть въ моментъ t, въ которое свѣтъ достигаетъ объэктива трубы, координаты центра окуляра будутъ x, y, z. Такъ какъ земля, а съ нею и труба перемѣщаются въ пространствѣ, то во время t', т. е. въ тотъ моментъ, когда свѣтъ неподвижной звѣзды достигаетъ окуляра, координаты этого послѣдняго будутъ уже

$$x + (t' - t) \cdot \frac{dx}{dt}; \qquad y + (t' - t) \cdot \frac{dy}{dt}; \qquad z + (t' - t) \cdot \frac{dz}{dt}$$

ибо въ теченіи малаго промежутка времени $t' - t$ движеніе земли можно считать прямолинейнымъ и равномѣрнымъ. Пусть координаты центра объэктива во время t относительно осей имѣющихъ начало въ центрѣ окуляра и параллельныхъ неподвижнымъ осямъ будутъ ξ, η, ζ. Тогда координаты центра объэктива для времени t относительно неподвижныхъ осей будутъ $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$. Если AB (фиг. 28) представляетъ направленіе трубы во время t, BC—направленіе движенія окуляра и AC—направленіе свѣтоваго луча, идущаго отъ нѣкоторой звѣзды, то, какъ мы видѣли, для того чтобы наблюдатель въ B могъ видѣть свѣтило при совмѣстномъ движеніи земли и свѣта, труба AB должна имѣть такое направленіе, при которомъ отрѣзки AC и BC находились бы между собою въ отношеніи скоростей свѣта и земли; т. е. чтобы длина отрѣзковъ AC и BC была такова, чтобы время употребляемое свѣтомъ для прохожденія пространства AC равнялось времени употребляемому землею для перемѣщенія изъ B въ C. Слѣдовательно если назовемъ пространство

*) *M. Hoek.* De l'influence des mouvements de la terre sur les phenoménes fondamentaux de l'optique dont se sert l'astronomie. (Recherches astronomiques de l'observatoire d'Utrecht. Première livraison).

W. Klinkerfues. Die Aberration der Fixsterne nach der Wellentheorie.

E. Kettler. Die Lehre von der Aberration des Lichtes.

AC чрезъ a, скорость свѣта чрезъ μ, то положеніе трубы, при которомъ можетъ быть видимо свѣтило съ подвижной земли, должно опредѣляться изъ условія

$$\frac{a}{\mu} = t' - t \tag{362}$$

ибо земля изъ B перемѣщается въ C во время $t' - t$. Очевидно также, что проложенія пространства $AC = a$ на оси координатъ должно равняться разностямъ координатъ точекъ A и C считаемымъ относительно одной и той же системы осей. Такъ какъ точка A есть положеніе объэктива во время t, а точка C есть положеніе окуляра во время t', то назвавъ проложенія линіи a на оси координатъ чрезъ a_x, a_y, a_z, будемъ имѣть

$$a_x = x + \xi - \left[x + (t' - t)\frac{dx}{dt}\right]$$

$$a_y = y + \eta - \left[y + (t' - t)\frac{dy}{dt}\right]$$

$$a_z = z + \zeta - \left[z + (t' - t)\frac{dz}{dt}\right]$$

или просто

$$a_x = \xi - (t' - t)\frac{dx}{dt}; \quad a_y = \eta - (t' - t)\frac{dy}{dt}; \quad a_z = \zeta - (t' - t)\frac{dz}{dt} \tag{363}$$

Примемъ плоскость экватора за плоскость xy и предположимъ, что ось x направлена въ точку весенняго равноденствія, ось y пусть будетъ къ ней перпендикулярна и расположена въ кругѣ склоненій точки лѣтняго солнцестоянія; ось z пусть будетъ направлена въ полюсъ экватора. Линіей AC опредѣляется истинное направленіе свѣтоваго луча, т. е. то направленіе, по которому была бы видна звѣзда безъ вліянія аберраціи. Поэтому если назовемъ чрезъ α и δ истинныя прямое восхожденіе и склоненіе звѣзды, то получимъ

$$a_x = a \,.\cos\delta\,.\cos\alpha$$

$$a_y = a \,.\cos\delta\,.\sin\alpha$$

$$a_z = a \,.\sin\delta$$

Направленіемъ трубы опредѣляется видимое положеніе свѣтила. Назовемъ прямое восхожденіе и склоненіе этого видимаго положенія чрезъ α' и δ'. Означимъ длину трубы чрезъ l, тогда, помня что ξ, η, ζ суть координаты объектива относительно окуляра, получимъ

$$\xi = l\,.\cos\delta'.\cos\alpha'$$

$$\eta = l\,.\cos\delta'.\sin\alpha'$$

$$\zeta = l\,.\sin\delta'$$

Внося эти величины вмѣстѣ съ предыдущими величинами a_x, a_y, a_z въ уравненія (363), найдемъ

$$a \cdot \cos\delta \cdot \cos\alpha = l \cdot \cos\alpha' \cdot \cos\delta' - (t'-t)\frac{dx}{dt}$$

$$a \cdot \cos\delta \cdot \sin\alpha = l \cdot \sin\alpha' \cdot \cos\delta' - (t'-t)\frac{dy}{dt}.$$

$$a \cdot \sin\delta \qquad = l \cdot \sin\delta' \qquad - (t'-t)\frac{dz}{dt}$$

Вводя сюда условіе (362), имѣемъ

$$\mu\,(t'-t)\cos\delta \cdot \cos\alpha = l \cdot \cos\delta' \cos\alpha' - (t'-t)\frac{dx}{dt}$$

$$\mu\,(t'-t)\cos\delta \cdot \sin\alpha = l \cdot \cos\delta' \sin\alpha' - (t'-t)\frac{dy}{dt}$$

$$\mu\,(t'-t)\sin\delta \qquad = l \cdot \sin\delta' \qquad - (t'-t)\frac{dz}{dt}$$

уравненія представляющія связь между истинными координатами свѣтила и его координатами измѣненными вліяніемъ аборраціи.

Полагая въ этихъ уравненіяхъ

$$\frac{l}{t'-t} = L$$

получимъ

$$\begin{aligned} \frac{L}{\mu}\cdot\cos\delta'\cos\alpha' &= \cos\delta\cos\alpha + \frac{1}{\mu}\cdot\frac{dx}{dt} \\ \frac{L}{\mu}\cdot\cos\delta'\sin\alpha' &= \cos\delta\sin\alpha + \frac{1}{\mu}\cdot\frac{dy}{dt} \\ \frac{L}{\mu}\cdot\sin\delta' \qquad &= \sin\delta \qquad + \frac{1}{\mu}\cdot\frac{dz}{dt} \end{aligned} \tag{364}$$

Умножимъ первое изъ этихъ уравнений на $\sin\alpha$, второе на $\cos\alpha$ и вычтемъ первое уравненіе изъ втораго; за тѣмъ умножимъ первое на $\cos\alpha$, второе на $\sin\alpha$ и произведенія сложимъ. Выполнивъ все это, найдемъ

$$\begin{aligned} \frac{L}{\mu}\cdot\cos\delta'\sin(\alpha'-\alpha) &= \frac{1}{\mu}\left[\frac{dy}{dt}\cdot\cos\alpha - \frac{dx}{dt}\cdot\sin\alpha\right] \\ \frac{L}{\mu}\cdot\cos\delta'\cos(\alpha'-\alpha) &= \cos\delta + \frac{1}{\mu}\left[\frac{dy}{dt}\cdot\sin\alpha + \frac{dx}{dt}\cdot\cos\alpha\right] \end{aligned} \tag{365}$$

откуда

$$\operatorname{tang}(\alpha'-\alpha) = \frac{\dfrac{\sec\delta}{\mu}\left[\dfrac{dy}{dt}\cdot\cos\alpha - \dfrac{dx}{dt}\cdot\sin\alpha\right]}{1 + \dfrac{\sec\delta}{\mu}\left[\dfrac{dy}{dt}\cdot\sin\alpha + \dfrac{dx}{dt}\cdot\cos\alpha\right]}$$

Такъ какъ скорость свѣта есть весьма большая величина, то вторую часть этого выраженія можно разложить въ рядъ по степенямъ $\dfrac{\sec\delta}{\mu}$. Такой рядъ имѣетъ видъ

$$\operatorname{tang}(\alpha'-\alpha)=\frac{\sec\delta}{\mu}\left[\frac{dy}{dt}\cdot\cos\alpha-\frac{dx}{dt}\sin\alpha\right]$$

(366)

$$-\left(\frac{\sec\delta}{\mu}\right)^2\left[\frac{dy}{dt}\cdot\cos\alpha-\frac{dx}{dt}\cdot\sin\alpha\right]\left[\frac{dy}{dt}\sin\alpha+\frac{dx}{dt}\cos\alpha\right]+\text{и т. д.}$$

множитель $\frac{\sec\delta}{\mu}$ есть малая величина, слѣдовательно того же порядка будетъ и разность $\alpha'-\alpha$, поэтому можемъ положить $\operatorname{tang}(\alpha'-\alpha)=(\alpha'-\alpha).\sin 1''$. Кромѣ того замѣтимъ, что члены втораго порядка относительно $\frac{1}{\mu}$ могутъ имѣть нѣкоторую примѣтную величину только для свѣтилъ весьма близкихъ къ полюсу; во всѣхъ же другихъ случаяхъ совершенно удовлетворительно удержать только члены перваго порядка. Такимъ образомъ можно, принять

(367) $$\alpha'-\alpha=\frac{\sec\delta}{\mu.\sin 1''}\left[\frac{dy}{dt}\cdot\cos\alpha-\frac{dx}{dt}\cdot\sin\alpha\right]$$

Чтобы найти разность $\delta'-\delta$, обратимся къ уравненіямъ (365); помножимъ второе изъ нихъ на $\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}$, а первое на $\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}$ и, сложивъ произведенія, получимъ

$$\frac{L}{\mu}\cos\delta'.\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}=\cos\delta.\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}+\frac{1}{\mu}\left[\frac{dy}{dt}\sin\alpha+\frac{dx}{dt}\cos\alpha\right]\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}$$
$$+\frac{1}{\mu}\left[\frac{dy}{dt}\cos\alpha-\frac{dx}{dt}\sin\alpha\right]\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}$$

или

$$\frac{L}{\mu}\cos\delta'=\cos\delta+\frac{1}{\mu}\left[\frac{dy}{dt}\sin\alpha+\frac{dx}{dt}\cos\alpha\right]$$
$$+\frac{1}{\mu}\left[\frac{dy}{dt}\cos\alpha-\frac{dx}{dt}\sin\alpha\right]\operatorname{tang}\frac{\alpha'-\alpha}{2}$$

Въ послѣднемъ членѣ этого уравненія примемъ $\operatorname{tang}\frac{\alpha'-\alpha}{2}=\frac{(\alpha'-\alpha)}{2}\cdot\sin 1''$ и вмѣсто разности $(\alpha'-\alpha)\sin 1''$ внесемъ ея величину изъ выраженія (367), тогда получимъ

$$\frac{L}{\mu}\cdot\cos\delta'=\cos\delta+\frac{1}{\mu}\left[\frac{dy}{dt}\cdot\sin\alpha+\frac{dx}{dt}\cdot\cos\alpha\right]$$
$$+\frac{1}{2\mu^2}\left[\frac{dy}{dt}\cdot\cos\alpha-\frac{dx}{dt}\cdot\sin\alpha\right]^2\sec\delta$$

Теперь для опредѣленія разности $\delta'-\delta$ будемъ комбинировать это уравненіе съ третьимъ изъ уравненій (364). Умножимъ предыдущее уравненіе на $\sin\delta$, а третье изъ уравненій (364) на $\cos\delta$ и вычтемъ первое произведеніе изъ втораго, за тѣмъ помножимъ послѣднее уравненіе на $\cos\delta$ и сложимъ съ третьимъ изъ уравненій (364) умноженнымъ на $\sin\delta$. Послѣ всего этого получимъ

$$\frac{L}{\mu}\cdot\sin(\delta'-\delta)=\frac{\cos\delta}{\mu}\cdot\frac{dz}{dt}-\frac{\sin\delta}{\mu}\left[\frac{dy}{dt}\cdot\sin\alpha+\frac{dx}{dt}\cdot\cos\alpha\right]$$
$$-\frac{\tang\delta}{2\mu^2}\left[\frac{dy}{dt}\cdot\cos\alpha-\frac{dx}{dt}\cdot\sin\alpha\right]^2$$

$$\frac{L}{\mu}\cdot\cos(\delta'-\delta)=1+\frac{1}{\mu}\left[\frac{dz}{dt}\cdot\sin\delta+\frac{dx}{dt}\cdot\cos\alpha\,.\cos\delta+\frac{dy}{dt}\cdot\sin\alpha.\cos\delta\right]$$
$$+\frac{1}{2\mu^2}\left[\frac{dy}{dt}\cdot\cos\alpha-\frac{dx}{dt}\sin\alpha\right]^2$$

раздѣливъ одно изъ этихъ уравненій на другое и ограничиваясь членами втораго порядка относительно $\frac{1}{\mu}$, получимъ

$$\tang(\delta'-\delta)=\frac{1}{\mu}\left[\frac{dz}{dt}\cdot\cos\delta-\frac{dy}{dt}\sin\alpha\,.\sin\delta-\frac{dx}{dt}\cos\alpha\,.\sin\delta\right]$$
$$-\frac{1}{\mu^2}\left[\frac{dz}{dt}\cos\delta-\frac{dy}{dt}\sin\alpha\,.\sin\delta-\frac{dx}{dt}\cos\alpha\,.\sin\delta\right]$$
$$\times\left[\frac{dz}{dt}\cdot\sin\delta+\frac{dx}{dt}\cos\alpha\,.\cos\delta+\frac{dy}{dt}\sin\alpha\,.\cos\delta\right] \qquad (368)$$
$$-\frac{\tang\delta}{2\mu^2}\left[\frac{dy}{dt}\cos\alpha-\frac{dx}{dt}\sin\alpha\right]^2$$

но члены зависящіе отъ производителя $\frac{1}{\mu^2}$ если придется вводить въ вычисленіе то только для свѣтилъ близкихъ къ полюсу, именно для тѣхъ, склоненія которыхъ болѣе 85°. Во всѣхъ же другихъ случаяхъ совершенно удовлетворительно вычислить разность $\delta'-\delta$ по выраженію

$$\delta'-\delta=-\frac{1}{\mu\,.\sin 1''}\left[\frac{dx}{dt}\cdot\sin\delta.\cos\alpha+\frac{dy}{dt}\sin\delta.\sin\alpha-\frac{dz}{dt}\cos\delta\right] \qquad (369)$$

Чтобы пользоваться найденными выраженіями разностей $\alpha'-\alpha$ и $\delta'-\delta$, необходимо опредѣлить производныя $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Представимъ себѣ для этого систему осей координатъ, имѣющую начало въ центрѣ солнца. Примемъ эклиптику за плоскость xy этой системы, тогда ось z будетъ направлена въ полюсъ эклиптики; ось x пусть проходитъ черезъ точку весенняго равноденствія. Такъ какъ центръ земли находится въ плоскости эклиптики, то пусть точка T (фиг. 29) взятая въ плоскости xy представляетъ собою положеніе центра земли. Линія OT будетъ выражать разстояніе земли отъ солнца. Для наблюдателя находящагося на землѣ точка весенняго равноденствія будетъ видна по направленію $T\gamma'$, параллельному оси x. Геоцентрическая долгота солнца представится угломъ дополнительнымъ до 360° углу $OT\gamma'$. Назовемъ эту долготу чрезъ L. Пусть долгота земли видимая изъ центра солнца, или уголъ γOT будетъ L'. Означимъ чрезъ x', y', z' координаты центра земли относительно центра солнца и чрезъ R—разстояніе земли отъ солнца. Тогда

$$x'=R\,.\cos L'; \qquad y'=R\,.\sin L'; \qquad z'=0$$

Такъ какъ $L = L' + 108^\circ$, то

$$x' = -R.\cos L, \qquad y' = R.\sin L, \qquad z' = 0$$

Оставляя ось x неподвижною, повернемъ около нея плоскость xy на уголъ ω равный наклоненію эклиптики къ экватору. Предположимъ, что линія OT приметъ послѣ этого вращенія положеніе OT'. Назовемъ чрезъ x, y, z координаты земли отнесенныя къ осямъ въ ихъ новомъ положеніи. Тогда понятно, что

$$x = x'$$
$$y = y'.\cos(y, y') + z'\cos(z', y)$$
$$z = y'.\cos(z, y') + z'\cos(z, z')$$

или

$$x = x'$$
$$y = y'.\cos\omega - z'.\sin\omega$$
$$z = y'.\sin\omega + z'.\cos\omega$$

или наконецъ

$$x = -R.\cos L$$
(370)
$$y = -R.\sin L.\cos\omega$$
$$z = -R.\sin L.\sin\omega$$

Принимая орбиту земли около солнца за круговую, мы будемъ считать R за постоянную величину и тогда

$$\frac{dx}{dt} = \quad R.\sin L \cdot \frac{dL}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = -R.\cos L.\cos\omega \cdot \frac{dL}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt} = -R.\cos L.\sin\omega \cdot \frac{dL}{dt}$$

Въ этихъ выраженіяхъ $\frac{dL}{dt}$ мы представимъ въ линейной мѣрѣ, но такъ какъ измѣненіе долготы солнца въ единицу времени взятое изъ таблицъ выражается въ секундахъ дуги, то вводя во вторыя части предыдущихъ выраженій эту табличную величину, мы умножимъ ее на $\sin 1''$. И такъ

$$\frac{dx}{dt} = R.\sin L\frac{dL}{dt} \cdot \sin 1''$$
$$\frac{dy}{dt} = -R.\cos L.\cos\omega\frac{dL}{dt} \cdot \sin 1''$$
$$\frac{dz}{dt} = -R.\cos L.\sin\omega\frac{dL}{dt} \cdot \sin 1''$$

Внося эти величины въ уравненія (367) и (369), получимъ

$$\alpha' - \alpha = -\frac{R.\sec\delta}{\mu} \cdot \frac{dL}{dt}\left[\sin L\sin\alpha + \cos L\cos\alpha\cos\omega\right]$$

$$\delta' - \delta = -\frac{R}{\mu} \cdot \frac{dL}{dt}\left[\sin L\cos\alpha\sin\delta + \cos L\sin\omega\cos\delta - \cos L\cos\omega\sin\alpha\sin\delta\right]$$

Эти выраженія зависятъ такимъ образомъ только отъ одной производной $\frac{dL}{dt}$, представляющей собою скорость земли по орбитѣ около солнца; кромѣ того въ эти выраженія входитъ еще скорость свѣта μ. Если назовемъ чрезъ k то число секундъ, которое употребляетъ свѣтъ для прохожденія средняго разстоянія земли отъ солнца, то

$$\mu = \frac{R}{k}$$

(ибо мы принимаемъ пока, что земля движется по круговой орбитѣ и радіусъ орбиты равенъ среднему разстоянію земли отъ солнца) Вводя это въ предыдущія уравненія, представимъ ихъ въ видѣ

$$\alpha' - \alpha = - k \frac{dL}{dt} \left[\sin L \sin \alpha + \cos L \cos \alpha \cos \omega \right] \sec \delta$$

$$\delta' - \delta = \quad k \frac{dL}{dt} \left[\cos L \sin \alpha \sin \delta \cos \omega - \cos L \cos \delta \sin \omega - \sin L \sin \delta \cos \alpha \right]$$

Чтобы найти выраженія производной $\frac{dL}{dt}$, мы должны бы были принять въ расчетъ эллиптичность земной орбиты, но на практикѣ въ большинствѣ случаевъ совершенно удовлетворительно принять за $\frac{dL}{dt}$ скорость движенія средняго солнца. Среднее суточное движеніе земли около солнца равно 59′ 8″. 33, слѣдовательно средняя скорость земли по орбитѣ въ одну секунду будетъ

$$\frac{59' \ 8''.33}{86400} = 0''.0410686$$

По опредѣленію В. Струве $k = 497^s.82$, поэтому

$$k \frac{dL}{dt} = 20''.4451$$

Такимъ образомъ вліяніе аберраціи на прямыя восхожденія и склоненія свѣтилъ представится выраженіями

$$\alpha' - \alpha = -20''.445 . \sec \delta . [\cos L . \cos \omega . \cos \alpha + \sin L . \sin \alpha]$$
$$\delta' - \delta = \quad 20''.445 [\cos L . \sin \alpha . \sin \delta . \cos \omega - \cos \delta \sin \omega \cos L - \sin L \sin \delta \cos \alpha] \qquad (371)$$

Что касается до членовъ втораго порядка, находящихся въ выраженіяхъ (366) и (368), то они столь малы, что вводить ихъ въ вычисленіе почти никогда не представляется надобности.

Чтобы сдѣлать предыдущія выраженія болѣе удобными для вычисленія, положимъ въ нихъ

$$-20''.445 \sin L = h . \cos H$$
$$-20''.445 \cos L . \cos \omega = h . \sin H$$
$$h . \sin H . \operatorname{tang} \omega = i$$

тогда выраженія (371) примутъ видъ

$$(372)\qquad \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= h \,.\, \sin (H + \alpha) . \sec \delta \\ \delta' - \delta &= h \,.\, \cos (H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta \end{aligned}$$

Для вычисленія этихъ выраженій въ Nautical Almanac въ таблицѣ озаглавленной словами „Quantities for correcting the places of stars" даются величины H, $\log h$ и $\log i$ для каждаго дня года, именно для каждой гринвичской полуночи. Если при помощи такой таблицы величины H, $\log i$ и $\log h$ найдены, то вычисленіе вліянія аберраціи на склоненія и прямыя восхожденія свѣтилъ по выраженіямъ (372) можетъ быть сдѣлано весьма быстро.

Вмѣсто этихъ частныхъ таблицъ для каждаго отдѣльнаго года на основаніи выраженій, предложенныхъ Гауссомъ въ Monatl. Correspondenz von Zach, T. XVII, составлены общія таблицы аберраціи.

Для упрощенія вычисленія Гауссъ полагаетъ

$$\begin{aligned} 20''.445 \sin L &= a \,.\, \sin (L + A) \\ 20''.445 \cos L \,.\, \cos \omega &= a \,.\, \cos (L + A) \end{aligned}$$

тогда выраженія (371) могутъ быть представлены въ видѣ

$$(373)\qquad \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= - a \,.\, \sec \delta . \cos (L + A - \alpha) \\ \delta' - \delta &= - a \,.\, \sin \delta \sin (L + A - \alpha) - 10''.222 \sin \omega \cos (L + \delta) \\ &\qquad - 10''.222 \sin \omega \cos (L - \delta) \end{aligned}$$

Принимая за ω наклоненіе экватора къ эклиптикѣ въ началѣ 1850 года, Николаи по этимъ выраженіямъ Гаусса составилъ общія таблицы аберраціи. Въ одной изъ нихъ расположенной по аргументу долготы солнца даются величины A и $\log a$. Слѣдовательно при помощи такой таблицы легко вычисляется вліяніе аберраціи на прямое восхожденіе и первый членъ аберраціи въ склоненіи. Два другія члена аберраціи въ склоненіи прямо берутся изъ второй таблицы. Одинъ изъ этихъ членовъ находится по аргументу $L + \delta$ и другой—по аргументу $L - \delta$.

Общія таблицы Аберраціи составленныя Директоромъ мангеймской обсерваторіи Николаи помѣщены въ Sammlung von Hülfstafeln von Schumacher, neu herausgegeben von Warhstorff. pg. 110—111.

49. Если желаемъ имѣть выраженія представляющія собою вліяніе аберраціи на широты и долготы свѣтилъ, то стоитъ только въ уравненіяхъ (371) замѣтить α и δ чрезъ λ и β, гдѣ подъ λ разумѣемъ долготу свѣтила, а подъ β широту; при этомъ необходимо также принять $\omega = 0$, ибо этимъ и будетъ выражаться переходъ отъ экватора къ эклиптикѣ. Послѣ такой замѣны уравненія (371) принимаютъ видъ

$$(374)\qquad \begin{aligned} \lambda' - \lambda &= - 20''.445 \sec \beta \,.\, \cos (\lambda - L) \\ \beta' - \beta &= 20''.445 \sin \beta \,.\, \sin (\lambda - L) \end{aligned}$$

Прежде всего эти выраженія приводятъ насъ къ слѣдующимъ заключеніямъ. Если звѣзда находится въ соединеніи или противуположеніи съ Солнцемъ, то $\cos (\lambda - L) = \pm 1$ и $\sin (\lambda - L) = 0$. Такимъ образомъ во время сизигій вліяніе аберраціи на долготу достигаетъ наибольшаго положительнаго или отрицательнаго значенія, а вліяніе на широту обращается въ нуль, т. е. широта имѣетъ въ это время среднее значеніе. Если звѣзда находится въ той или другой квадратурѣ съ Солнцемъ, то $\cos (\lambda - L) = 0$ и

$\sin(\lambda - L) = \pm 1$, а потому въ квадратурахъ вліяніе аберраціи на долготу равно нулю, т. е. во время квадратуръ долгота свѣтила имѣетъ среднее значеніе, а широта достигаетъ наибольшей или наименьшей величины.

Если обратимся теперь къ результатамъ наблюденій Брадлея надъ звѣздою γ Draconis, то увидимъ, что они совершенно объясняются явленіемъ аберраціи. Въ срединѣ Декабря звѣзда γ Draconis находится въ соеднненіи съ Солнцемъ, въ срединѣ Іюня въ противуположеніи и въ эти времена по наблюденіямъ Брадлея упомянутая звѣзда, согласно съ тѣмъ, что мы сказали выше, дѣйствительно имѣла среднюю широту. Въ срединѣ Марта и Сентября γ Draconis находится въ квадратурахъ съ Солнцемъ и изъ наблюденій Брадлея выходитъ, что въ срединѣ Марта широта звѣзды была наименьшая, а въ срединѣ Сентября—наибольшая.

Разсмотримъ теперь видъ кривой линіи описываемой въ теченіи года свѣтиломъ на сферѣ небесной вслѣдствіе аберраціи.

Предположимъ, что чрезъ среднее положеніе звѣзды, т. е. чрезъ положеніе освобожденное отъ аберраціи, къ видимой сферѣ небесной проведена касательная плоскость. По малости размѣровъ кривой описываемой свѣтиломъ вслѣдствіе аберраціи мы можемъ допустить, что на всемъ пространствѣ этой кривой сфера сливается съ касательною плоскостію. При этомъ кругъ широты и кругъ параллельный эклиптикѣ, проходящіе чрезъ среднее положеніе свѣтила, мы можемъ принять за оси координатъ на касательной плоскости. Примемъ кругъ широты за ось y, а кругъ параллельный эклиптикѣ за ось x. Назовемъ координаты видимаго положенія звѣзды относительно такой системы осей чрезъ x и y. Если означимъ постоянную величину аберраціи чрезъ c, то, какъ мы видѣли,

$$\lambda' - \lambda = - c . \sec\beta . \cos(\lambda - L)$$
$$\beta' - \beta = \quad c . \sin\beta . \sin(\lambda - L)$$

Въ нашемъ случаѣ ордината звѣзды будетъ выражаться разностію видимой и истинной широты свѣтила, т. е. $y = \beta' - \beta$; а абсциссою будетъ дуга малаго круга параллельнаго эклиптикѣ. Дуга эклиптики соотвѣтствующая дугѣ этого малаго круга представляетъ собою разность видимой и истинной долготы свѣтила. Слѣдовательно

$$x = (\lambda' - \lambda)\cos\beta$$

Вносся эти величины x и y въ предыдущія выраженія аберраціи, получимъ

$$x = - c . \cos(\lambda - L)$$
$$y = \quad c . \sin\beta . \sin(\lambda - L)$$

Помножимъ первое изъ этихъ уравненій на $\sin\beta$, возведемъ оба ихъ въ квадратъ и, сложивъ, получимъ

$$x^2 . \sin^2\beta + y^2 = c^2 . \sin^2\beta$$

или

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 . \sin^2\beta} = 1.$$

Это есть уравненіе эллипсиса, большая полуось котораго равна c, а малая— $c . \sin\beta$. Когда звѣзда находится въ полюсѣ эклиптики, тогда $\beta = 90^0$ и уравненіе

описываемой кривой обращается для этого случая въ $x^2+y^2=c^2$, т. е. въ уравненіе круга, радіусъ котораго есть c. Если звѣзда находится въ плоскости эклиптики, то $\beta=0$ и малая ось $c.\sin\beta$ эллипсиса обращается въ нуль, а самъ эллипсисъ—въ прямую линію, равную по длинѣ $2c$. И такъ заключаемъ, что звѣзда расположенная въ полюсѣ эклиптики вслѣдствіе аберраціи описываетъ кругъ, радіусъ котораго равенъ постоянной величинѣ аберраціи. Звѣзды, широты которыхъ заключаются между 0° и 90° описываютъ на сферѣ небесной отъ аберраціи эллипсисы съ полуосями c и $c.\sin\beta$. Звѣзды расположенныя въ плоскости эклиптики описываютъ отъ аберраціи прямую и проходятъ по эклиптикѣ дуги $20''.445$ по обѣимъ сторонамъ своего средняго положенія.

50. Если свѣтило имѣетъ собственное движеніе, какъ напр. планета или комета, то для полнаго освобожденія положенія такого свѣтила отъ аберраціи недостаточно того пріема, который мы теперь изложили. Въ самомъ дѣлѣ мѣсто движущагося свѣтила измѣняется въ теченіи того промежутка времени, который употребляетъ свѣтъ для прохожденія отъ этого свѣтила до земли. Предположимъ, что свѣтъ выходитъ отъ планеты въ моментъ T и достигаетъ объектива трубы наблюдателя въ моментъ t. Пусть P и p (фиг. 30) будутъ мѣста занимаемыя планетою въ разсматриваемые моменты T и t. Допустимъ, что во время T для наблюдателя находящагося въ покоѣ свѣтило при мгновенномъ распространеніи свѣта видимо по направленію aP; но чтобы видѣть свѣтило съ подвижной въ пространствѣ земли, мы должны такъ наклонить трубу къ направленію движенія земли, чтобы отрѣзки ab' и bb' находились между собою въ отношеніи скоростей свѣта и земли. И такъ во время t, если бы свѣтило не имѣло собственнаго движенія, мы увидили бы его по направленію baP', при этомъ видимое во время t положеніе P' соотвѣтствовало бы дѣйствительному P. Такимъ образомъ, освобождая по изложенному пріему наблюдаемое положеніе P' отъ вліянія аберраціи, мы перешли бы отъ координатъ точки P' къ координатамъ точки P, тогда какъ въ случаѣ движущагося свѣтила должны бы были перейти къ координатамъ точки p, ибо предполагаемъ, что въ моментъ t свѣтило занимаетъ не положеніе P, но положеніе p, т. е., что въ то время какъ свѣтъ достигъ отъ свѣтила до объектива трубы, само свѣтило перемѣстилось изъ точки P въ точку p. Слѣдовательно, освобождая видимое положеніе планеты или кометы отъ аберраціи неподвижныхъ звѣздъ (abertatio fixarum), мы не получимъ истиннаго положенія свѣтила. Предположимъ, что въ моментъ t', когда свѣтъ планеты или кометы достигаетъ окуляра трубы, этотъ послѣдній имѣетъ положеніе b', а направленіе трубы въ моментъ t' пусть будетъ $a'b'$. Такъ какъ $b'aP$ есть направленіе свѣтоваго луча и пространство aP свѣтъ проходитъ во время $t-T$, пространство же ab' онъ проходитъ во время $t'-t$, то

$$\frac{Pa}{ab'}=\frac{t-T}{t'-t}$$

Предположимъ, что объективъ въ то время, какъ свѣтъ вышелъ отъ свѣтила, т. е. во время T, имѣлъ нѣкоторое положеніе A, тогда точки A, a, a' представятъ собою положенія объектива въ моменты T, t и t' и такъ какъ въ промежутокъ времени $t'-T$ движеніе земли можно разсматривать какъ прямолинейное и равномѣрное, то эти три точки будутъ лежать на одной прямой и при томъ

$$\frac{Aa}{aa'} = \frac{t - T}{t' - t}$$

а потому

$$\frac{Pa}{ab'} = \frac{Aa}{aa'}$$

Слѣдовательно треугольники AaP и $ab'a'$ содержащіе равные углы при a подобны и напраленія AP и $a'b'$ параллельны. Параллельны также и направленія AP съ ab, ибо мы предполагаемъ, что труба перемѣщается параллельно самой себѣ. Но мы видѣли, что AP есть направленіе къ истинному положенію соотвѣтствующему времени T, а направленіе $a'b'$ опредѣляетъ собою видимое положеніе свѣтила для времени t' и такъ какъ эти направленія, по доказанному теперь, параллельны, то заключаемъ, что видимое положеніе свѣтила, соотвѣтствующее времени t', совпадаетъ съ истиннымъ направленіемъ соотвѣтствующимъ времени T, т. е. моменту, который предшествовалъ моменту наблюденія t' на промежутокъ времени употребляемый свѣтомъ для достиженія отъ свѣтила къ глазу наблюдателя.

Основываясь на этомъ, мы можемъ освобождать положеніе свѣтила отъ аберраціи вычисленіемъ по данному видимому положенію свѣтила его истиннаго мѣста соотвѣтствующаго не времени наблюденія, а извѣстному предшествующему моменту.

И такъ, основываясь на параллелизмѣ линій AP и $a'b'$ (фиг. 30), мы можемъ установить слѣдующія три правила для освобожденія положенія свѣтила съ собственнымъ движеніемъ отъ вліянія аберраціи.

I. Вычтемъ изъ времени наблюденія промежутокъ времени употребляемый свѣтиломъ для достиженія отъ планеты или кометы къ землѣ и будемъ считать наблюдаемое положеніе за истинное, соотвѣтствующее такимъ образомъ вычисленному моменту времени.

Употребляя этотъ способъ, мы вовсе не измѣняемъ наблюдаемыхъ координатъ свѣтила, но только считаемъ, что они были наблюдаемы нѣсколько раньше дѣйствительнаго времени наблюденія. Если по этому способу хотимъ по истинному положенію свѣтила опредѣлить видимое для даннаго момента t, то вычтемъ изъ t промежутокъ времени употребленный свѣтомъ для прохожденія отъ свѣтила къ землѣ и тогда получимъ время T. Вычисленное по эфемеридамъ для этого момента T истинное положеніе будетъ искомымъ видимымъ для даннаго времени t.

II. Для освобожденія отъ вліянія аберраціи положенія свѣтила имѣющаго собственное движеніе, на основаніи той же теоремы о параллелизмѣ линій AP и $a'b'$, употребляется еще слѣдующій способъ. Зная разстояніе свѣтила отъ земли въ моментъ наблюденія, при помощи его вычислимъ время, которое употребляетъ свѣтъ для прохожденія отъ планеты или кометы до земли. Означимъ этотъ промежутокъ времени чрезъ τ. Если намъ извѣстны измѣненія координатъ планеты или кометы въ теченіи единицы времени, то, умноживъ эти измѣненія на τ, получимъ измѣненія координатъ въ теченіи промежутка τ. Придавъ эти измѣненія со знакомъ къ видимымъ координатамъ, соотвѣтствующимъ моменту наблюденія, или, что тоже, къ истиннымъ соотвѣтствующимъ времени $t - \tau = T$, гдѣ подъ t разумѣемъ время наблюденія, получимъ истинныя координаты соотвѣтствующія моменту наблюденія t.

Для рѣшенія обратнаго вопроса, стоитъ только вычислить для даннаго времени t истинныя координаты и разстояніе планеты или кометы отъ земли; при помощи по-

слѣдняго — найти промежутокъ времени τ. Зная за тѣмъ измѣненія координатъ въ единицу времени, можемъ вычислить измѣненія въ теченіи промежутка τ.

Вычитая эти измѣненія изъ координатъ истиннаго положенія соотвѣтствующаго времени t, получимъ истинное положеніе соотвѣтствующее моменту T или, что все равно, искомое видимое положеніе для времени t.

III. Наконецъ послѣдній предложенный Гауссомъ способъ освобожденія отъ аберраціи положеній свѣтилъ имѣющихъ собственное движеніе заключается въ слѣдующемъ. Если во время t свѣтило наблюдается по направленію ab (фиг. 30), то освободивъ наблюдаемое положеніе отъ aberratio fixarum, получимъ направленіе aP опредѣляющее собою положеніе свѣтила въ P, которое можно считать истиннымъ положеніемъ свѣтила для времени t, разсматриваемымъ изъ положенія земли въ a. При этомъ приходится считать, что наблюденіе было произведено изъ точки внѣ земли, такъ что когда земля во время t была въ b, наблюдатель находился уже въ b' и видѣлъ свѣтило по направленію $b'P$. Итакъ для освобожденія положенія свѣтила отъ аберраціи по этому способу разсматриваемъ освобожденное отъ aberratio fixarum положеніе свѣтила какъ истинное положеніе соотвѣтствующее времени T, но наблюдаемое изъ положенія земли соотвѣтствующаго моменту t. Этотъ способъ употребляется обыкновенно въ томъ случаѣ, когда неизвѣстно разстояніе свѣтила отъ земли, что обыкновенно имѣетъ мѣсто при наблюденіяхъ вновь открытыхъ планетъ и кометъ.

Для рѣшенія обратнаго вопроса по этому третьему способу поступимъ такимъ образомъ: вычислимъ геліоцентрическое положеніе центра земли для даннаго времени t, т. е. вычислимъ положеніе точки a (фиг. 30), кромѣ того вычислимъ геліоцентрическое положеніе планеты или кометы для времени T, т. е. положеніе точки P. По этимъ геліоцентрическимъ положеніямъ, какъ увидимъ ниже, есть возможность вычислить геоцентрическое мѣсто планеты или кометы, это послѣднее соотвѣтствующее времени T будетъ въ нашемъ случаѣ опредѣляться направленіемъ Pa, по которому разсматривается свѣтило изъ положенія земли во время t. Придавъ къ этимъ полученнымъ теперь геоцентрическимъ координатамъ аберрацію неподвижныхъ звѣздъ, представляющуюся угломъ $ab'a'$, получимъ искомыя видимыя координаты свѣтила соотвѣтствующія времени t.

Эти три правила освобожденія положеній движущихся свѣтилъ отъ аберраціи, предложенные Гауссомъ *), едвали не съ большею ясностію могутъ быть получены на основаніи слѣдующихъ аналитическихъ соображеній.

Если свѣтило собственнымъ движеніемъ измѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ, въ то время какъ свѣтъ достигаетъ отъ него до глаза наблюдателя, то чтобы сдѣлать уравненія (367) и (369) примѣнимыми къ этому случаю, стоитъ только ввести въ нихъ вмѣсто абсолютныхъ скоростей глаза наблюдателя $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ относительныя, т. е. стоитъ только отнести движеніе земли не къ неподвижному началу координатъ, а къ подвижной въ пространствѣ планетѣ или кометѣ. Въ этомъ случаѣ относительная скорость земли въ сочетаніи со скоростію свѣта опредѣлитъ уголъ, который должна составлять труба съ истиннымъ направленіемъ свѣтоваго луча для того, чтобы свѣтило было видимо по направленію оптической оси трубы.

---

*) См. C. F. Gauss. Theoria motus corporum coelestium pg. 68, 69.

Назовемъ координаты разсматриваемаго свѣтила, планеты или кометы, относительно первоначально принятой неподвижной системы осей чрезъ ξ, η, ζ и координаты свѣтила относительно осей параллельныхъ неподвижнымъ, но имѣющихъ начало въ центрѣ окуляра трубы чрезъ X, Y, Z, тогда

$$\xi = x + X; \qquad \eta = y + Y; \qquad \zeta = z + Z$$

Проложенія на оси координатъ скорости свѣтила относительно земли будутъ очевидно

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d\xi}{dt} - \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d\eta}{dt} - \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} - \frac{dz}{dt}$$

а проложенія на тѣже оси скорости земли относительно планеты будутъ очевидно

$$-\frac{dX}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt}$$

$$-\frac{dY}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{d\eta}{dt}$$

$$-\frac{dZ}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{d\zeta}{dt}$$

Внося эти величины относительныхъ скоростей въ уравненія (367) и (369) вмѣсто абсолютныхъ $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, получимъ

$$\alpha' - \alpha = \frac{\sec\delta}{\mu . \sin 1''}\left[\left(\frac{dy}{dt} - \frac{d\eta}{dt}\right)\cos\alpha - \left(\frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right)\sin\alpha\right]$$

$$\delta' - \delta = -\frac{1}{\mu \sin 1''}\left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right)\sin\delta . \cos\alpha + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{d\eta}{dt}\right)\sin\delta . \sin\alpha - \left(\frac{dz}{dt} - \frac{d\zeta}{dt}\right)\cos\delta\right] \qquad (375)$$

Назовемъ разстояніе свѣтила отъ земли чрезъ Δ, его геоцентрическія прямое восхожденіе и склоненіе чрезъ α и δ, тогда

$$X = \Delta . \cos\alpha . \cos\delta$$

$$Y = \Delta . \sin\alpha . \cos\delta$$

$$Z = \Delta . \sin\delta$$

а потому

$$\xi = \Delta . \cos\delta . \cos\alpha + x$$

$$\eta = \Delta . \cos\delta . \sin\alpha + y \qquad (376)$$

$$\zeta = \Delta . \sin\delta + z$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt} = \Delta.\cos\alpha.\sin\delta\frac{d\delta}{dt}\cdot\sin 1'' + \Delta\sin\alpha.\cos\delta\frac{d\alpha}{dt}\cdot\sin 1'' - \cos\alpha.\cos\delta\frac{d\Delta}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{d\eta}{dt} = \Delta.\sin\alpha.\sin\delta\frac{d\delta}{dt}\cdot\sin 1'' - \Delta.\cos\delta.\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}\cdot\sin 1'' - \cos\delta.\sin\alpha\frac{d\Delta}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} - \frac{d\zeta}{dt} = -\Delta.\cos\delta\frac{d\delta}{dt}\cdot\sin 1'' - \sin\delta\cdot\frac{d\Delta}{dt}$$

Посредствомъ этихъ выраженій легко составляемъ

$$\left(\frac{dy}{dt} - \frac{d\eta}{dt}\right)\cos\alpha - \left(\frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right)\sin\alpha = -\Delta\cos\delta\frac{d\alpha}{dt}\cdot\sin 1''$$

$$\left(\frac{dx}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\right)\sin\delta.\cos\alpha + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{d\eta}{dt}\right)\sin\delta.\sin\alpha - \left(\frac{dz}{dt} - \frac{d\zeta}{dt}\right)\cos\delta = \Delta\frac{d\delta}{dt}\cdot\sin 1''$$

а потому уравненія (375) принимаютъ видъ

$$\alpha' - \alpha = -\frac{\Delta}{\mu}\cdot\frac{d\alpha}{dt}$$

$$\delta' - \delta = -\frac{\Delta}{\mu}\cdot\frac{d\delta}{dt}$$

Но $\frac{\Delta}{\mu}$ есть тотъ промежутокъ времени, который употребляетъ свѣтъ для прохожденія отъ планеты или кометы къ землѣ. Слѣдовательно, если назовемъ, какъ прежде, чрезъ T тотъ моментъ, въ который извѣстная свѣтовая волна выходитъ отъ планеты или кометы и чрезъ t моментъ, въ который она достигаетъ глаза наблюдателя, то

$$\frac{\Delta}{\mu} = t - T$$

а потому

$$\alpha' = \alpha - (t - T)\frac{d\alpha}{dt}$$

(377)

$$\delta' = \delta - (t - T)\frac{d\delta}{dt}$$

Такъ какъ производныя $\frac{d\alpha}{dt}$ и $\frac{d\delta}{dt}$ представляютъ измѣненія координатъ въ единицу времени, то эти уравненія показываютъ, что координаты видимаго положенія равны координатамъ истиннаго положенія, соотвѣтствующимъ времени T. Такимъ образомъ уравненіями (377) подтверждаются первое и второе Гауссово правило освобожденія отъ аберраціи.

Если напишемъ уравненія (375) въ видѣ

$$\alpha' - \alpha = \frac{\sec\delta}{\mu.\sin 1''}\left[\frac{dy}{dt}\cdot\cos\alpha - \frac{dx}{dt}\cdot\sin\alpha\right] + \frac{\sec\delta}{\mu\sin 1''}\left[\frac{d\xi}{dt}\cdot\sin\alpha - \frac{d\eta}{dt}\cdot\cos\alpha\right]$$

$$\delta' - \delta = -\frac{1}{\mu.\sin 1''}\left[\frac{dx}{dt}\cdot\sin\delta.\cos\alpha + \frac{dy}{dt}\cdot\sin\delta.\sin\alpha - \frac{dz}{dt}\cdot\cos\delta\right]$$

$$-\frac{1}{\mu.\sin 1''}\left[\frac{d\zeta}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\cdot\sin\delta.\cos\alpha - \frac{d\eta}{dt}\cdot\sin\delta.\sin\alpha\right]$$

то сравнивая эти выраженія съ уравненіями (367) и (369), убѣдимся, что первые члены вторыхъ частей представляютъ собою вліяніе aberratio fixarum на положеніе свѣтила. Если назовемъ числовыя величины этого вліянія на склоненіе и прямое восхожденіе свѣтила чрезъ $D\delta$ и $D\alpha$, то предыдущія уравненія будутъ имѣть видъ

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= D\alpha + \frac{\sec\delta}{\mu . \sin 1''}\left[\frac{d\xi}{dt}\cdot\sin\alpha - \frac{d\eta}{dt}\cdot\cos\alpha\right] \\ \delta' - \delta &= D\delta - \frac{1}{\mu . \sin 1''}\left[\frac{d\zeta}{dt}\cdot\cos\delta - \frac{d\xi}{dt}\cdot\sin\delta\cos\alpha - \frac{d\eta}{dt}\cdot\sin\delta.\sin\alpha\right] \end{aligned} \tag{378}$$

Члены, зависящіе отъ производныхъ $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, очевидно представляютъ собою часть аберраціи, объусловливающуюся исключительно собственнымъ движеніемъ свѣтила, а не движеніемъ земли. Поэтому, чтобы найти величины производныхъ $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, будемъ дифференцировать уравненія (376), измѣняя въ нихъ только координаты свѣтила и принимая за постоянныя координаты земли. При этомъ дифференцированіи производныя координатъ α и δ въ отличіе отъ производныхъ полученныхъ при измѣненіи x, y, z означимъ чрезъ $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ и $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)$, тогда

$$\frac{d\xi}{dt} = \cos\delta.\cos\alpha\left(\frac{d\Delta}{dt}\right) - \Delta.\cos\delta.\sin\alpha\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\cdot\sin 1'' - \Delta.\cos\alpha.\sin\delta\left(\frac{d\delta}{dt}\right)\cdot\sin 1''$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \cos\delta.\sin\alpha\left(\frac{d\Delta}{dt}\right) + \Delta.\cos\delta.\cos\alpha\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\sin 1'' - \Delta.\sin\alpha.\sin\delta\left(\frac{d\delta}{dt}\right)\cdot\sin 1''$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \sin\delta\left(\frac{d\Delta}{dt}\right) + \Delta.\cos\delta\left(\frac{d\delta}{dt}\right)\cdot\sin 1''$$

откуда

$$\frac{d\xi}{dt}\cdot\sin\alpha - \frac{d\eta}{dt}\cdot\cos\alpha = -\Delta.\cos\delta\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\cdot\sin 1''$$

$$\frac{d\zeta}{dt}\cdot\cos\delta - \frac{d\xi}{dt}\cdot\sin\delta.\cos\alpha - \frac{d\eta}{dt}\cdot\sin\delta.\sin\alpha = \Delta\left(\frac{d\delta}{dt}\right).\sin 1''$$

Внося это въ уравненія (378), получимъ

$$\alpha' - D\alpha = \alpha - \frac{\Delta}{\mu}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$$

$$\delta' - D\delta = \delta - \frac{\Delta}{\mu}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)$$

откуда, удерживая предыдущія выраженія, получимъ

$$\alpha' - D\alpha = \alpha - (t - T)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$$

$$\delta' - D\delta = \delta - (t - T)\left(\frac{d\delta}{dt}\right)$$

уравненія, которыя показываютъ, что видимыя координаты свѣтила, соотвѣтствующія

времени t и исправленныя отъ аберраціи неподвижныхъ звѣздъ, должны быть приняты за истинныя координаты, но соотвѣтствующія времени T. Этимъ слѣдовательно аналитически подтверждается третье правило Гаусса, данное имъ для освобожденія положенія движущагося свѣтила отъ вліянія аберраціи.

51. Кромѣ поступательнаго движенія по орбитѣ земля имѣетъ еще вращательное около оси и такъ какъ скорость вращательнаго движенія земли не есть величина исчезающая въ сравненіи со скоростію свѣта, то вращеніе земли также производитъ аберрацію, которая въ отличіе отъ аберраціи, обусловливающейся поступательнымъ движеніемъ земли, называется *суточною аберраціею*.

Чтобы найти выраженія представляющія вліяніе суточной аберраціи на координаты свѣтилъ, мы будемъ пользоваться опять общими уравненіями (367) и (369), внося только въ нихъ вмѣсто производныхъ $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ проложенія на оси координатъ той скорости, которую имѣетъ мѣсто наблюденія при вращеніи земли около оси.

Примемъ за плоскость xy плоскость экватора, ось x проведемъ черезъ точку весенняго равноденствія, ось z направимъ въ сѣверный полюсъ экватора, за начало координатъ примемъ центръ земли. Если назовемъ разстояніе мѣста наблюденія отъ центра земли чрезъ r, геоцентрическую широту того же мѣста чрезъ φ' и считаемое въ немъ звѣздное время чрезъ θ, то координаты мѣста наблюденія относительно принятой системы осей представятся очевидно въ формѣ

$$x = r \,.\, \cos\varphi' \,.\, \cos\theta$$
$$y = r \,.\, \cos\varphi' \,.\, \sin\theta$$
$$z = r \,.\, \sin\varphi'$$

откуда прямо находимъ

$$\frac{dx}{dt} = -r \,.\, \cos\varphi' \,.\, \sin\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \sin 1''$$
$$\frac{dy}{dt} = \quad r \,.\, \cos\varphi' \,.\, \cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \sin 1''$$
$$\frac{dz}{dt} = 0$$

Внося эти величины въ упомянутыя общія уравненія, получимъ

(379)
$$\alpha' - \alpha = \frac{r}{\mu} \cdot \cos\varphi' . \sec\delta . \cos(\theta - \alpha) \cdot \frac{d\theta}{dt}$$
$$\delta' - \delta = \frac{r}{\mu} \cdot \cos\varphi' . \sin\delta . \sin(\theta - \alpha) \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Выше мы приняли $\frac{dL}{dt}$ за скорость земли по орбитѣ; если при этомъ означимъ чрезъ T число звѣздныхъ сутокъ, заключающихся въ одномъ обращеніи земли около Солнца, то

$$\frac{d\theta}{dt} = T \,.\, \frac{dL}{dt}$$

ибо въ то время какъ центръ земли сдѣлаетъ одинъ полный оборотъ около Солнца, всякая точка земли сдѣлаетъ T оборотовъ около оси и слѣдовательно угловая скорость $\frac{d\theta}{dt}$ всякой точки поверхности земли будетъ въ T разъ болѣе угловой скорости центра земли по орбитѣ. Разсматривая годичную аберрацію, мы положили

$$\frac{1}{\mu} = \frac{k}{R}$$

и кромѣ того сказали, что

$$k\frac{dL}{dt} = 20''.445$$

Слѣдовательно

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\theta}{dt} = T\frac{k}{R}\frac{dL}{dt} = 20''.445\frac{T}{R}$$

R представляетъ здѣсь разстояніе земли отъ солнца, а потому, назвавъ горизонтальный параллаксъ солнца чрезъ π, получимъ

$$r = R.\sin\pi$$

Слѣдовательно

$$\frac{r}{\mu}\frac{d\theta}{dt} = 20''.445\,.\,T.\pi.\sin 1''$$

принимая

$$\pi = 8''.85; \quad T = 366.256$$

найдемъ

$$\frac{r}{\mu}\frac{d\theta}{dt} = 0''.3212$$

а потому уравненія (379) даютъ

$$\left.\begin{aligned}\alpha' - \alpha &= 0''.3212\cos\varphi'\sec\delta\cos(\theta-\alpha)\\ \delta' - \delta &= 0''.3212\cos\varphi'\sin\delta\sin(\theta-\alpha)\end{aligned}\right\} \quad (380)$$

Во время кульминаціи $\theta = \alpha$, слѣдовательно вліяніе суточной аберраціи на прямое восхожденіе кульминирующаго свѣтила представится въ формѣ

$$\alpha' - \alpha = 0''.3212\cos\varphi'\sec\delta$$

Мы видимъ кромѣ того, что въ меридіанѣ вліяніе суточной аберраціи на прямое восхожденіе свѣтила достигаетъ наибольшей величины, а вліяніе на склоненіе равно тогда нулю.

Подобно предыдущему можемъ опредѣлить видъ кривой описываемой свѣтиломъ вслѣдствіе суточной аберраціи, но не входя въ подробности, по сходству уравненій (374) и (380) прямо заключаемъ, что отъ аберраціи, обусловливающейся вращательнымъ движеніемъ земли, свѣтило въ теченіи сутокъ описываетъ около своего средняго положенія эллипсисъ, большая полуось котораго есть $0''.3212.\cos\varphi'$, а малая $0''.3212\cos\varphi'\sin\delta$; но если свѣтило находится въ экваторѣ, то $\delta = 0$ и малая ось обращается въ нуль, свѣтило же въ теченіи сутокъ движется тогда по малой прямой линіи. Если свѣтило находится въ полюсѣ экватора, тогда $\delta = 90^0$ и свѣ-

тѣло по причинѣ суточной аберраціи описываетъ кругъ, діаметръ котораго есть $0''.3212 \cos\varphi'$. Большая ось эллипсиса годичной аберраціи параллельна эклиптикѣ, большая же ось эллипсиса описываемаго вслѣдствіе суточной аберраціи параллельна экватору.

52. Если размѣры земной орбиты не суть исчезающія величины въ сравненіи съ разстояніями отдѣляющими насъ отъ неподвижныхъ звѣздъ, то наблюдатель, перенесенный на одно изъ такихъ свѣтилъ, увидѣлъ бы радіусъ земной орбиты подъ извѣстнымъ угломъ; поэтому и наблюдатель изъ различныхъ точекъ земной орбиты видѣлъ бы одну и ту же звѣзду въ теченіи однаго года въ различныхъ мѣстахъ сферы небесной, симметрично расположенныхъ относительно той точки этой сферы, въ которой представлялась бы звѣзда наблюдателю, если бы онъ находился на солнцѣ. Уголъ, подъ которымъ съ какой либо неподвижной звѣзды видѣнъ радіусъ земной орбиты, называется *годичнымъ параллаксомъ* этой звѣзды. Если такой параллаксъ существуетъ, то онъ долженъ быть причиною для насъ извѣстной разности видимыхъ и истинныхъ положеній звѣзды.

И такъ поступательнымъ движеніемъ земли около солнца кромѣ аберраціи должна обусловливаться еще другая причина разности видимыхъ и истинныхъ положеній звѣздъ, объясняющаяся годичнымъ параллаксомъ. Мы уже видѣли a priori какъ должно уклоняться свѣтило отъ средняго положенія въ теченіи года, если видимое мѣсто его подвержено вліянію годичнаго параллакса. Не трудно подтвердить эти заключенія аналитически и вмѣстѣ съ тѣмъ показать отъ какихъ величинъ зависитъ числовая величина этого уклоненія.

Разсмотримъ сначала вліяніе годичнаго параллакса на широты и долготы неподвижныхъ звѣздъ. Примемъ плоскость эклиптики за плоскость xy, направимъ ось x въ точку весенняго равноденствія, начало координатъ пусть будетъ въ центрѣ земли. За начало другой подобной же системы, съ осями параллельными первой, примемъ центръ солнца.

Назовемъ координаты звѣзды относительно центра солнца чрезъ x, y, z,—относительно центра земли чрезъ x', y', z' и координаты центра солнца относительно центра земли чрезъ X, Y, Z, тогда

$$x' = x + X, \qquad y' = y + Y, \qquad z' = z + Z$$

Назовемъ разстояніе звѣзды отъ земли чрезъ Δ' и отъ солнца чрезъ Δ, геоцентрическую широту и долготу звѣзды—чрезъ β' и λ', а тѣже геліоцентрическія координаты чрезъ β и λ, тогда

$$\begin{aligned} x' &= \Delta'.\cos\beta'.\cos\lambda'; & x &= \Delta.\cos\beta.\cos\lambda \\ y' &= \Delta'.\cos\beta'\sin\lambda'; & y &= \Delta.\cos\beta.\sin\lambda \\ z' &= \Delta'.\sin\beta' & z &= \Delta.\sin\beta \end{aligned}$$

Если назовемъ разстояніе земли отъ солнца чрезъ R и долготу солнца чрезъ L, то

$$\begin{aligned} X &= R.\cos L \\ Y &= R.\sin L \\ Z &= 0 \end{aligned}$$

а потому предыдущія соотношенія геоцентрическихъ и геліоцентрическихъ координатъ даютъ

$$\begin{aligned} \Delta' \cos\beta' \cos\lambda' &= \Delta \cos\beta \,.\, \cos\lambda + R \,.\, \cos L \\ \Delta' \cos\beta' \sin\lambda' &= \Delta \cos\beta \,.\, \sin\lambda + R \,.\, \sin L \\ \Delta' \sin\beta' &= \Delta \sin\beta \end{aligned} \tag{381}$$

помножимъ первое изъ этихъ уравненій на $\cos\lambda$, второе на $\sin\lambda$ и возьмемъ сумму произведеній. Затѣмъ помножимъ первое на $\sin\lambda$, второе на $\cos\lambda$, вычтемъ первое произведеніе изъ втораго и тогда получимъ

$$\begin{aligned} \Delta' . \cos\beta' . \cos(\lambda' - \lambda) &= \Delta \,.\, \cos\beta + R \,.\, \cos(\lambda - L) \\ \Delta' . \cos\beta' . \sin(\lambda' - \lambda) &= - R \sin(\lambda - L) \end{aligned} \tag{382}$$

откуда

$$\operatorname{tang}(\lambda' - \lambda) = \frac{-\dfrac{R}{\Delta \,.\, \cos\beta}\sin(\lambda - L)}{1 + \dfrac{R}{\Delta \,.\, \cos\beta}\cos(\lambda - L)}$$

разлагая это въ рядъ и ограничиваясь первымъ членомъ разложенія, находимъ

$$\lambda' - \lambda = -\frac{R}{\Delta \,.\, \sin 1''} \sec\beta \,.\, \sin(\lambda - L) \tag{383}$$

Вносся въ уравненія (382) вмѣсто $\cos(\lambda' - \lambda)$ величину $1 - 2\sin^2\left(\dfrac{\lambda' - \lambda}{2}\right)$ и затѣмъ умножая и дѣля въ полученномъ выраженіи послѣдній членъ на $\cos\dfrac{\lambda' - \lambda}{2}$, имѣемъ

$$\Delta' \cos\beta' = \Delta \,.\, \cos\beta + R \,.\, \cos(\lambda - L) + \Delta' \cos\beta' \sin(\lambda' - \lambda) \operatorname{tang}\frac{\lambda' - \lambda}{2}$$

Если внесемъ сюда вмѣсто $\Delta' . \cos\beta' \sin(\lambda' - \lambda)$ его величину изъ втораго изъ уравненій (382), то найдемъ

$$\Delta' \cos\beta' = \Delta \,.\, \cos\beta + R \,.\, \cos(\lambda - L) - R \sin(\lambda - L) \operatorname{tang}\frac{\lambda' - \lambda}{2}$$

но по выраженію (383) можно принять

$$\operatorname{tang}\frac{\lambda' - \lambda}{2} = \frac{\lambda' - \lambda}{2} \cdot \sin 1'' = -\frac{R}{2\Delta}\sec\beta \,.\, \sin(\lambda - L)$$

Внося это въ предыдущее уравненіе, получимъ

$$\Delta' . \cos\beta' = \Delta \cos\beta + R \,.\, \cos(\lambda - L) + \frac{R^2}{2\Delta}\sec\beta \sin^2(\lambda - L) \tag{384}$$

Положимъ для краткости

$$\frac{R^2}{2\Delta}\sec\beta \sin^2(\lambda - L) = A$$

По извѣстному сочетанію третьяго изъ уравненій (381) съ уравненіемъ (384) находимъ

$$\Delta'.\cos(\beta'-\beta)=\Delta+R.\cos\beta\cos(\lambda-L)+A.\cos\beta$$
$$\Delta'.\sin(\beta'-\beta)=-R.\sin\beta\cos(\lambda-L)-A.\sin\beta$$

откуда

$$\operatorname{tang}(\beta'-\beta)=\frac{-\frac{R}{\Delta}\sin\beta\cos(\lambda-L)-\frac{A}{\Delta}\sin\beta}{1+\frac{R}{\Delta}\cos(\lambda-L)+\frac{A}{\Delta}\cos\beta}$$

по $\frac{A}{\Delta}$ есть малая величина втораго порядка сравнительно съ величиною $\frac{R}{\Delta}$, а потому пренебрегая ею и ограничиваясь вообще малыми величинами перваго порядка, получимъ

(385) $$\beta'-\beta=-\frac{R}{\Delta.\sin 1''}\sin\beta\cos(\lambda-L)$$

Предположимъ, что TAB (фиг. 31) есть земная орбита, которую примемъ за круговую, описанную радіусомъ a равнымъ среднему разстоянію земли отъ солнца, пусть въ C находится центръ солнца, въ S неподвижная звѣзда. Соединимъ центръ солнца съ звѣздой и къ прямой CS проведемъ въ плоскости земной орбиты перпендикулярную линію TC, тогда уголъ при S въ прямоугольномъ треугольникѣ TSC будетъ годичный параллаксъ звѣзды, который мы означимъ чрезъ π. Помня при этомъ, что $TC=a$, $SC=\Delta$, получимъ $a=\Delta.\operatorname{tang}\pi$; откудв, принимая $a=1$, находимъ

$$\pi.\sin 1''=\frac{1}{\Delta}$$

послѣ этого уравненіямъ (383) и (385) можно дать видъ

(386) $$\lambda'-\lambda=-\pi.R\sec\beta\sin(\lambda-L)$$
$$\beta'-\beta=-\pi.R\sin\beta\cos(\lambda-L)$$

Сравнивая эти уравненія съ уравненіями (374), видимъ, что вліяніе аберраціи на положеніе свѣтила обратно съ вліяніемъ годичнаго параллакса. Въ самомъ дѣлѣ, когда звѣзда находится въ соединеніи или противуположеніи съ солнцемъ, тогда $\lambda=L$, или $\lambda-L=180^0$ и тогда вліяніе аберраціи на долготу достигаетъ maximum, а параллакса—minimum своего значенія. Что же касается до широты свѣтила, то при $\lambda=L$, или $\lambda-L=180^0$ имѣетъ мѣсто обратное: наибольшему вліянію параллакса на широту соотвѣтствуетъ наименьшее вліяніе на ту же координату аберраціи. Такимъ образомъ аналитически подтверждается то, что мы сказали въ началѣ.

53. Если хотимъ найти вліяніе годичнаго параллакса на склоненіе и прямое восхожденіе звѣзды, то примемъ плоскость экватора за плоскость xy и ось x направимъ въ точку весенняго равноденствія. Тогда координаты звѣзды относительно центра земли будутъ

$$x'=\Delta'\cos\delta'\cos\alpha'$$
$$y'=\Delta'\cos\delta'\sin\alpha'$$
$$z'=\Delta'\sin\delta'$$

координаты звѣзды относительно осей параллельныхъ предыдущимъ, но имѣющихъ начало въ центрѣ солнца, будутъ

$$x = \Delta \,.\cos\delta\,.\cos\alpha$$
$$y = \Delta \,.\cos\delta\,.\sin\alpha$$
$$z = \Delta \,.\sin\delta$$

и наконецъ по уравненіямъ (370) координаты земли относительно центра солнца представляются въ видѣ

$$X = -R\,.\cos L$$
$$Y = -R\,.\sin L\cos\omega$$
$$Z = -R\,.\sin L\sin\omega$$

но

$$x = x' + X;\qquad y = y' + Y;\qquad z = z' + Z$$

поэтому

$$\begin{aligned} \Delta'\cos\delta'.\cos\alpha' &= \Delta\,.\cos\delta\cos\alpha + R.\cos L \\ \Delta'\cos\delta'.\sin\alpha' &= \Delta\,.\cos\delta\sin\alpha + R.\sin L.\cos\omega \\ \Delta'\sin\delta' &= \Delta\,.\sin\delta + R.\sin L.\sin\omega \end{aligned} \tag{387}$$

Первыя два изъ этихъ уравненій даютъ:

$$\begin{aligned} \Delta'.\cos\delta'\sin(\alpha'-\alpha) &= R.\sin L\cos\omega\cos\alpha - R.\cos L\sin\alpha \\ \Delta'.\cos\delta'\cos(\alpha'-\alpha) &= \Delta\,.\cos\delta + R\,[\sin L\cos\omega\sin\alpha + \cos L\cos\alpha] \end{aligned} \tag{388}$$

откуда

$$\operatorname{tang}(\alpha'-\alpha) = \frac{-\frac{R}{\Delta}\left[\cos L\sin\alpha - \sin L\cos\omega\cos\alpha\right]\sec\delta}{1+\frac{R}{\Delta}\left[\cos L\cos\alpha + \sin L\cos\omega\sin\alpha\right]\sec\delta}$$

ограничиваясь здѣсь величинами перваго порядка относительно $\frac{R}{\Delta}$, будемъ имѣть

$$\operatorname{tang}(\alpha'-\alpha) = -\frac{R}{\Delta}\left[\cos L\sin\alpha - \sin L\cos\omega\cos\alpha\right]\operatorname{ses}\delta \tag{389}$$

но мы видѣли, что

$$\pi\,.\sin 1'' = \frac{1}{\Delta}$$

Слѣдовательно

$$\alpha' - \alpha = -\pi R\,[\cos L\sin\alpha - \sin L\cos\omega\cos\alpha]\sec\delta \tag{390}$$

Второе изъ уравненій (388) даетъ

$$\Delta'\cos\delta' = \Delta\cos\delta + R\,[\sin L\cos\omega\sin\alpha + \cos L\cos\alpha] + 2\Delta'.\cos\delta'.\sin^2\left(\frac{\alpha'-\alpha}{2}\right)$$

умножая и дѣля послѣдній членъ на $\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}$, получимъ

$$\Delta' \cos \delta' = \Delta \cos \delta + R\,[\sin L \cos \omega \sin \alpha + \cos L \cos \alpha]$$
$$+ \Delta' \cos \delta' \sin (\alpha' - \alpha) \operatorname{tang} \frac{\alpha' - \alpha}{2}$$

При помощи перваго изъ уравненій (388) и уравненія (389) легко приводимъ это къ виду

$$\Delta' . \cos \delta' = \Delta . \cos \delta + R\,[\sin L \cos \omega \sin \alpha + \cos L \cos \alpha]$$
$$- \frac{R^2}{2\Delta} \Big[\sin L \cos \omega \cos \alpha - R \cos L \sin \alpha \Big] \Big[\cos L \sin \alpha - \sin L \cos \omega \cos \alpha \Big] \sec \delta$$

Означимъ для краткости коеффиціентъ при $\frac{R^2}{\Delta}$ чрезъ B и изъ сочетаній этого уравненія съ третьимъ изъ уравненій (387) легко получимъ

$$\Delta' \sin (\delta' - \delta) = R \sin L \sin \omega \cos \delta - R\,[\sin L \cos \omega \sin \alpha + \cos L \cos \alpha] \sin \delta$$
$$+ \frac{R^2}{\Delta} B . \sin \delta$$

$$\Delta' . \cos (\delta' - \delta) = \Delta + R . \sin L \sin \omega \sin \delta + R\,[\sin L \cos \omega \sin \alpha + \cos L \cos \alpha] \cos \delta$$
$$- \frac{R^2}{\Delta} B . \cos \delta$$

Раздѣливъ одно изъ этихъ уравненій на другое и ограничиваясь членами перваго порядка относительно $\frac{R}{\Delta}$, найдемъ

$$\delta' - \delta = \pi R . \sin L \sin \omega \cos \delta - \pi R\,[\sin L \cos \omega \sin \alpha + \cos L \cos \alpha] \sin \delta$$

или

(391) $$\delta' - \delta = - \pi R \sin L\,[\cos \omega \sin \alpha \sin \delta - \sin \omega \cos \delta]$$
$$- \pi R \cos L \cos \alpha . \sin \delta$$

Уравненіями (390) и (391) представляется вліяніе годичнаго параллакса на прямыя восхожденія и склоненія неподвижныхъ звѣздъ.

54. Не трудно убѣдиться, что отъ совмѣстнаго вліянія аберраціи и годичнаго параллакса всякая звѣзда въ теченіи года представляется наблюдателю съ земли движущеюся по эллипсису, центръ котораго находится въ той точкѣ неба, въ которой видѣлъ бы звѣзду наблюдатель, если бы онъ находился на солнце. Эту точку мы примемъ за начало координатъ, кругъ широты проведенный черезъ нее будемъ считать осью y, а кругъ параллельный эклиптикѣ—осью x. Обращая вниманіе на уравненія (374) и (386), легко увидимъ, что координаты звѣзды относительно принятой системы осей будутъ

$$x = - q . \cos (\lambda - L) - \pi . \sin (\lambda - L)$$
$$y = \quad [q . \sin (\lambda - L) - \pi . \cos (\lambda - L)] \sin \beta$$

здѣсь подъ q мы разумѣемъ постоянную величину аберраціи и принимаемъ $R = 1$. Пусть

$$q = a \cdot \cos A$$
$$\pi = a \cdot \sin A$$

тогда предыдущія уравненія приведутся къ виду

$$x = - a \cdot \cos (\lambda - L - A)$$
$$y = \quad a \cdot \sin (\lambda - L - A) \sin \beta$$

Раздѣливъ второе изъ этихъ уравненій на $\sin \beta$, возвысимъ оба уравненія въ квадратъ, сложимъ квадраты и тогда получимъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 . \sin^2 \beta} = 1$$

уравненіе эллипсиса, большая полуось котораго есть $\sqrt{q^2 + \pi^2}$, а малая $\sin \beta . \sqrt{q^2 + \pi^2}$.

Мы провели здѣсь параллель между дѣйствіями годичнаго параллакса и аберраціи на координаты свѣтилъ, что касается до числовыхъ величинъ измѣненій координатъ отъ той и другой причины, то онѣ весьма различны между собою. Мы видѣли, что отъ вліянія аберраціи координаты свѣтила могутъ измѣняться на десятки секундъ; изъ извѣстныхъ же намъ величинъ параллакса неподвижныхъ звѣздъ, только одна, какъ увидимъ ниже, едва достигаетъ одной секунды дуги. Такимъ образомъ тѣ формулы, которыя мы вывели для вычисленія вліянія годичнаго параллакса на координаты звѣздъ, имѣютъ для насъ пока только извѣстное теоретическое значеніе, на практикѣ же величины вычисленныя по нимъ оказываются столь малыми, что почти всегда заключаются внутри предѣловъ погрѣшностей нашихъ опредѣленій.

VII.

Прецессія и Нутація.

55. Поступательное движеніе земли около солнца обусловливаетъ собою разность видимыхъ и истинныхъ положеній свѣтилъ выражающуюся аберраціей и годичнымъ параллаксомъ. Вращательное движеніе земли около оси также производитъ извѣстныя измѣненія въ координатахъ свѣтилъ отнесенныхъ къ экватору, но такъ какъ положеніе экватора относительно эклиптики измѣняется еще по причинѣ движенія самой эклиптики, то намъ предстоитъ теперь изучить измѣненія координатъ свѣтилъ, обусловливающіяся совмѣстнымъ движеніемъ экватора и эклиптики въ пространствѣ.

Гипархъ, жившій за 130 лѣтъ до Р. Х., первый изъ астрономовъ замѣтилъ, что координаты звѣздъ не остаются неизмѣнными, что положенія звѣздъ относительно экватора измѣняются со временемъ. Сравнивая свои собственныя наблюденія сдѣланныя въ Александріи съ наблюденіями Тимохариса произведенными приблизительно за 280 лѣтъ до Р. Х., Гипархъ замѣтилъ, что разстоянія звѣздъ отъ эклиптики, т. е. широты звѣздъ не измѣнились, но что долготы всѣхъ звѣздъ увеличились въ этотъ промежутокъ времени на постоянное количество. По вычисленію Гипарха долготы звѣздъ возрастаютъ ежегодно на $36''$, но мы знаемъ теперь, что это заключеніе невѣрно и что постоянная величина, на которую возрастаютъ ежегодно долготы всѣхъ звѣздъ достигаетъ приблизительно $50''$. Чтобы объяснить открытое явленіе, Гипархъ предположилъ, что вся сфера небесная вращается около оси проходящей черезъ полюсы эклиптики. Коперникъ, постоянно занимавшійся отдѣленіемъ кажущихся небесныхъ перемѣщеній отъ дѣйствительныхъ, скоро убѣдился, что явленіе замѣченное Гипархомъ можетъ быть объяснено круговымъ движеніемъ полюсовъ экватора около полюсовъ эклиптики. Во время этого движенія наклоненіе эклиптики къ экватору не измѣняется, но линія пересѣченія экватора съ эклиптикой, а слѣдовательно и равноденственныя точки движутся отъ востока къ западу по направленію обратному тому, въ которомъ считаются долготы и прямыя восхожденія. Понятно, что отъ этого равномѣрнаго движенія произойдетъ также равномѣрное возрастаніе долготъ, считаемыхъ отъ одной изъ равноденственныхъ точекъ. Въ этомъ собственно и состоитъ явленіе извѣстное подъ именемъ *прецессіи* или *предваренія равноденствій.*

И такъ допустимъ, что продолженная въ направленіи сѣвернаго полюса ось земли TP (фиг. 32) движется вращательно около оси проведенной черезъ полюсы

эклиптики или около линіи TK перпендикулярной къ эклиптикѣ. Изъ годичныхъ измѣненій координатъ звѣздъ, впервые замѣченныхъ Гипархомъ, видно, что это вращеніе происходитъ весьма медленно, такъ что если въ началѣ какого либо года ось земли имѣла положеніе TP, то въ концѣ года она будетъ имѣть положеніе Tp весьма близкое къ предыдущему. Но это измѣненіе направленіи оси земли происходитъ непрерывно и въ большой періодъ времени достигаетъ значительной величины. Измѣненіе положенія оси вращенія земнаго сфероида въ пространствѣ необходимо влечетъ за собою соотвѣтствующія измѣненія въ положеніи экватора. Если линія пересѣченія экватора съ эклиптикой при положеніи оси PT имѣла направленіе TA, то, по истеченіи года, при новомъ положеніи оси pT, эта линія пересѣченія приметъ нѣкоторое новое положеніе Ta. Когда земля сдѣлаетъ еще одинъ оборотъ около солнца и по своей орбитѣ снова придетъ въ точку T, ось земли приметъ нѣкоторое направленіе Tp', а линія пересѣченія эклиптики съ экваторомъ получитъ направленіе Ta' и т. д. Если пересѣченіе эклиптики съ экваторомъ въ началѣ перваго разсматриваемаго нами года имѣло направленіе TA, то равноденствіе во время этого обращенія земли около солнца имѣло мѣсто тогда, когда земля находилась на своей орбитѣ въ точкѣ T_1, опредѣляющейся направленіемъ T_1S параллельнымъ направленію TA. Когда по истеченіи года ось земли принимаетъ направленіе Tp и линія узловъ — направленіе Ta, то равноденствіе произойдетъ въ то время, когда земля придетъ въ точку T_2, опредѣляющуюся направленіемъ T_2S параллельнымъ линіи Ta. Слѣдовательно, прежде чѣмъ кончится цѣлое обращеніе земли около солнца, прежде чѣмъ земля достигнетъ точки T_1, наступитъ уже равноденствіе. Еще приблизительно черезъ годъ равноденствіе наступитъ, какъ скоро земля придетъ въ точку T_3, опредѣляющуюся направленіемъ T_3S параллельнымъ третьему изъ разсматриваемыхъ положеній $a'T$ линіи узловъ и т. д. Такимъ образомъ мы видимъ, что вращательное движеніе земной оси служитъ причиною все болѣе и болѣе раннему наступленію равноденствій, поэтому и самое явленіе сказаннаго перемѣщенія земной оси называется *предвареніемъ равноденствій* или *прецессіей*.

Посмотримъ теперь какимъ образомъ эти постепенныя измѣненія въ направленіи земной оси, а слѣдовательно и въ направленіи линіи равноденствій могутъ быть причиною кажущагося перемѣщенія звѣздъ, и какимъ образомъ явленіе прецессіи можетъ быть обнаружено изъ наблюденій.

Предположимъ, что полюсъ экватора P (фиг. 33) описываетъ около полюса эклиптики P' кругъ. Посмотримъ, какое вліяніе это движеніе должно имѣть на координаты звѣздъ. Пусть дуги EQ и LM представляютъ: первая экваторъ, а вторая эклиптику. Точка пересѣченія этихъ дугъ находится въ ν и отъ нея по направленію слѣва на право пусть считаются долготы по эклиптикѣ и прямыя восхожденія по экватору. Пусть кругъ описываемый полюсомъ экватора около полюса эклиптики представляется на чертежѣ линіей Ppp'. Такъ какъ точка ν одновременно находится на экваторѣ и на эклиптикѣ, то она какъ отъ P такъ равно и отъ P' отстоитъ на 90^0 и сама служитъ полюсомъ большому кругу проведенному чрезъ P и P', такъ что дуги большихъ круговъ $P\nu$ и $P'\nu$ перпендикулярны къ PP'. Когда вслѣдствіе упомянутаго вращенія полюсъ P придетъ въ p, тогда дуга PP', сохранивъ свою величину, приметъ положеніе $P'p$. Дуга $P'p$ принадлежитъ кругу, полюсъ котораго долженъ находиться въ такой точкѣ эклиптики ν', которая имѣетъ то свойство, что

дуги $P'\gamma'$ и $p\gamma'$ между собою равны и каждая равна 90°. Такимъ образомъ отъ движенія полюса начало долготъ и прямыхъ восхожденій перемѣщается по эклиптикѣ изъ точки γ въ γ'. Но такъ какъ полюсъ экватора описываетъ кругъ около полюса эклиптики, то наклоненіе экватора къ эклиптикѣ не измѣняется и при новомъ положеніи равноденственной точки въ γ' экваторъ долженъ быть представленъ на нашемъ чертежѣ линіей $E'Q'$, параллельной линіи EQ. Если положеніе экватора EQ соотвѣтствуетъ времени t, а положеніе $E'Q'$ — времени t', то во время t склоненіе, прямое восхожденіе, широта и долгота звѣзды S представятся дугами Sa, γa, SC, γC; а во время t' тѣ же координаты будутъ представляться дугами Sb, $\gamma' b$, SC и $\gamma' C$. Такимъ образомъ мы видимъ, что одна только широта сохранила свою величину, всѣ же другія координаты измѣнились и эти измѣненія, которыя можно изучить, сравнивая координаты одной и той же звѣзды опредѣленныя въ эпохи значительно отдаленныя одна отъ другой, могутъ служить для изслѣдованія движеній экватора.

Отъ движенія полюса экватора по кругу около полюса эклиптики со временемъ произойдутъ значительныя измѣненія въ положеніи звѣздъ относительно экватора. Полюсъ экватора описываетъ кругъ, всѣ точки котораго отстоятъ приблизительно на 23° 28′ отъ полюса эклиптики, такимъ образомъ полюсъ экватора будетъ находиться послѣдовательно въ различныхъ созвѣздіяхъ, чрезъ которыя проходитъ этотъ кругъ. Въ настоящее время звѣзду α Ursae minoris мы считаемъ за полярную. Она отстоитъ теперь отъ дѣйствительнаго полюса экватора почти на полтора градуса, но по причинѣ вращательнаго движенія земной оси около оси эклиптики это разстояніе до извѣстнаго времени будетъ уменьшаться и около 2120 года разстояніе α Ursae minoris отъ сѣвернаго полюса будетъ наименьшее; оно будетъ равно тогда приблизительно половинѣ градуса. Послѣ этого времени сѣверный полюсъ экватора будетъ удаляться отъ звѣзды α ursae minoris, которая такимъ образомъ со временемъ утратитъ названіе полярной звѣзды. Чтобы найти тѣ звѣзды, около которыхъ на наиболѣе близкомъ разстояніи будетъ проходить сѣверный полюсъ экватора, стоитъ только на звѣздной картѣ описать около полюса эклиптики кругъ радіусомъ въ 23° 28′, и тогда будетъ видно какія звѣзды послѣдовательно будутъ получать названіе полярной звѣзды. Зная при этомъ годичную величину перемѣщенія полюса экватора, легко убѣдиться, что около 4100 года послѣ Р. Х. полярною звѣздою будетъ γ Cephei, затѣмъ ее смѣнитъ звѣзда α Cephei, еще позже къ полюсу экватора приблизится α Cygni и около 14000 лѣтъ послѣ Р. Х. вблизи полюса будетъ блистать α Lyrae.

Говоря о прецессіи, мы предполагали до сихъ поръ, что наклоненіе эклиптики къ экватору не измѣняется, но сравненіе величинъ этого наклоненія соотвѣтствующихъ эпохамъ значительно отдаленнымъ одна отъ другой показываетъ, что это предположеніе не вполнѣ справедливо. По измѣреніямъ длины полуденной тѣни гномона (величина котораго извѣстна), сдѣланнымъ въ Китаѣ во время зимняго и лѣтняго солнцестоянія приблизительно за 1100 л. до Р. Хр., Лапласъ вычислилъ, что для этого времени наклоненіе эклиптики къ экватору было 23° 54′. По наблюденіямъ Эратосфена въ Александріи сдѣланнымъ за 250 л. до Р. Хр. наклоненіе равнялось уже 23° 46′. Измѣренія Альбатенія сдѣланныя имъ въ Аравіи въ 880 году послѣ Р. Хр. показали, что эта величина была равна въ то время 23° 36′; по Тихо-де-Браге въ 1590 году наклоненіе эклиптики къ экватору было 23° 30′, по Флемстиду въ 1690 году—23° 28′ 48″. Наконецъ посредствомъ болѣе точныхъ наблюденій нашли:

Брадлей въ 1755 году наклоненіе равнымъ		23° 28′ 15″.2
Деламбръ въ 1800		27′ 54″.2
Бессель въ 1825 г.		27′ 43″.0
Астрономы гринв. обсерв. въ 1846 г.		27′ 33″.9

Изъ этого мы видимъ, что наклоненіе эклиптики къ экватору постоянно уменьшается. По послѣднимъ опредѣленіямъ годичное уменьшеніе достигаетъ 0″.45. Но спрашивается, отчего зависитъ это уменьшеніе наклоненія, слѣдуетъ ли его приписать тому, что земная ось, вращаясь около оси эклиптики, постепенно приближается къ ней, или это уменьшеніе должно разсматривать какъ происходящее отъ того, что сама эклиптика измѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ. Отвѣтъ на этотъ вопросъ проще всего можетъ быть полученъ изъ наблюденій.

До времени Тихо-де-Браге эклиптика считалась неподвижною, но этотъ астрономъ первый замѣтилъ, что широты звѣздъ расположенныхъ вблизи точекъ солнцестояній со временъ наблюденій произведенныхъ александрійскою школой измѣнились почти на одну треть градуса. Изъ этого Тихо де-Браге заключилъ, что эклиптика медленно перемѣщается въ пространствѣ. Болѣе тщательный разборъ измѣненій, происходящихъ въ широтахъ различныхъ звѣздъ показалъ, что движеніе эклиптики состоитъ въ томъ, что эта плоскость вращается около равноденственной линіи и медленно стремится къ совпаденію съ плоскостію земнаго экватора. Отсюда происходитъ то, что обратное движеніе ревноденственной линіи по эклиптикѣ сопровождается медленнымъ уменьшеніемъ наклоненія эклиптики къ экватору. Это уменьшеніе объясняется теперь тѣмъ, что плоскость земной орбиты отъ возмущающаго дѣйствія свѣтилъ, составляющихъ солнечную систему, измѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ. Отъ той же причины зависитъ еще слѣдующее явленіе. Въ то время какъ плоскость земной орбиты мало по малу измѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ, эллипсисъ орбиты измѣняетъ свое положеніе въ этой плоскости такимъ образомъ, что большая полуось орбиты принимаетъ различныя направленія въ этой плоскости. Легко видѣть, что это движеніе также можетъ быть обнаружено изъ наблюденій. Движеніе земли около солнца представляется намъ обратнымъ явленіемъ, оно представляются намъ движеніемъ солнца около земли. При этомъ видимомъ движеніи солнце кажется описывающимъ точно такой же эллипсисъ, какой въ дѣйствительности описываетъ земля около него. Отсюда необходимо слѣдуетъ, что если большая ось эллиптической орбиты земли измѣняютъ свое направленіе, то тоже самое должно происходить съ большою осью кажущейся орбиты солнца. Положеніе большой оси всякой орбиты опредѣляется долготою ея перигелія; поэтому чтобы обнаружить перемѣщеніе большой оси достаточно сравнить величины этой долготы соотвѣтствующія двумъ эпохамъ значительно отдаленнымъ одна отъ другой. Флемстидъ въ 1690 году нашелъ, что долгота перигелія солнечной орбиты равнялась 277° 35′ 31″, въ 1755, по опредѣленію Деламбра, эта долгота была уже 279° 3′ 17″, что составитъ 62′ измѣненія въ годъ. Если бы это измѣненіе равнялось 50″, величинѣ годичнаго обратнаго движенія равноденственной точки, то перигелій солнечной орбиты сохранялъ бы свое положеніе относительно окружающихъ звѣздъ и годичное измѣненіе долготы перигелія равное 50″ слѣдовало бы приписать тогда движенію равноденственной точки; но мы видимъ, что кромѣ этого долгота перигелія увеличивается ежегодно на 12″. Если земля движется по эллиптической орбитѣ въ направленіи указанномъ на фигурѣ 34 стрѣлкой, то въ то время какъ

равноденственная линія AT, по причинѣ свойственнаго ей обратнаго движенія приметъ направленіе $A'T$, большая ось орбиты TM будетъ имѣть положеніе TM' и долгота перигелія M, считаемая отъ равноденственной точки по направленію указанному стрѣлкой, увеличится на сумму угловъ ATA' и MTM'.

Гипотезой Коперника о движеніи полюса экватора по кругу около полюса эклиптики удовлетворительно объясняются измѣненія первоначально замѣченныя Гиппархомъ въ положеніяхъ звѣздъ, но въ началѣ XVIII вѣка астрономы замѣтили въ этихъ измѣненіяхъ еще другія явленія, для истолкованія которыхъ потребовались болѣе сложныя соображенія. Открывъ аберрацію, Брадлей не остановился на этомъ открытіи, онъ продолжалъ наблюдать зенитныя разстоянія звѣздъ проходившихъ черезъ меридіанъ вблизи зенита и изъ такихъ наблюденій скоро замѣтилъ, что аберраціи недостаточно для полнаго объясненія кажущихся перемѣщеній звѣздъ на сферѣ небесной. Освобождая наблюдаемыя положенія звѣздъ отъ вліянія аберраціи, Брадлей убѣдился, что остаются еще малыя измѣненія въ положеніяхъ, которыя однако не имѣютъ годичнаго періода. Такъ изъ своихъ наблюденій Брадлей нашелъ, что звѣзда γ Draconis въ періодъ отъ 1727 года по 1736 годъ постепенно приближалась къ сѣверному полюсу и что въ 1736 года она начала двигаться въ обратномъ направленіи. Наблюденія другихъ звѣздъ указали на подобное же явленіе. Брадлей предположилъ, что эти медленныя измѣненія въ положеніяхъ звѣздъ относительно полюса должны зависѣть отъ того, что земная ось колеблется въ пространствѣ около нѣкотораго средняго положенія. Эта гипотеза о колебаніи земной оси вполнѣ подтвердилась потомъ теоретическими соображеніями основанными на строгихъ началахъ механики и самое явленіе колебанія названо *нутаціей*. Одна половина колебанія, которую наблюдалъ Брадлей, совершилась въ 9 лѣтъ и это обстоятельство привело его къ мысли, что само явленіе нутаціи находится въ связи съ движеніемъ узловъ лунной орбиты, имѣющимъ періодъ не много большій 18 лѣтъ. Свою мысль Брадлей сообщилъ французскому астроному Лемонье и просилъ его наблюдать вторую половину періода нутаціи. Что предсказалъ Брадлей, то вполнѣ оправдалось въ 1745 году: оба астронома убѣдились въ несомнѣнной періодичности явленія.

Мы сказали выше, что ось земли медленно движется по коническої поверхности около линіи перпендикулярной къ эклиптикѣ, въ этомъ состоитъ явленіе прецессіи. На самомъ дѣлѣ движеніе земной оси въ пространствѣ не представляетъ такой простой формы. Ось земли движется по поверхности малаго конуса съ эллиптическимъ основаніемъ $abcd$ (фиг. 35) и въ тоже время самъ этотъ малый конусъ перемѣщается въ пространствѣ такимъ образомъ, что его ось OT описываетъ поверхность круговаго конуса около перпендикуляра TK къ эклиптикѣ. Движеніемъ конуса $Tabcd$ около линіи TK объясняется явленіе прецессіи, движеніемъ земной оси по поверхности малаго конуса $Tabcd$ обусловливается явленіе нутаціи. Понятно, что при совмѣстномъ существованіи обоихъ явленій прецессіи и нутаціи полюсъ экватора движется около полюса эклиптики не по кругу, а по волнообразной сомкнутой кривой линіи и при этомъ то приближается по этой кривой къ полюсу эклиптики, то удаляется отъ него. Вслѣдствіе этого наклоненіе эклиптики къ экватору періодически измѣняетъ свою величину и бываетъ то болѣе, то менѣе средняго своего значенія на $9''.65$.

По причинѣ нутаціи точка весенняго равноденствія не находится въ томъ мѣстѣ эклиптики, которое она занимала бы, если бы полюсъ экватора двигался не по вол-

нообразной кривой около полюса эклиптики, а по кругу, какъ это предполагалъ первоначально Коперникъ. Такимъ образомъ равноденственная точка на эклиптикѣ, находится то назади, то впереди того мѣста, которое она занимала бы при вліяніи одной прецессіи и истинная равноденственная точка колеблется около того положенія, которое мы нашли бы для нея, пренебрегая дѣйствіемъ нутаціи и которое называется обыкновенно среднимъ положеніемъ равноденственной точки.

Величины измѣненій координатъ свѣтилъ отъ прецессіи и нутаціи зависятъ съ одной стороны отъ самыхъ перемѣщеній экватора и эклиптики въ пространствѣ, съ другой стороны они обусловливаются также и положеніемъ свѣтила на сферѣ небесной; такъ напр. отъ измѣненія наклоненія экватора къ эклиптикѣ вслѣдствіе нутаціи наиболѣе измѣняются склоненія тѣхъ звѣздъ, которыя по прямому восхожденію удалены на 90° отъ линіи пересѣченія экватора съ эклиптикой. Напротивъ склоненія свѣтилъ, лежащихъ на большомъ кругѣ проведенномъ черезъ упомянутую линію перпендикулярно къ экватору, почти неизмѣняются. Такимъ образомъ мы можемъ сказать, что измѣненія координатъ свѣтилъ отъ прецессіи и нутаціи суть функціи какъ перемѣщеній координатныхъ плоскостей, такъ равно и самыхъ координатъ.

Въ сферической астрономіи, не касаясь теоретическаго объясненія явленій прецессіи и нутаціи на основаніи механическихъ соображеній, мы предположимъ данными законы всѣхъ перемѣщеній экватора и эклиптикѣ въ пространствѣ и найдемъ простѣйшія выраженія для вычисленія измѣненій координатъ какаго либо свѣтила отъ прецессіи и нутаціи въ теченіи извѣстнаго промежутка времени.

Для избѣжанія неопредѣленности будемъ относить перемѣщенія плоскостей экватора и эклиптики къ какой либо третьей плоскости неподвижной въ пространствѣ, напр.—къ той, съ которою совпадала подвижная эклиптика въ началѣ 1800 года. Полное перемѣщеніе эклиптики можно представить какъ слагающееся изъ двухъ отдѣльныхъ перемѣщеній: при одномъ изъ нихъ она измѣняетъ свое наклоненіе къ упомянутой неподвижной плоскости почти пропорціонально времени, второе движеніе заключается въ томъ, что линія пересѣченія подвижной эклиптики съ постоянной плоскостію движется по этой послѣдней отъ востока къ западу и это движеніе также почти равномѣрно. Что касается до перемѣщенія экватора въ пространствѣ, то оно слагается изъ трехъ отдѣльныхъ движеній: 1, линія пересѣченія его съ тою же постоянною плоскостію вращается на этой послѣдней почти равномѣрно отъ востока къ западу; 2, плоскость экватора пропорціонально квадрату времени измѣняетъ свое наклоненіе къ постоянной плоскости и 3, экваторъ періодически колеблется около нѣкотораго средняго положенія, отъ этой причины періодически измѣняется его наклоненіе къ эклиптикѣ. Такъ какъ это колебаніе совершается не около равноденственной линіи, то отъ него сами равноденственныя точки движутся колебательно взадъ и впередъ.

Въ противуположность послѣднему періодическому перемѣщенію экватора, остальныя перемѣщенія экватора и эклиптики называются вѣковыми.

Зависящее отъ вѣковыхъ перемѣщеній передвиженіе равноденственныхъ точекъ по эклиптикѣ вообще называется прецессіею. Періодическое колебаніе экватора носитъ названіе нутаціи. Зависящее отъ этой послѣдней измѣненіе наклоненія эклиптики къ экватору называется *нутаціей наклонности,* а колебательное движеніе равноденственныхъ точекъ по эклиптикѣ — *нутаціей въ долготѣ.* Тѣ точки, въ которыхъ

дѣйствительно пересѣкаются экваторъ и эклиптика даннаго момента называются *истинными равноденственными точками;* тѣ же точки, въ которыхъ они пересѣкались бы, если бы не существовало нутаціи, называются *средними равноденственными точками.* Точно также истинною наклонностію эклиптики въ данный моментъ называется уголъ, который составляютъ между собою экваторъ и эклиптика даннаго момента, среднею же наклонностію называется тотъ уголъ, который въ данный моментъ составляли бы между собою экваторъ и эклиптика, если бы не существовало нутаціи. Подобное же различіе устанавливается и въ координатахъ свѣтилъ. Истинными прямыми восхожденіями и склоненіями называются тѣ, которыя отнесены къ истинному положенію экватора, опредѣляющемуся истиннымъ наклоненіемъ и истиннымъ положеніемъ равноденственной точки; средними же прямыми восхожденіями и склоненіями называются отнесенныя къ среднему положенію экватора, зависящему отъ средней наклонности и средней равноденственной точки.

Для большей ясности представимъ всѣ упомянутыя нами до сихъ поръ перемѣщенія экватора и эклиптики на чертежѣ. Пусть SE (фиг. 36) будетъ постоянная плоскость или эклиптика начала 1800 года и SA положеніе экватора также соотвѣтствующее началу 1800 года. Пусть $S''E'$ и $S'S''A'$ будутъ эклиптика и среднее положеніе экватора $1800 + t$ года, гдѣ t выражено въ юліанскихъ годахъ и ихъ десятичныхъ частяхъ. Вслѣдствіе дѣйствія солнца и луны на сжатую подъ полюсами землю линія пересѣченія плоскостей эклиптики SE и экватора SA движется по эклиптикѣ въ направленіи обратномъ тому какъ считаются долготы и въ началѣ $1800 + t$ года линія пересѣченія этихъ плоскостей будетъ направлена черезъ точку S'. Путь пройденный точкою S по эклиптикѣ въ періодъ времени отъ 1800 до $1800 + t$ года, т. е. дуга SS' называется *луно-солнечной прецессіей* (precessio Luno-Solaris). Означимъ ее чрезъ ψ. И такъ $SS' = \psi$.

Дѣйствіями солнца и луны на части земнаго сфероида близкія къ экватору измѣняется положеніе плоскости этого послѣдняго, но при отомъ положеніе эклиптики не измѣняется. Планеты, составляющія солнечную систему, подобно солнцу и лунѣ, дѣйствуютъ своимъ притяженіемъ на землю. но по малости планетъ и значительному въ сравненіи съ луной ихъ отдаленію отъ земли это притяженіе не возмущаетъ вращательнаго движенія земли, а дѣйствуетъ только на ея поступательное движеніе и отвлекаетъ центръ земли отъ той плоскости, въ которой онъ двигался бы, находясь подъ вліяніемъ одной только центральной силы солнца. По этой причинѣ постепенно измѣняется положеніе эклиптики въ пространствѣ. Въ настоящее время наклоненіе эклиптики къ экватору уменьшается ежегодно отъ дѣйствія планетъ приблизительно на $0''.46$ и отъ той же причины линія пересѣченія экватора съ эклиптикой перемѣщается ежегодно къ востоку по эклиптикѣ на $0''.13$. Такимъ образомъ въ $1800 + t$ году эклиптика приметъ направленіе, которое на нашемъ чертежѣ означимъ линіей $S''E'$. Экваторъ въ своемъ положеніи, соотвѣтствующемъ $1800 + t$ году, т. е. въ положеніи $S'A'$ пересѣчется съ этимъ новымъ положеніемъ эклиптики въ точкѣ S''. Если отложимъ по новому положенію эклиптики, начиная отъ точки N дугу $NS_1 = NS$, то разность дугъ NS'' и NS_1 или дуга $S''S_1$, считаемая по новому положенію эклиптики, называется *общей прецессіей* (precessio generalis). Означимъ ее чрезъ ψ_1, т. е. положимъ $S''S_1 = \psi_1$. Если примемъ общую годовую прецессію равною $50''.24$, то луно-солнечная должна быть равна $50''.37$.

Назовемъ долготу восходящаго узла эклиптики $S''E'$ надъ эклиптикой SE, т. е. долготу точки N, считаемую отъ равноденствія 1800 года чрезъ Π; тогда, помня что условились считать движеніе равноденственной точки по направленію отъ S къ S' за обратное, будемъ считать долготы по направленію отъ S къ N, и слѣдовательно на нашемъ чертежѣ $\Pi = SN$, а потому $NS' = \Pi + \psi$ и $NS'' = \Pi + \psi_1$.

Назовемъ чрезъ π уголъ, который составляетъ одно положеніе эклиптики съ другимъ, т. е. примемъ $S'NS'' = \pi$. Означимъ чрезъ ω уголъ плоскостей эклиптики 1800 года и экватора $1800 + t$ года, т. е. положимъ $\omega = NSA = NS'A'$. Назовемъ чрезъ ω_1 уголъ плоскости экватора 1800 года съ эклиптикой $1800 + t$ года, т. е. положимъ $NKA = NS''A' = \omega_1$. Означимъ наконецъ дугу $S'S''$ чрезъ a, т. е. положимъ $S'S'' = a$. Такъ какъ $S'S''$ представляетъ перемѣщеніе равноденственной точки зависящее отъ дѣйствія планетъ на землю, то дуга a называется обыкновенно прецессіей отъ планетъ. На нашемъ чертежѣ S представляетъ положеніе средней равноденственной точки для начала 1800 года. Точка S'' есть средняя равноденственная точка $1800 + t$ года, уголъ ω_1 есть среднее наклоненіе экватора къ эклиптикѣ $1800 + t$ года.

При существованіи нутаціи экваторъ въ началѣ $1800 + t$ года не будетъ имѣть положенія $S'A'$, и такъ какъ его нутаціонныя колебанія не происходятъ около линіи равноденствій, то онъ приметъ въ началѣ $1800 + t$ года нѣкоторое положеніе S_2A_1; при этомъ S_2 будетъ истинною равноденственною точкою начала $1800 + t$ года, уголъ NS_2A_1 представитъ собою истинное наклоненіе экватора къ эклиптикѣ для начала $1800 + t$ года. Дуга $S''S_2$ называется нутаціею въ долготѣ, а разность угловъ $NS''A'$ и NS_2A_1—нутаціею наклонности.

56. За данныя вопроса въ сферической астрономіи слѣдуетъ считать величины ψ, ψ_1, ω, ω_1. По опредѣленію Петерса, изложенному въ его сочиненіи Numerus constans nutationis, годовая луно-солнечная прецессія для всякаго времени $1800 + t$ представляется въ формѣ

$$\frac{d\psi}{dt} = 50''.3798 - 0''.0002168.t$$

а слѣдовательно измѣненіе луно-солнечной прецессіи въ періодъ отъ 1800 до $1800 + t$ года будетъ

$$\psi = 50''.3798.t - 0''.0001084.t^2 \tag{a}$$

Но тѣмъ же изслѣдованіямъ годовая общая прецессія для той же эпохи есть

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 50''.2411 + 0''.0002268.t$$

Слѣдовательно

$$\psi_1 = 50''.2411.t + 0''.0001134.t^2 \tag{b}$$

Наклоненіе эклиптики къ экватору измѣняется отъ дѣйствія планетъ и годичное измѣненіе для какого либо $1800 + t$ года есть

$$\frac{d\omega_1}{dt} = -0''.4738 - 0''.0000028.t$$

а наклоненіе для $1800 + t$ года есть

$$(c) \qquad \omega_1 = 23^\circ\, 27'\, 54'' - 0'',4738\,.\,t - 0,0000014\,.\,t^2$$

Если вслѣдствіе дѣйствія планетъ измѣняется положеніе эклиптики, то вмѣстѣ съ тѣмъ измѣняется также и первоначальное дѣйствіе солнца и луны на земной сфероидъ, измѣняется слѣдовательно отъ этой причины и наклоненіе эклиптики 1800 года къ экватору $1800 + t$ года. По тѣмъ же опредѣленіямъ Петерса это годичное измѣненіе есть

$$\frac{d\omega}{dt} = 0'',00001470\,.\,t$$

а слѣдовательно для времени $1800 + t$

$$(d) \qquad \omega = 23^\circ\, 27'\, 54'' + 0'',00000735\,.\,t^2$$

Величины ψ, ψ_1, ω и ω_1 по опредѣленію Ф. В. Бесселя *) суть

$$\psi = 50'',37572\,.\,t - 0'',0001217945\,.\,t^2$$
$$\psi_1 = 50'',21129\,.\,t + 0'',0001221483\,.\,t^2$$
$$\omega = 23^\circ\ 28'\ 18'' + 0'',0000098423\,.\,t^2$$
$$\omega_1 = 23^\circ\ 28'\ 18'' - 0'',48368\,t - 0'',000002723\,.\,t^2$$

гдѣ t есть число юліанскихъ лѣтъ и ихъ десятичныхъ долей протекшихъ отъ начала 1750 года.

Тѣ же величины ψ, ψ_1, ω, ω_1 по послѣднему опредѣленію сдѣланному Леверье **) суть

$$\psi = 50'',37040\,.\,t - 0'',00010881\,.\,t^2$$
$$\psi_1 = 50'',23572\,.\,t + 0'',00011289\,.\,t^2$$
$$\omega = 23^\circ\, 27'\, 31''.8 + 0'',00000719\,.\,t^2$$
$$\omega_1 = 23^\circ\, 27'\, 21''.8 - 0'',47566\,.\,t - 0''\,00000149\,.\,t^2$$

За эпоху этихъ величинъ принять 1850 годъ и подъ t разумѣется здѣсь число юліанскихъ лѣтъ протекшихъ отъ начала 1850 года.

Имѣя эти выраженія служащія для вычисленія величинъ ψ, ψ_1, ω и ω_1 соотвѣтствующихъ всякому времени t, займемся прежде всего опредѣленіемъ для какого угодно времени t положенія эклиптики и средняго положенія экватора, т. е. опредѣленіемъ величинъ Π, π, а вмѣстѣ съ тѣмъ и величины a. Понятно, что двумя первыми величинами опредѣляется положеніе для всякаго времени t подвижной эклиптики. Если же Π найдено, то при помощи общей прецессіи ψ_1 и угла ω_1 опредѣлится для всякаго времени t положеніе средняго экватора. Вліяніе нутаціи па положеніе экватора пока во вниманіе принимать не будемъ.

Для рѣшенія нашего вопроса обратимся къ сферическому треугольнику $S'NS''$ (фиг. 36), сторонами которому служатъ $S'N = \Pi + \psi$; $S''N = \Pi + \psi_1$, $S'S'' = a$ и углами $S'NS'' = \pi$, $NS'A' = \omega$, $NS''S' = 180 - \omega_1$. Удобнѣе всего къ рѣшенію этого треугольника примѣнить извѣстныя аналогіи Непера, имѣющія видъ:

*) *F. W. Bessel.* Ueber das Vorrücken des Tag-und Nachtgleichen. Fundamenta astronomiae. Tabulae Regiomontanae.

**) См. Annales de l'Observatoire de Paris. T. II, sec. IV; T. IV, sect. II.

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}$$

$$\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad (392)$$

$$\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Для нашего случая мы примемъ

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\Pi+\frac{\psi+\psi_1}{2}$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\psi_1-\psi}{2}$$

$$\frac{A+B}{2}=90^\circ+\frac{\omega-\omega_1}{2}$$

$$\frac{A-B}{2}=\frac{\omega+\omega_1}{2}-90^\circ=270^\circ+\frac{\omega+\omega_1}{2}$$

и тогда получимъ

$$\operatorname{tang}\left(\Pi+\frac{\psi+\psi_1}{2}\right)\operatorname{cotg}\frac{a}{2}=-\frac{\sin\frac{\omega+\omega_1}{2}}{\sin\frac{\omega-\omega_1}{2}}$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\psi_1-\psi}{2}\right)\operatorname{cotg}\frac{a}{2}=-\frac{\cos\frac{\omega+\omega_1}{2}}{\cos\frac{\omega-\omega_1}{2}}$$

$$-\operatorname{cotg}\left(\frac{\omega-\omega_1}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}=\frac{\cos\frac{\psi_1-\psi}{2}}{\cos\left(\Pi+\frac{\psi+\psi_1}{2}\right)} \qquad (393)$$

$$-\operatorname{cotg}\left(\frac{\omega+\omega_1}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}=\frac{\sin\left(\frac{\psi_1-\psi}{2}\right)}{\sin\left(\Pi+\frac{\psi+\psi_1}{2}\right)}$$

Два послѣднія изъ этихъ уравненій даютъ

$$\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\Pi+\frac{\psi+\psi_1}{2}\right)=\cos\frac{\psi-\psi_1}{2}\operatorname{tang}\frac{\omega_1-\omega}{2}$$

(394)

$$\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\Pi+\frac{\psi+\psi_1}{2}\right)=\sin\frac{\psi-\psi_1}{2}\operatorname{tang}\frac{\omega+\omega_1}{2}$$

понятно, что четверть, въ которой заключается искомое Π опредѣляется всегда подъ тѣмъ условіемъ, что $\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}$ есть существенно малая величина.

Что касается до a, то эту величину всего удобнѣе опредѣлить по второму изъ уравненій (393), которое для этого представимъ въ формѣ

(395) $$\operatorname{tang}\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{\omega+\omega_1}{2}=\operatorname{tang}\frac{\psi-\psi_1}{2}\cos\frac{\omega-\omega_1}{2}$$

уравненіями (394) и (395) вполнѣ рѣшается нашъ вопросъ. Если вычислимъ для даннаго времени t величины ψ, ψ_1, ω и ω_1, то по нимъ изъ уравненій (394) найдемъ соотвѣтствующія времени t величины π и Π, т. е. найдемъ положеніе подвижной эклиптики и средняго экватора для того же времени t. Что касается до уравненія (395), то имъ подобнымъ же образомъ будемъ пользоваться для опредѣленія прецессіи отъ планетъ соотвѣтствующей данному времени t.

Можно предложить однако болѣе простое рѣшеніе вопроса объ опредѣленіи положенія эклиптики и средняго экватора. Вмѣсто того чтобы всякій разъ для даннаго времени t пользоваться уравненіями (394) и (395) для вычисленія π, Π и a, можно при помощи этихъ уравненій представить величины π, Π и a явными функціями времени, т. е. выраженіямъ величинъ π, Π и a можно дать такую точно форму, какую далъ Бессель величинамъ ψ, ψ_1, ω и ω_1.

Найдемъ сначала выраженіе для a; для этого обратимся къ послѣднему уравненію. Такъ какъ

$$\frac{\omega+\omega_1}{2}=\omega+\frac{\omega_1-\omega}{2}$$

то упомянутое уравненіе принимаетъ видъ

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2}\cdot\cos\omega\,.\cos\frac{\omega_1-\omega}{2}-\operatorname{tang}\frac{a}{2}\cdot\sin\omega\,.\sin\frac{\omega_1-\omega}{2}=\operatorname{tang}\frac{\psi-\psi_1}{2}\cos\frac{\omega-\omega_1}{2}$$

но величины a, $\psi-\psi_1$, $\omega_1-\omega$ такъ малы, что ихъ синусы и тангенсы можно принять за самыя дуги, а косинусы за единицу. Тогда очевидно будемъ имѣть

$$a\,.\cos\omega=\psi-\psi_1+\frac{a}{2}(\omega_1-\omega)\sin\omega\,.\sin 1''$$

откуда

$$a=\frac{\psi-\psi_1}{\cos\omega}-\frac{a(\omega_1-\omega)}{2\cos\omega}\sin\omega\,.\sin 1''$$

Но принимая въ первомъ приближеніи

$$a=\frac{\psi-\psi_1}{\cos\omega}$$

болѣе точную величину a имѣемъ въ видѣ

$$a = \frac{\psi - \psi_1}{\cos\omega} - \frac{(\psi - \psi_1)(\omega_1 - \omega)}{2\cos^2\omega} \sin\omega . \sin 1''$$

Мы видѣли, что величины ψ, ψ_1 и $\omega_1 - \omega$ имѣютъ форму

$$\begin{aligned} \psi &= \alpha . t + \alpha' . t^2 \\ \psi_1 &= \beta . t + \beta' . t^2 \\ \omega_1 - \omega &= \gamma . t + \gamma' . t^2 \end{aligned} \qquad (e)$$

внося это въ предыдущее выраженіе и ограничиваясь членами втораго порядка относительно t, получимъ

$$a = \frac{\alpha - \beta}{\cos\omega} t + \left[\frac{\alpha' - \beta'}{\cos\omega} - \frac{(\alpha - \beta)\gamma}{2\cos^2\omega} \sin\omega . \sin 1''\right] t^2$$

Вставивъ сюда вмѣсто α, β, α' и т. д. тѣ ихъ числовыя величины, которыя нашелъ Петерсъ, получимъ

$$a = 0'', 15119 . t - 0'', 00024186 . t^2 \qquad (f)$$

$$\frac{da}{dt} = 0'', 15119 - 0'', 00048372 . t$$

Для приведенія къ подобной же формѣ величинъ Π и π, сначала изъ уравненій (394) имѣемъ

$$\operatorname{tang}\left(\Pi + \frac{\psi + \psi_1}{2}\right) = \operatorname{tang}\frac{\psi - \psi_1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tang}\frac{\omega + \omega_1}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\omega_1 - \omega}{2}}$$

но обращая вниманіе на уравненія (395) отсюда находимъ

$$\operatorname{tang}\left(\Pi + \frac{\psi + \psi_1}{2}\right) = \operatorname{tang}\frac{a}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\omega + \omega_1}{2}}{\sin\frac{\omega_1 - \omega}{2}}$$

или

$$\operatorname{tang}\left(\Pi + \frac{\psi + \psi_1}{2}\right) = \left[\frac{\sin\omega + \left(\frac{\omega_1 - \omega}{2}\right)\cos\omega . \sin 1''}{\sin\frac{\omega_1 - \omega}{2}}\right] \operatorname{tang}\frac{a}{2}$$

или

$$\operatorname{tang}\left(\Pi + \frac{\psi + \psi_1}{2}\right) = \frac{a . \sin\omega}{\omega_1 - \omega} + \frac{a}{2} \cdot \cos\omega . \sin 1'' \qquad (396)$$

Для опредѣленія π, взявъ сумму квадратовъ уравненій (394), находимъ

$$\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{2} = \cos^2\left(\frac{\psi - \psi_1}{2}\right)\operatorname{tang}^2\left(\frac{\omega_1 - \omega}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\psi - \psi_1}{2}\right)\operatorname{tang}^2\left(\frac{\omega + \omega_1}{2}\right)$$

или

$$\tang^2 \frac{\pi}{2} = \cos^2 \left(\frac{\psi - \psi_1}{2}\right) \left[\tang^2 \left(\frac{\omega_1 - \omega}{2}\right) + \tang^2 \left(\frac{\psi - \psi_1}{2}\right) \tang^2 \left(\frac{\omega + \omega_1}{2}\right)\right]$$

Принимая здѣсь $\cos^2 \left(\frac{\psi - \psi_1}{2}\right) = 1$ и внося вмѣсто $\tang^2 \left(\frac{\psi - \psi_1}{2}\right)$ его величину изъ втораго изъ уравненій (393), получимъ

$$\tang^2 \frac{\pi}{2} = \tang^2 \frac{a}{2} \frac{\cos^2 \left(\frac{\omega + \omega_1}{2}\right)}{\cos^2 \left(\frac{\omega - \omega_1}{2}\right)} \tang^2 \left(\frac{\omega + \omega_1}{2}\right) + \tang^2 \left(\frac{\omega_1 - \omega}{2}\right)$$

согласно съ предыдущимъ слѣдуетъ принять $\cos^2 \left(\frac{\omega - \omega_1}{2}\right) = 1$ и кромѣ того

$$\sin^2 \left(\frac{\omega + \omega_1}{2}\right) = \sin^2 \left(\omega - \frac{\omega - \omega_1}{2}\right)$$

послѣ этого предыдущее выраженіе приметъ видъ

$$\tang^2 \frac{\pi}{2} = \tang^2 \frac{a}{2} \left[\sin \omega - \frac{\omega - \omega_1}{2} \cos \omega \,.\, \sin 1''\right]^2 + \tang^2 \frac{\omega_1 - \omega}{2}$$

или

$$\pi^2 = a^2 \left[\sin^2 \omega + \frac{(\omega - \omega_1)^2}{4} \cos^2 \omega . \sin^2 1'' - (\omega - \omega_1) \sin \omega . \cos \omega . \sin 1''\right] + \left(\omega_1 - \omega\right)^2$$

пренебрегая членомъ содержащимъ производителя $\frac{a^2 (\omega - \omega_1)^2}{4}$, находимъ

$$\pi^2 = a^2 . \sin^2 \omega - a^2 (\omega - \omega_1) \sin \omega \,.\, \cos \omega \,.\, \sin 1'' + (\omega_1 - \omega)^2$$

Выраженіе (f) имѣетъ форму $a = \varepsilon.t + \varepsilon'.t^2$, обращая вниманіе на это и на подобное выраженіе для $\omega_1 - \omega$, находимъ

$$\pi^2 = (\varepsilon.t + \varepsilon'.t^2) \sin^2 \omega + (\varepsilon.t + \varepsilon'.t^2)^2 (\gamma t + \gamma' t^2) \sin \omega \,.\, \cos\omega \,.\, \sin 1'' + (\gamma t + \gamma' t^2)^2$$

Если ограничимся здѣсь членами третьяго порядка относительно t, то получимъ

$$\pi^2 = (\varepsilon^2 . \sin^2\omega + \gamma^2)\, t^2 + (2\varepsilon\varepsilon' \sin^2 \omega + \gamma\varepsilon^2 \sin \omega . \cos \omega . \sin 1'' + 2\gamma\gamma')\, t^3.$$

Это имѣетъ форму

$$\pi^2 = At^2 + Bt^3.$$

Слѣдовательно

$$\pi = \sqrt{At^2 + Bt^3}.$$

Разлагая это по биному и ограничиваясь двумя членами разложенія, получимъ

$$\pi = t\sqrt{A} + \frac{Bt^3}{2t . \sqrt{A}}$$

слѣдовательно

$$\pi = t . \sqrt{\varepsilon^2 . \sin^2\omega + \gamma^2} + \frac{t^2\left[\varepsilon\varepsilon' . \sin \omega + \gamma\gamma' + \frac{\gamma\varepsilon^2}{2} \sin \omega \,.\, \cos \omega \,.\, \sin 1''\right]}{\sqrt{\varepsilon^2 . \sin^2\omega + \gamma^2}}$$

Внося сюда найденныя Петерсонъ числовыя величины коэффиціентовъ, получимъ

$$\pi = 0'', 4776 . t - 0'', 000003445 . t^2 \qquad (g)$$

Обратимся теперь къ выраженію (396) и представимъ его въ видѣ

$$\operatorname{tang}\left(\Pi + \frac{\psi + \psi_1}{2}\right) = \frac{\varepsilon t + \varepsilon' t^2}{\gamma t + \gamma' t^2} \sin\omega + \frac{\varepsilon t + \varepsilon' t^2}{2} \cdot \cos\omega . \sin 1''$$

Если ограничимся членами перваго порядка относительно t, то можемъ принять

$$\frac{\varepsilon t + \varepsilon' t^2}{\gamma t + \gamma' t^2} = \frac{\varepsilon}{\gamma} + \frac{\varepsilon'\gamma - \varepsilon\gamma'}{\gamma^2} \cdot t$$

а потому изъ предыдущаго, вѣрно до членовъ перваго порядка относительно t включительно, имѣемъ

$$\operatorname{tang}\left(\Pi + \frac{\psi + \psi_1}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{\gamma} \sin\omega + \left[\frac{\varepsilon'\gamma - \varepsilon\gamma'}{\gamma^2} \sin\omega + \frac{\varepsilon}{2} \cos\omega \sin 1''\right] t$$

откуда

$$\Pi + \frac{\psi + \psi_1}{2} = \operatorname{arc.tang}\left[\frac{\varepsilon}{\gamma} \sin\omega + \left\{\frac{\varepsilon'\gamma - \varepsilon\gamma'}{\gamma^2} \sin\omega + \frac{\varepsilon}{2} \cos\omega . \sin 1''\right\} t\right]$$

разсматривая выраженія (a), (b), (c) и т. д. мы видимъ, что членъ содержащій множителя t всегда малъ сравнительно съ членомъ свободнымъ отъ этого множителя, а потому видя, что вторая часть имѣетъ форму

$$\operatorname{arc.tang}(x + \xi)$$

гдѣ подъ ξ разумѣемъ малую величину, разложимъ это выраженіе по степенямъ ξ и ограничимся первою степенью этой малой величины; тогда будемъ имѣть

$$\operatorname{arc.tang}(x + \xi) = \operatorname{arc.tang} x + \xi \frac{d(\operatorname{arc.tang} x)}{dx} = \operatorname{arc.tang} x + \frac{\xi}{1 + x^2}$$

Слѣдовательно

$$\Pi + \frac{\psi + \psi_1}{2} = \operatorname{arc.tang}\left(\frac{\varepsilon}{\gamma} \sin\omega\right) + \frac{\left[\frac{\varepsilon'\gamma - \varepsilon\gamma'}{\gamma^2} \sin\omega + \frac{\varepsilon}{2} \cos\omega . \sin 1''\right] t}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\gamma} \sin\omega\right)^2}$$

Такъ какъ всѣ величины входящія сюда за исключеніемъ Π извѣстны, то вычисляя Π отсюда и принимая при этомъ на основаніи выраженій (a) и (b)

$$\frac{\psi + \psi_1}{2} = 50'', 3104 . t$$

Находимъ

$$\Pi = 172^{\circ}\ 45'\ 31'' - 8'', 504 . t \qquad (h)$$

Имѣя это, можемъ считать оконченнымъ рѣшеніе вопроса объ опредѣленіи положенія для всякаго времени t движущейся эклиптики и средняго экватора.

Замѣтимъ, что во всѣхъ найденныхъ выраженіяхъ t есть число юліанскихъ лѣтъ протекшихъ послѣ начала 1800 года. Для эпохъ предшествующихъ 1800 году t и π должны считаться величинами отрицательными.

57. Перейдемъ теперь къ опредѣленію тѣхъ измѣненій, которыя происходятъ въ координатахъ звѣздъ отъ вліянія прецессіи.

Предположимъ, что даны долгота и широта, L и B, нѣкоторой звѣзды отнесенныя къ постоянной плоскости, напр. къ эклиптикѣ 1800 года, и требуется опредѣлить долготу и широту λ и β этой звѣзды для времени $1800+t$, обращая вниманіе на явленіе прецессіи. Очевидно, что рѣшеніе этого вопроса приводится къ вычисленію частей нѣкотораго сферическаго треугольника. Удержимъ прежнія означенія. Пусть SE и SA (фиг. 37) представляютъ эклиптику и экваторъ 1800 года, пусть $S''E'$ и $S''A'$ будутъ эклиптика и экваторъ $1800+t$ года. Въ P пусть будетъ полюсъ эклиптики 1800 года, а въ P' полюсъ эклиптики $1800+t$ года. Пусть въ S^* будетъ разсматриваемое свѣтило. Для рѣшенія нашего вопроса обратимся къ треугольнику PS^*P', сторонами PS^* и $P'S^*$ которому служатъ круги широты свѣтила относительно того и другаго положенія эклиптики. Слѣдовательно $PS^*=90^0-B$; $P'S^*=90^0-\beta$. Стороною PP' измѣряется наклоненіе одного положенія эклиптики къ другому. По нашему означенію $PP'=\pi$. Такъ какъ точка N есть полюсъ круга $EE'PP'$, то, соединивъ N съ P и съ P' дугами большихъ круговъ, найдемъ, что углы $NP'P$ и NPP' прямые. Уголъ въ нашемъ треугольникѣ при P' есть

$$S^*P'P=NP'P+S''P'N-S''P'S^*$$

Такъ какъ S'' есть средняя равноденственная точка соотвѣтствующая $1800+t$ году и дуга $NS''=\Pi+\psi_1$, то $S''P'N=\Pi+\psi_1$, $S''P'S^*=\lambda$. И такъ

$$PP'S^*=90^0+\Pi+\psi_1-\lambda$$

что касается до угла $P'PS^*$, то $P'PS^*=P'PN+NPS^*$; но $NPS^*=SPS^*-SPN$, а такъ какъ S есть средняя равноденственная точка 1800 года, то $SPS^*=L$ и, по прежнему означенію, $SPN=\Pi$, слѣдовательно уголъ $P'PS^*=90^0+L-\Pi$. Такимъ образомъ опредѣляются части разсматриваемаго нами треугольника $PP'S^*$, который дастъ

$$\sin\beta=\cos\pi\sin B-\sin\pi\cos B\sin(L-\Pi)$$

(397) $$\cos\beta\sin(\lambda-\Pi-\psi_1)=\sin\pi\sin B+\cos\pi\cos B\sin(L-\Pi)$$

$$\cos\beta\cos(\lambda-\Pi-\psi_1)=\cos B\cos(L-\Pi)$$

Изъ этихъ уравненій по величинамъ π, Π и ψ_1 вычисленнымъ для даннаго времени $1800+t$ и по даннымъ L и B прямо находимъ искомыя λ и β. Но вмѣсто этого точнаго рѣшенія вопроса на практикѣ употребляется другое, болѣе простое основанное на опредѣленіи годичныхъ измѣненій координатъ λ и β по даннымъ годичнымъ измѣненіямъ ψ_1, Π и π, т. е. по даннымъ $\frac{d\psi_1}{dt}$, $\frac{d\Pi}{dt}$ и $\frac{d\pi}{dt}$. Сущность этого способа заключается въ слѣдующемъ. Прежде всего найдемъ выраженія производныхъ $\frac{d\beta}{dt}$ и $\frac{d\lambda}{dt}$.

Для этого будемъ дифференцировать первое изъ предыдущихъ уравненій, считая при этомъ за постоянныя величины только L и B; тогда получимъ

$$\cos\beta.d\beta=-\sin\pi\sin B d\pi-\cos\pi\cos B\sin(L-\Pi)\,d\pi-\sin\pi\cos B\cos(L-\Pi)\,d\Pi$$

но обращая вниманіе на второе изъ уравненій (397), имѣемъ

$$\cos\beta.d\beta=-\cos\beta.\sin(\lambda-\Pi-\psi_1)\,d\pi+\sin\pi\cos B\cos(L-\Pi)\,d\Pi$$

Исключивъ отсюда $\cos B \cos (L - \Pi)$ посредствомъ третьяго изъ уравненій (397), получимъ

$$d\beta = -\sin(\lambda - \Pi - \psi_1)\, d\pi + \pi . \cos(\lambda - \Pi - \psi_1)\, d\Pi \qquad (398)$$

Для опредѣленія $d\lambda$, будемъ дифференцировать второе изъ уравненій (397). Положимъ предварительно для краткости $\lambda - \Pi - \psi_1 = \lambda_1$, тогда находимъ

$$-\sin\beta \sin\lambda_1\, d\beta + \cos\beta \cos\lambda_1\, d\lambda_1 = \cos\pi . \sin B\, d\pi - \sin\pi \cos B \sin(L - \Pi)\, d\pi$$
$$- \cos\pi \cos B \cos(L - \Pi)\, d\pi$$

Обращая вниманіе на первое и третье изъ уравненій (397), легко приводимъ предыдущее къ виду

$$-\sin\beta \sin\lambda_1\, d\beta + \cos\beta \cos\lambda_1\, d\lambda_1 = \sin\beta\, d\pi - \cos\pi \cos\beta \cos\lambda_1\, d\Pi$$

Внося въ это уравненіе вмѣсто $d\beta$ найденную сейчасъ его величину, получимъ

$$\cos\beta \cos\lambda_1\, d\lambda_1 = \sin\beta \cos^2\lambda_1\, d\pi + [\sin\beta \sin\pi \sin\lambda_1 \cos\lambda_1 - \cos\pi \cos\beta \cos\lambda_1]\, d\Pi$$

откуда имѣемъ

$$d\lambda_1 = \operatorname{tang}\beta \cos\lambda_1\, d\pi + [\operatorname{tang}\beta \sin\pi \sin\lambda_1 - \cos\pi]\, d\Pi$$

По малости величины π, мы можемъ считать $\sin\pi = \pi$ и $\cos\pi = 1$ и такъ какъ $d\lambda_1 = d\lambda - d\Pi - d\psi_1$, то послѣднее уравненіе даетъ

$$d\lambda - d\Pi - d\psi_1 = \operatorname{tang}\beta \cos(\lambda - \Pi - \psi_1)\, d\pi - \pi \operatorname{tang}\beta \sin(\lambda - \Pi - \psi_1)\, d\Pi - d\Pi$$

откуда

$$d\lambda = d\psi_1 + \operatorname{tang}\beta . \cos(\lambda - \Pi - \psi_1)\, d\pi + \pi \operatorname{tang}\beta \sin(\lambda - \Pi - \psi_1)\, d\Pi \qquad (399)$$

По уравненіямъ (398) и (399) заключаемъ, что годичныя измѣненія координатъ λ и β отъ прецессіи представляются въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} &= -\sin(\lambda - \Pi - \psi_1) \frac{d\pi}{dt} + \pi . \cos(\lambda - \Pi - \psi_1) \frac{d\Pi}{dt} \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{d\psi_1}{dt} + \operatorname{tang}\beta \cos(\lambda - \Pi - \psi_1) \frac{d\pi}{dt} + \pi . \operatorname{tang}\beta \sin(\lambda - \Pi - \psi_1) \frac{d\Pi}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (400)$$

Мы означаемъ чрезъ π наклоненіе эклиптики $1800 + t$ къ эклиптикѣ 1800 года; эту величину можно представить себѣ какъ ея годичное измѣненіе умноженное на число лѣтъ заключающихся въ разсматриваемомъ промежуткѣ времени, т. е. мы можемъ положить $\pi = \frac{d\pi}{dt} \cdot t$. Принимая это, представимъ первое изъ уравненій (400) въ формѣ

$$\frac{d\beta}{dt} = -\sin(\lambda - \Pi - \psi_1) \frac{d\pi}{dt} + \frac{d\pi}{dt} \cos(\lambda - \Pi - \psi_1)\, t \cdot \frac{d\Pi}{dt}$$

Изъ выраженія (h) мы видимъ, что $t \cdot \frac{d\Pi}{dt}$ даже для большаго промежутка времени, т. е. для значительнаго t будетъ такою малою дугой, которую можно принимать за

соотвѣтствующій синусъ; такъ что вмѣсто $t \cdot \frac{d\Pi}{dt}$ мы можемъ поставить въ предыдущемъ выраженіи $\sin\left(t \cdot \frac{d\Pi}{dt}\right)$; а въ первомъ членѣ мы введемъ множитель $\cos\left(t \cdot \frac{d\Pi}{dt}\right)$, который мало разнится отъ единицы. Такое введеніе тѣмъ болѣе позволительно, что дѣлается въ членѣ содержащемъ малаго множителя $\frac{d\pi}{dt}$. Послѣ всего этого предыдущее выраженіе приметъ форму

$$\frac{d\beta}{dt} = -\sin\left[\lambda - \Pi - \psi_1 - t\frac{d\Pi}{dt}\right]\frac{d\pi}{dt}$$

Совершенно подобными же преобразованіями сдѣланными въ двухъ послѣднихъ членахъ втораго изъ уравненій (400) мы приводимъ это послѣднее къ виду

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\psi_1}{dt} + \operatorname{tang}\beta\cos\left[\lambda - \Pi - \psi_1 - t\frac{d\Pi}{dt}\right]\cdot\frac{d\pi}{dt}$$

Положимъ здѣсь для краткости

$$M = \Pi + \psi_1 + t \cdot \frac{d\Pi}{dt}$$

тогда

(401)
$$\frac{d\beta}{dt} = -\sin(\lambda - M)\frac{d\pi}{dt}$$
$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\psi_1}{dt} + \operatorname{tang}\beta\cos(\lambda - M)\frac{d\pi}{dt}$$

гдѣ, на основаніи выраженій (b) и (k), можно считать

(k) $$M = 172^0\ 45'\ 31'' + 33'',233 \, . \, t$$

Чтобы получить величину прецессіи въ долготѣ или широтѣ въ теченіи какого нибудь промежутка времени, напр., чтобы найти измѣненіе широты и долготы звѣзды отъ прецессіи въ періодъ времени отъ $1800 + t$ до $1800 + t'$, мы должны интегрировать выраженія (401) въ предѣлахъ отъ t до t'. Такимъ образомъ, если назовемъ долготу и широту свѣткла соотвѣтствующія моменту t чрезъ λ и β, тѣ же координаты для времени t' — чрезъ λ' и β', то

$$\lambda' - \lambda = \int_t^{t'} \frac{d\lambda}{dt}\,dt; \qquad \beta' - \beta = \int_t^{t'} \frac{d\beta}{dt}\,dt$$

гдѣ производныя $\frac{d\lambda}{dt}$ и $\frac{d\beta}{dt}$ представляются выраженіями (401). Извѣстно, что если подъ интегральная функція не мѣняетъ знака между предѣлами интеграла (условіе выполняющееся въ разсматриваемомъ случаѣ), то опредѣленный интегралъ съ удовлетворительною точностію можетъ быть представленъ разностію предѣловъ умноженною на величину подъинтегральной функціи взятой для средняго между предѣлами значе-

нія перемѣннаго. И такъ, если величины подъинтегральныхъ функцій для средняго значенія перемѣннаго означимъ чрезъ $\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_0$ и $\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_0$, то

$$\lambda' - \lambda = (t' - t)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_0; \qquad \beta' - \beta = (t' - t)\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_0$$

Обращая вниманіе на выраженія (b) и (g), представимъ уравненія (401) въ видѣ

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} &= -\,[0'',4776 - 0{,}0000069\,.\,t]\sin(\lambda - M) \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \quad 50'',2411 + 0'',0002268\,.\,t \\ &\qquad + [0'',4776 - 0{,}0000069\,.\,t]\,\mathrm{tang}\,\beta\cos(\lambda - M) \end{aligned} \tag{401*}$$

Этими выраженіями мы и должны пользоваться для вычисленія $\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_0$ и $\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_0$, которыя получимъ, если только въ выраженія (401*), равно какъ и въ выраженіи (k), поставимъ вмѣсто t величину равную половинѣ того промежутка времени, для котораго хотимъ вычислить измѣненія координатъ отъ вліянія прецессіи. Такъ напр., если мы хотимъ опредѣлить измѣненіе координатъ отъ 1800 до 1860 года, то въ выраженіяхъ (401*) должны принять $t = 30$. При вычисленіи производныхъ $\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_0$ и $\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_0$ при помощи выраженій (401*) вмѣсто λ и β слѣдуетъ поставить значенія координатъ также соотвѣтствующія срединѣ разсматриваемаго промежутка времени, но вмѣсто этого за β можно считать данную величину широты, соотвѣтствующую началу разсматриваемаго промежутка времени, а вмѣсто λ совершенно удовлетворительно поставить величину λ измѣненную общею прецессіею въ теченіи половины разсматриваемаго промежутка. Такъ что если назовемъ величины λ и β соотвѣтствующія 1800 году чрезъ λ_0 и β_0, то при вычисленіи $\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_0$ и $\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_0$ изъ выраженій (401*) можно вмѣсто λ и β поставится $\lambda_0 + \psi_1\,.\,t$ и β_0, гдѣ подъ t разумѣемъ опять величину равную половинѣ разсматриваемаго промежутка времени.

Чтобы подтвердить возможность такаго допущенія, покажемъ, что измѣненіе широты отъ прецессіи есть всегда величина порядка π, а измѣненіе долготы въ теченіи извѣстнаго промежутка времени разнится отъ измѣненія производимаго одной общей прецессіей также членами порядка π. Разсматривая выраженіе (g), мы заключаемъ, что π даже для большихъ промежутковъ времени, для цѣлыхъ столѣтій есть на столько малая величина, что можно принять $\sin\pi = \pi$ и $\cos\pi = 1$. При такомъ допущеніи уравненія (397) принимаютъ видъ

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \sin B - \pi\,.\cos B\sin(L - \Pi) \\ \cos\beta\sin(\lambda - \Pi - \psi_1) &= \cos B\sin(L - \Pi) + \pi\,.\sin B \\ \cos\beta\cos(\lambda - \Pi - \psi_1) &= \cos B\cos(L - \Pi) \end{aligned} \tag{402}$$

Умножимъ третье изъ этихъ уравненій на $\sin(L - \Pi)$, а второе на $\cos(L - \Pi)$ и вычтемъ первое произведеніе изъ втораго. Умножимъ за тѣмъ третье изъ предыду-

щихъ уравненій па $\cos(L - \Pi)$, второе на $\sin(L - \Pi)$ и возмемъ сумму произведеній. Послѣ всего этого будемъ имѣть

$$\cos\beta \sin(\lambda - L - \psi_1) = \pi . \sin B \cos(L - \Pi)$$
$$\cos\beta \cos(\lambda - L - \psi_1) = \cos B + \pi . \sin B \sin(L - \Pi)$$

Раздѣливъ одно изъ этихъ уравненій на другое, получимъ

$$\operatorname{tang}(\lambda - L - \psi_1) = \frac{\pi . \operatorname{tang} B \cos(L - \Pi)}{1 + \pi \operatorname{tang} B \sin(L - \Pi)}$$

Мы видимъ отсюда, что разность $\lambda - L - \psi_1$ есть величина порядка π, а потому принимая тангенсъ ея за самую дугу и ограничиваясь первыми степенями π, имѣемъ

$$\lambda - L - \psi_1 = \pi . \operatorname{tang} B . \cos(L - \Pi)$$

откуда

(403) $$\lambda - L = \psi_1 + \pi . \operatorname{tang} B \cos(L - \Pi)$$

Первое изъ уравненій (402) даетъ

$$2 . \sin\left(\frac{\beta - B}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta + B}{2}\right) = - \pi . \cos B \sin(L - \Pi)$$

Это выраженіе показываетъ намъ, что $\sin\left(\frac{\beta - B}{2}\right)$ есть величина порядка π, а потому можемъ принять синусъ за самую дугу и положить $\cos\frac{\beta + B}{2} = \cos B$, тогда предыдущее выраженіе дастъ

(404) $$\beta - B = - \pi . \sin(L - \Pi)$$

это уравненіе вмѣстѣ съ уравненіемъ (403) подтверждаетъ то, что мы имѣли въ виду доказать.

Выраженіями (403) и (404) мы и должны пользоваться для опредѣленія λ и β при вычисленіи производныхъ $\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_0$ и $\left(\frac{d\beta}{dt}\right)_0$. За L и B въ этомъ случаѣ мы должны считать данныя координаты звѣзды.

58. Опредѣлимъ теперь вліяніе прецессіи на склоненіе и прямое восхожденіе какой либо звѣзды. Представимъ себѣ, что P_0PEE' (фиг. 38) есть большой кругъ проведенный черезъ полюсъ P_0 постоянной плоскости, т. е. эклиптики 1800 года и чрезъ полюсъ средняго экватора $1800 + t$ года. Пусть, какъ прежде, дуга $S'E$ представляетъ пересѣченіе постоянной плоскости со сферой небесной, дуга $S''E'$ — пересѣченіе эклиптики $1800 + t$ года съ той же сферой и дуга $S'A'$ пусть будетъ пересѣченіе со сферой небесной средняго экватора $1800 + t$ года. Пусть въ S находится звѣзда, вліяніе прецессіи на склоненіе и прямое восхожденіе которой хотимъ теперь опредѣлить. Назовемъ искомыя склоненіе и прямое восхожденіе звѣзды соотвѣтствующія времени $1800 + t$ чрезъ δ и α. Остальныя означенія удержимъ прежнія. Проведя черезъ звѣзду кругъ широты относительно постоянной эклиптики и кругъ склоненія относительно средняго экватора $1800 + t$ года, получимъ сферическій треугольникъ P_0PS, сторонами котораго будутъ $90 - B$, $90 - \delta$ и ω, ибо отъ прецес-

ciи экваторъ перемѣщается такимъ образомъ, что наклоненіе его къ постоянной плоскости не измѣняется, а слѣдовательно наклоненіе средняго экватора $1800+t$ года къ эклиптикѣ 1800 года будетъ равно наклоненію средняго экватора 1800 года къ эклиптикѣ 1800 года. Понятно, что точка S' пересѣченія средняго экватора $1800+t$ года съ эклиптикой 1800 года служитъ полюсомъ большому кругу P_0PA', а потому, если соединимъ большими кругами точку S' съ P_0 и P_1, то углы $S'P_0P$ и P_0PS' будутъ прямые. Въ разсматриваемомъ нами треугольникѣ уголъ

$$SP_0P = S'P_0P - S'P_0S = 90^\circ - (L+\psi)$$

Также уголъ $P_0PS = P_0PS' + S'PS$, или $P_0PS = 90^\circ + a + \alpha$. Подъ ψ разумѣемъ здѣсь луно-солнечную прецессію, а подъ a — прецессію отъ планетъ. Разсматриваемый нами треугольникъ даетъ

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \cos\omega\sin B + \sin\omega\cos B\sin(L+\psi) \\ \cos\delta\sin(\alpha+a) &= -\sin\omega\sin B + \cos\omega\cos B\sin(L+\psi) \\ \cos\delta\cos(\alpha+a) &= \cos B\cos(L+\psi) \end{aligned} \qquad (405)$$

Этими уравненіями мы опять будемъ пользоваться только для опредѣленія годичныхъ измѣненій склоненія и прямаго восхожденія отъ вліянія прецессіи.

Принимая при всѣхъ послѣдующихъ дифференцированіяхъ за постоянныя только L и B, получимъ изъ перваго уравненія

$$\cos\delta\, d\delta = -\sin\omega\sin B\, d\omega + \cos\omega\cos B\sin(L+\psi)\, d\omega + \sin\omega\cos B\cos(L+\psi)\, d\psi$$

при помощи втораго и третьяго изъ уравненій (405), отсюда находимъ

$$d\delta = \sin(\alpha+a)\, d\omega + \sin\omega\cos(\alpha+a)\, d\psi \qquad (406)$$

Дифференцируя второе изъ уравненій (405), имѣемъ

$$\begin{aligned} &-\sin\delta\sin(\alpha+a)\, d\delta + \cos\delta\cos(\alpha+a)\, d(\alpha+a) = \\ &-[\cos\omega\sin B + \sin\omega\cos B\sin(L+\psi)]\, d\omega + \cos\omega\cos B\cos(L+\psi)\, d\psi \end{aligned}$$

что при помощи перваго и третьяго изъ уравненій (405) преобразовывается въ

$$\begin{aligned} &-\sin\delta\sin(\alpha+a)\, d\delta + \cos\delta\cos(\alpha+a)\, d(\alpha+a) = \\ &-\sin\delta\, d\omega + \cos\delta\cos(\alpha+a)\cos\omega\, d\psi \end{aligned}$$

раздѣливъ все это на $\cos\delta$ и внося вмѣсто $d\delta$ его величину изъ выраженія (406), получимъ

$$d(\alpha+a) = -\cos(\alpha+a)\operatorname{tang}\delta\,.\,d\omega + \sin(\alpha+a)\sin\omega\operatorname{tang}\delta\,.\,d\psi + \cos\omega\,.\,d\psi$$

Изъ выраженія (f) мы видимъ, что a есть столь же малая величина какъ и π, а потому принимая $\cos a = 1$ и $\sin a = a\,.\sin 1''$ и пренебрегая малой величиной $a\,.\sin 1''\dfrac{d\omega}{dt}$, приводимъ предыдущее уравненіе и уравненіе (406) къ виду

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{da}{dt} + \left[\cos\omega + \sin\omega\operatorname{tang}\delta\sin\alpha\right]\frac{d\psi}{dt} \\ &\qquad + \left[a\,.\sin 1''.\sin\omega\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\omega}{dt}\right]\cos\alpha\operatorname{tang}\delta \\ \frac{d\delta}{dt} &= \cos\alpha\sin\omega\cdot\frac{d\psi}{dt} - \left[a\,.\sin 1''\sin\omega\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\omega}{dt}\right]\sin\alpha \end{aligned}$$

Но если, принимая извѣстныя нами величины a, $\frac{d\omega}{dt}$ и $\frac{d\psi}{dt}$, вычислимъ коеффиціентъ

$$a \sin 1''.\sin\omega\frac{d\psi}{dt}-\frac{d\omega}{dt}$$

то найдемъ его равнымъ столь малой величинѣ, которая въ теченіи многихъ тысячъ лѣтъ едва достигаетъ одной секунды, а потому послѣдніе члены въ предыдущихъ уравненіяхъ могутъ быть опущены. Полагая въ остальномъ

$$m=\cos\omega\frac{d\psi}{dt}-\frac{da}{dt}$$

(407)

$$n=\sin\omega\frac{d\psi}{dt}$$

найдемъ, что годичныя измѣненія отъ прецессіи склоненія и прямаго восхожденія звѣзды будутъ имѣть форму

$$\frac{d\alpha}{dt}=m+n.\mathrm{tang}\,\delta\sin\alpha$$

(408)

$$\frac{d\delta}{dt}=n.\cos\alpha$$

Если, пользуясь этими выраженіями, хотимъ по даннымъ величинамъ α и δ соотвѣтствующимъ времени $1800+t$ вычислить величины координатъ α' и δ' для времени $1800+t'$, то къ разсматриваемому случаю можемъ примѣнить извѣстную намъ теорему о величинѣ опредѣленнаго интеграла, тогда искомыя измѣненія координатъ въ теченіи промежутка времени $t'-t$ будутъ

(409) $$\alpha'-\alpha=(t'-t)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0;\qquad \delta'-\delta=(t'-t)\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0$$

гдѣ, какъ прежде, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$ и $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0$ представляютъ собою значенія производныхъ соотвѣтствующія срединѣ разсматриваемаго промежутка времени. Но здѣсь вопросъ долженъ быть рѣшенъ послѣдовательными приближеніями и для перваго приближенія въ уравненіяхъ (408) за величины α и δ должны быть приняты данныя величины координатъ соотвѣтствующія началу разсматриваемаго промежутка.

59. Мы видѣли, что годичныя измѣненія прямаго восхожденія и склоненія звѣзды зависящія отъ прецессіи представляются производными (408) и знаемъ, что для того чтобы получить измѣненія этихъ координатъ, происшедшія въ данный промежутокъ ремени $t'-t$, достаточно въ большинствѣ случаевъ помножить разность $t'-t$ на величины производныхъ (408) соотвѣтствующія эпохѣ $\frac{t'+t}{2}$. Величины m и n, входящіи въ выраженія упомянутыхъ производныхъ, зависятъ отъ $\frac{da}{dt}$, числовая величина которой получается на основаніи данныхъ заимствованныхъ изъ теоріи вѣковыхъ возмущеній планетъ. Функціи m и n зависятъ также отъ производной $\frac{d\psi}{dt}$, величина ко-

торой, какъ увидимъ ниже, можетъ быть найдена чрезъ сравненіе наблюдаемыхъ и вычисленныхъ координатъ звѣздъ. Если бы звѣзды были дѣйствительно неподвижны въ пространствѣ, то изъ наблюденій всякой звѣзды произвольно выбранной получалась бы по извѣстному пріему одна и таже величина производной $\frac{d\psi}{dt}$ и эта величина найденная изъ наблюденій была бы тѣмъ вѣрнѣе, чѣмъ значительнѣе промежутки времени отдѣляющіе собою времена наблюденій произведенныхъ съ цѣлію опредѣленія $\frac{d\psi}{dt}$. Но по большей части этимъ способомъ получаются изъ наблюденій различныхъ звѣздъ различныя между собою величины производной $\frac{d\psi}{dt}$ и эти разности проще всего должны быть объяснены собственнымъ движеніемъ звѣздъ, которое, какъ мы теперь предполагаемъ, подобно вліянію прецессіи измѣняетъ координаты звѣздъ пропорціонально времени, такъ что если назовемъ величину годичнаго движенія звѣзды по прямому восхожденію чрезъ μ, то измѣненіе прямаго восхожденія звѣзды въ теченія τ лѣтъ представится въ видѣ $\tau . \mu$. Болѣе подробно объ изслѣдованіи собственныхъ движеній мы будемъ говорить ниже, теперь же ограничимся этимъ замѣчаніемъ.

И такъ координаты средняго положенія звѣзды измѣняются со временемъ вслѣдствіе прецессіи и собственнаго движенія этой звѣзды, а потому въ звѣздныхъ каталогахъ даются координаты средняго положенія звѣзды только для извѣстнаго времени, для извѣстной эпохи. Для того чтобы по среднему положенію звѣзды соотвѣтствующему извѣстной эпохѣ можно было удобно вычислить среднее положеніе для всякой другой эпохи, въ звѣздныхъ каталогахъ даются еще годичныя измѣненія склоненія и прямаго восхожденія вслѣдствіе прецессіи и собственнаго движенія. Эти величины въ звѣздныхъ росписяхъ расположены подъ рубриками: variatio annua и motus proprius. Но луно-солнечная прецессія, а слѣдовательно и зависящія отъ нея функціи m и n, измѣняются со временемъ, это въ свою очередь является причиною того, что величину variatio annua для данной звѣзды нельзя считать постоянною; поэтому въ звѣздныхъ каталогахъ дается еще измѣненіе величины variatio annua въ теченіи ста лѣтъ. Такія столѣтнія измѣненія для каждой звѣзды въ звѣздныхъ росписяхъ располагаются подъ рубрикой variatio secularis. Легко понять способъ введенія всѣхъ этихъ величинъ въ вычисленіе при опредѣленіи по среднему прямому восхожденію и склоненію соотвѣтствующимъ данной эпохѣ тѣхъ же координатъ для другой эпохи. При объясненіи этого способа будемъ имѣть въ виду одно прямое восхожденіе и что скажемъ о немъ, то будетъ относиться и къ вычисленію средняго склоненія.

Мы принимаемъ, что variatio annua $= \frac{d\alpha}{dt}$; понятно, что годичное измѣненіе этой величины можетъ быть представлено въ видѣ

$$\frac{\text{variatio secularis}}{100} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

Положимъ, что эпоха каталога есть $1800 + t$ годъ; другая эпоха, для которой хотимъ вычислить среднее прямое восхожденіе, пусть будетъ $1800 + t'$. Среднее прямое восхожденіе соотвѣтствующее времени $1800 + t$ можно разсматривать какъ функцію времени и положить

$$\alpha = f(\tau)$$

гдѣ $\tau = 1800 + t$. Точно также искомое прямое восхожденіе соотвѣтствующее времени $1800 + t'$ можно представить въ видѣ

$$\alpha' = f(\tau')$$

гдѣ $\tau' = 1800 + t'$. Если положимъ для краткости $\tau' - \tau = k$, то искомое

$$\alpha' = f(\tau + k)$$

или ограничиваясь тремя первыми членами строки Тейлора, получимъ

$$\alpha' = f(\tau) + k \,.\, f'(\tau) + \frac{k^2}{1\,.\,2} f''(\tau)$$

но

$$k = t' - t\,, \qquad f(\tau) = \alpha\,, \qquad f'(\tau) = \frac{d\alpha}{dt}\,, \qquad f''(\tau) = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

Слѣдовательно полное измѣненіе прямаго восхожденія отъ прецессіи въ промежутокъ времени $t' - t$ выразится чрезъ

$$\alpha' - \alpha = (t' - t)\frac{d\alpha}{dt} + \frac{(t' - t)^2}{1\,.\,2} \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

Это измѣненіе представляется еще въ формѣ

$$\alpha' - \alpha = (t' - t)\left[\text{variatio annua} + \frac{t' - t}{200}\,\text{variatio secularis}\right]$$

Но чтобы имѣть среднее прямое восхожденіе для эпохи $1800 + t'$, слѣдуетъ принять еще во вниманіе собственное движенія звѣзды въ теченіи промежутка времени $t' - t$. Назовемъ годичное измѣненіе прямаго восхожденія отъ собственнаго движенія чрезъ μ, тогда измѣненіе отъ собственнаго движенія въ теченіи промежутка $t' - t$ выразится, по нашему предположенію, чрезъ $\mu\,(t' - t)$. Если означимъ для краткости variatio annua чрезъ p и variatio secularis чрезъ Δp, то полное измѣненіе средняго прямаго восхожденія въ теченіи промежутка времени $t' - t$ представится чрезъ

$$(410) \qquad \alpha' - \alpha = (t' - t)\left[p + \frac{\Delta p}{200}(t' - t) + \mu\right]$$

Подобнымъ же образомъ полное измѣненіе средняго склоненія въ теченіи промежутка времени $t' - t$ будетъ

$$(411) \qquad \delta' - \delta = (t' - t)\left[q + \frac{\Delta q}{200}(t' - t) + \nu\right]$$

гдѣ ν, q и Δq имѣютъ тоже самое значеніе для склоненія, какое μ, p и Δp имѣютъ для прямаго восхожденія.

Остается еще показать какимъ образомъ вычисляются производныя $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ и $\frac{d^2\delta}{dt^2}$ въ зависимости отъ функцій m и n, т. е. остается показать, какимъ образомъ находятся величины variatio secularis. Означимъ годичныя измѣненія m и n чрезъ $\frac{dm}{dt}$ и $\frac{dn}{dt}$, тогда первое изъ уравненій (408) дастъ

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = m' + n'.\sin\alpha\,\text{tang}\,\delta + n.\cos\alpha\,\text{tang}\,\delta\,\frac{d\alpha}{dt} + n\frac{\sin\alpha}{\cos^2\delta}\frac{d\delta}{dt}$$

гдѣ $m' = \frac{dm}{dt}$, $n' = \frac{dn}{dt}$. Исключая отсюда производныя $\frac{d\alpha}{dt}$ и $\frac{d\delta}{dt}$ посредствомъ ихъ выраженій (408), находимъ

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = m' + n'.\sin\alpha\,\text{tang}\,\delta + n.m.\cos\alpha\,\text{tang}\,\delta + n^2\sin\alpha\cos\alpha\,\text{tang}^2\,\delta + n^2\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\delta}$$

или наконецъ

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = m' + n'.\sin\alpha\,\text{tang}\,\delta + n.m.\cos\alpha\,\text{tang}\,\delta + n^2\left(\frac{1+\sin^2\delta}{2\cos^2\delta}\right)\sin 2\alpha \qquad (412)$$

также находимъ

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = n'.\cos\alpha - n.\sin\alpha\,\frac{d\alpha}{dt}$$

или

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = n'.\cos\alpha - m.n.\sin\alpha - n^2.\,\text{tang}\,\delta\sin^2\alpha \qquad (413)$$

Посредствомъ этого и предыдущаго выраженія для $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ опредѣляются величины variatio secularis въ прямомъ восхожденіи и склоненіи свѣтила.

60. Изложенный способъ вычисленія измѣненій координатъ отъ прецессіи основывается на приближенномъ вычисленіи опредѣленнаго интеграла и потому не можетъ считаться достаточно точнымъ въ примѣненіи къ координатамъ звѣздъ близкихъ къ полюсу и для большихъ промежутковъ времени. Въ этомъ случаѣ для вычисленія прецессіи слѣдуетъ пользоваться точными уравненіями.

Если имѣемъ въ виду опредѣлить вліяніе прецессіи на широту и долготу звѣзды въ періодъ отъ $1800 + t$ года до $1800 + t'$ года, то примѣненіе точныхъ уравненій (397) къ рѣшенію этого вопроса должно состоять въ слѣдующемъ. Уравненіями (397) представляется зависимость между координатами λ и β соотвѣтствующими времени $1800 + t$ и координатами L и B соотвѣтствующими началу 1800 года. Уравненіями совершенно подобнаго же вида представляется связь между координатами λ' и β' соотвѣтствующими времени $1800 + t'$ и тѣми же координатами L и B. Исключеніе изъ этихъ двухъ системъ уравненій координатъ L и B приведетъ къ искомымъ соотношеніямъ между координатами λ' и β' и данными координатами λ и β. Слѣдовательно такой новой системой уравненій строго рѣшается вопросъ. Но этотъ же вопросъ болѣе просто можетъ быть рѣшенъ на основаніи чисто геометрическихъ соображеній. Прослѣдимъ подобное рѣшеніе для координатъ отнесенныхъ къ экватору и получающихся изъ непосредственныхъ наблюденій.

Пусть $A'AP'P$ (фиг. 39) представляетъ собою большой кругъ сферы небесной проходящій чрезъ полюсы P и P' двухъ положеній экватора NA и NA'. Пусть AN представляетъ собою положеніе средняго экватора $1800 + t$ года и NA'—положеніе средняго экватора $1800 + t'$ года. Пусть наконецъ EE' будетъ пересѣченіе со сферой небесной постоянной плоскости, т. е. эклиптики 1800 года. Если ν и ν' представляютъ собою среднія равноденственныя точки соотвѣтствующія одна $1800 + t$ году, другая $1800 + t'$ году, то дуга $\nu E = a$ есть прецессія отъ планетъ въ про-

межутокъ времени отъ 1800 до $1800+t$ года. Подобнымъ же образомъ дуга $E'\nu'=a'$ есть прецессія отъ планетъ въ періодъ отъ 1800 до $1800+t'$ года. Положимъ $NE=90^\circ-z$, $NE'=90^\circ+z'$, $ENE'=\theta$. Назовемъ склоненіе и прямое восхожденіе звѣзды S отнесенныя къ среднему экватору $1800+t$ года чрезъ α и δ; склоненіе и прямое восхожденіе той же звѣзды относительно экватора $1800+t'$ года пусть будутъ δ' и α'. Чтобы найти соотношеніе между координатами α, δ и α' δ' разсмотримъ сферическій треугольникъ $PP'S$, сторонами котораго будутъ $PS=90^\circ-\delta$, $P'S=90^\circ-\delta'$, $PP'=\theta$. Чтобы опредѣлить въ этомъ треугольникѣ углы при P и P', замѣтимъ, что точка N служитъ полюсомъ большому кругу $A'AP'P$; слѣдовательно если соединимъ точку N большими кругами съ точками P и P', то углы $NP'P$ и NPP' будутъ прямые; но въ нашемъ треугольникѣ уголъ

$$PP'S=NP'P+E'P'N-E'P'S=90^\circ+(90^\circ+z')-(\alpha'+a')=180^\circ-(\alpha'+a'-z').$$

Совершенно подобнымъ же образомъ найдемъ, что уголъ $P'PS=P'PN+NPS$ $=90^\circ+NPS$, но $NPS=EPS-EPN=a+\alpha-(90^\circ-z)$. Слѣдовательно $P'PS=a+\alpha+z$. Имѣя это, получимъ слѣдующія соотношенія между частями треугольника $P'PS$:

$$\begin{aligned}
\sin\delta' &= \sin\delta\cos\theta+\cos\delta\sin\theta\cos(a+\alpha+z)\\
(414)'\quad \cos\delta'\cos(\alpha'+a'-z') &= -\sin\delta\sin\theta+\cos\delta\cos\theta\cos(a+\alpha+z)\\
\cos\delta'\sin(\alpha'+a'-z') &= \cos\delta\sin(\alpha+a+z)
\end{aligned}$$

Эти уравненія и могутъ служить для рѣшенія нашего вопроса, т. е. для опредѣленія α' и δ' по α и δ, если только покажемъ еще возможность опредѣлить величины z, z' и θ. Это сдѣлать не трудно. Разсмотримъ сферическій треугольникъ $EE'N$. Замѣтимъ, что дуга постоянной эклиптики заключающаяся между двумя положеніями экватора есть приращеніе луно-солнечной прецессіи въ тотъ промежутокъ времени, который употребилъ экваторъ для перемѣщенія изъ одного разсматриваемаго положенія въ другое, для нашего случая—въ промежутокъ времени равный $t'-t$. Назовемъ луно-солнечную прецессію соотвѣтствующую времени $1800+t$ чрезъ ψ, та же величина для $1800+t'$ пусть будетъ ψ', тогда сторонами разсматриваемаго нами теперь треугольника будутъ: $EE'=\psi'-\psi$; $NE=90^\circ-z$; $NE'=90^\circ+z'$ Углами этого треугольника согласно съ принятыми означеніями будутъ $NEE'=180^\circ-\omega$; $NE'E=\omega'$; $ENE'=\theta$. Замѣтимъ, что ω и ω' были бы между собою равны, если бы не измѣнялось дѣйствіе солнца и луны на земной сфероидъ отъ измѣненія положенія эклиптики, другими словами, ω и ω' были бы между собою равны, если бы въ величинѣ ω не происходило измѣненій представляющихся послѣднимъ членомъ выраженія (d). Примѣнимъ къ рѣшенію разсматриваемаго треугольника уравненія Гаусса:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{b+c}{2}=\sin\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$
$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{b+c}{2}=\cos\frac{a}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$
$$\cos\frac{A}{2}\sin\frac{b-c}{2}=\sin\frac{a}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$
$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2}=\cos\frac{a}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

которыя для нашего случая даютъ

$$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{z'-z}{2}=\sin\frac{\psi'-\psi}{2}\sin\frac{\omega+\omega'}{2}$$
$$\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{z'-z}{2}=\cos\frac{\psi'-\psi}{2}\sin\frac{\omega'-\omega}{2} \qquad (415)$$
$$\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{z'+z}{2}=\sin\frac{\psi'-\psi}{2}\cos\frac{\omega'+\omega}{2}$$
$$\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{z'+z}{2}=\cos\frac{\psi'-\psi}{2}\cos\frac{\omega'-\omega}{2}$$

Вторыя части этихъ уравненій совершенно извѣстны, а потому самыя уравненія могутъ служить для опредѣленія θ, z и z'. Вмѣсто уравненій (415) на практикѣ вполнѣ удовлетворительно пользоваться для опредѣленія θ, z и z' другими уравненіями хотя приближенными, но болѣе простыми по формѣ. Мы знаемъ, что $\frac{\omega'-\omega}{2}$ есть весьма малая величина и потому всегда можно принять $\sin\frac{\omega'-\omega}{2}=\frac{\omega'-\omega}{2}\sin 1''$ и $\cos\frac{\omega'-\omega}{2}=1$. Раздѣливъ третье изъ уравненій (415) на четвертое, получимъ при этомъ допущеніи

$$\operatorname{tang}\frac{z'+z}{2}=\operatorname{tang}\frac{\psi'-\psi}{2}\cos\frac{\omega'+\omega}{2} \qquad (416)$$

дѣленіе втораго изъ тѣхъ же уравненій на первое даетъ

$$\operatorname{tang}\frac{z'-z}{2}=\frac{(\omega'-\omega)\sin 1''}{2\,.\operatorname{tang}\frac{\psi'-\psi}{2}\sin\frac{\omega'+\omega}{2}} \qquad (417)$$

Этими двумя уравненіями мы и можемъ пользоваться для опредѣленія z и z'. Сомнѣнія при опредѣленіи дугъ по тангенсу здѣсь быть не можетъ, ибо опредѣляемыя дуги $\frac{z+z'}{2}$ и $\frac{z'-z}{2}$ всегда лежатъ въ первой четверти окружности. Раздѣливъ наконецъ первое изъ уравненій (415) на третье, имѣемъ

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\cos\frac{z'-z}{2}=\operatorname{tang}\frac{\omega'+\omega}{2}\sin\frac{z'+z}{2}$$

но вмѣсто этого вполнѣ удовлетворительно для опредѣленія θ пользоваться такимъ уравненіемъ

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}=\operatorname{tang}\frac{\omega'+\omega}{2}\sin\frac{z'+z}{2} \qquad (418)$$

Если θ, z и z' тѣмъ или другимъ способомъ найдены, то уравненіями (414) вполнѣ рѣшается вопросъ объ опредѣленіи координатъ α' и δ' по даннымъ α и δ.

При найденныхъ величинахъ z, z' и θ вмѣсто уравненій (414) выгодно также пользоваться другими получающимися черезъ примѣненіе уравненій Гаусса къ треугольнику $PP'S$. Назовемъ въ этомъ треугольникѣ уголъ при S чрезъ C и положимъ для краткости

$$\alpha + a + z = A; \qquad \alpha' + a' - z' = A'$$

Для примѣненія общихъ уравненій Гаусса къ нашему случаю сдѣлаемъ въ этихъ общихъ уравненіяхъ стороны $a = 90^0 - \delta'$, $b = 90^0 - \delta$ и $c = \theta$, тогда получимъ

$$
\begin{aligned}
&\sin\frac{90^0 - \delta'}{2}\sin\frac{A' + C}{2} = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{90^0 - \delta + \theta}{2}\\
&\cos\frac{90^0 - \delta'}{2}\sin\frac{A' - C}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{90^0 - \delta + \theta}{2}\\
(419) \qquad &\sin\frac{90^0 - \delta'}{2}\cos\frac{A' + C}{2} = \cos\frac{A}{2}\sin\frac{90^0 - \delta - \theta}{2}\\
&\cos\frac{90^0 - \delta'}{2}\cos\frac{A' - C}{2} = \text{cco}\frac{A}{2}\cos\frac{90^0 - \delta - \theta}{2}
\end{aligned}
$$

этими уравненіями и могутъ быть замѣнены уравненія (414).

Бессель для рѣшенія вопроса объ опредѣленіи α' и δ' по даннымъ α и δ предлагаетъ пользоваться уравненіями (414), вычисляя изъ нихъ разность $A' - A$; послѣ чего разность $\delta' - \delta$ опредѣляется при помощи извѣстныхъ аналогій Непера. Сущность рѣшенія предложеннаго Бесселемъ заключается въ слѣдующемъ. Вводя величины A и A', представимъ два послѣднія изъ уравненій (414) въ видѣ

$$
\begin{aligned}
\cos\delta'\cos A' &= -\sin\delta\sin\theta + \cos\delta\cos\theta\cos A\\
\cos\delta'\sin A' &= \qquad \cos\delta\sin A
\end{aligned}
$$

помощію этихъ уравненій легко составляемъ

$$\cos\delta'\sin(A' - A) = \cos\delta\sin A\cos A + \sin\delta\sin\theta\sin A - \cos\delta\cos\theta\cos A\sin A$$

$$\cos\delta'\cos(A' - A) = \cos\delta\sin^2 A - \sin\delta\sin\theta\cos A + \cos\delta\cos\theta\cos^2 A$$

оба эти уравненія легко представляются въ видѣ

$$\cos\delta'\sin(A' - A) = \text{cco}\,\delta\sin\theta\sin A\left[\text{tang}\,\delta + \frac{(1 - \cos\theta)}{\sin\theta}\cos A\right]$$

$$\cos\delta'\cos(A' - A) = \cos\delta - \cos\delta\sin\theta\cos A\left[\text{tang}\,\delta + \frac{(1 - \cos\theta)}{\sin\theta}\cos A\right]$$

или въ видѣ

$$\cos\delta'\sin(A' - A) = \cos\delta\sin\theta\sin A\left[\text{tang}\,\delta + \cos A\,\text{tang}\frac{\theta}{2}\right]$$

$$\cos\delta'\cos(A' - A) = \cos\delta - \cos\delta\cos A\sin\theta\left[\text{tang}\,\delta + \cos A\,\text{tang}\frac{\theta}{2}\right]$$

полагая здѣсь

$$(420) \qquad p = \sin\theta\left[\text{tang}\,\delta + \cos A\,\text{tang}\frac{\theta}{2}\right]$$

посредствомъ этихъ уравненій легко находимъ

$$(421) \qquad \text{tang}(A' - A) = \frac{p.\sin A}{1 - p.\text{cco}\,A}$$

откуда опредѣляется A', а слѣдовательно и искомое α'.

Что касается до δ', то его удобнѣе всего опредѣлить, примѣнивъ къ рѣшенію треугольника $PP'S$ (фиг. 39) аналогіи Непера. Примѣняя, напримѣръ, къ этому треугольнику второе изъ уравненій (392), сдѣлаемъ стороны

$$\alpha = 90^0 - \delta, \qquad \beta = 90^0 - \delta', \qquad \gamma = \theta$$

и получимъ

$$\operatorname{tang} \frac{\delta' - \delta}{2} = \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{\cos \dfrac{A' + A}{2}}{\cos \dfrac{A' - A}{2}} \qquad (422)$$

уравненіе, которымъ будемъ пользоваться для опредѣленія δ' по данному δ.

Чтобы пояснить сказанное на частномъ примѣрѣ, найдемъ среднее положеніе полярной звѣзды для начала 1876 года по среднему положенію ея для начала 1843 года. Такимъ образомъ за данныя вопроса будемъ считать взятыя изъ Nautical Almanac для 1843 года слѣдующія координаты звѣзды α ursae minoris

$$\alpha = 1^h\ 3^m\ 1^s.166; \qquad \delta = +88^0\ 28'\ 20''.38$$

Вычисляя при помощи выраженія (a) величину $\dfrac{\psi' - \psi}{2}$ и принимая при этомъ $t' = 76$ и $t = 43$, находимъ

$$\frac{\psi' - \psi}{2} = 13'\ 51''.042$$

Вычисляя подобнымъ же образомъ ω и ω' изъ выраженія (d), имѣемъ

$$\omega = 23^0\ 27'\ 54''.2336; \qquad \omega' = 23^0\ 27'\ 54''.2625$$

Величины ω' и ψ' относятся здѣсь къ началу 1876 года, а величины ω и ψ къ началу 1843 года. При помощи этого, изъ уравненій (416) и (417) находимъ сначала

$$\frac{z + z'}{2} = 762''.320 \text{ и } \frac{z' - z}{2} = 9''.006$$

откуда заключаемъ, что

$$z' = 0^0\ 12'\ 51''.326; \qquad z = 0^0\ 12'\ 33''.314$$

Имѣя z и z', изъ уравненія (418) находимъ

$$\theta = 0^0\ 11'\ 1''.82$$

Чтобы найти за тѣмъ изъ уравненія (420) величину p, вычислимъ прежде всего A. Мы видѣли, что

$$A = \alpha + a + z; \qquad A' = \alpha' + a' - z'$$

поэтому сначала вычислимъ изъ выраженія (f) величины a и a' и находимъ $a = 6''.054$ $a' = 10''.094$; послѣ чего имѣемъ $A = 15^0\ 57'\ 56''.858$. Обращаясь теперь къ уравненіямъ (420) и (421), вычисляемъ изъ нихъ

$$\log p = 9.0803113; \qquad A' - A = 2^0\ 8'\ 35''.31$$

откуда заключаемъ, что $A' = 18^0\ 6'\ 32''.17$; а слѣдовательно искомое

$$\alpha' = 18^0\ 19'\ 13''.402$$

Для опредѣленія δ' обращаемся къ уравненію (422) и изъ него находимъ

$$\frac{\delta' - \delta}{2} = 0^\circ\ 5'\ 16''.\ 44$$

а слѣдовательно искомое

$$\delta' = +\ 88^\circ\ 38'\ 53''.\ 26$$

Хотя мы вычисляли α' и δ' по α и δ на основаніи точныхъ формулъ данныхъ Бесселемъ, но не трудно убѣдиться, что весьма удовлетворительный результатъ получили бы и въ томъ случаѣ, когда стали бы пользоваться для той же цѣли приближенными выраженіями (409). Въ самомъ дѣлѣ, чтобы видѣть на сколько отличаются между собою результаты данные тѣмъ и другимъ способомъ, мы вычисляли послѣдовательными приближеніями координаты α' и δ' по уравненіямъ (407), (408) и (409). Прежде всего для средины промежутка времени отдѣляющаго начало 1843 отъ начала 1876 года, т. е. принимая $t = 59.5$, мы нашли по уравненіямъ (407)

$$m_0 = 46''.080 \quad \text{и} \quad \log n_0 = 1.30223$$

послѣ чего во второмъ приближеніи по уравненіямъ (408) получили

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 = 279''.\ 86 \quad \text{и} \quad \log\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0 = 1.28273$$

И наконецъ, имѣя это, изъ уравненій (409) нашли

$$\alpha' - \alpha = 2^\circ\ 33'\ 55''.\ 2; \qquad \delta' - \delta = 10'\ 32''.\ 76$$

слѣдовательно искомыя

$$\alpha' = 18^\circ\ 19'\ 12''.\ 7; \qquad \delta' = 88^\circ\ 38'\ 53''.\ 14$$

Что мало разнится отъ координатъ найденныхъ по способу Бесселя.

61. Мы сказали, что по причинѣ предессіи полюсъ экватора описываетъ кругъ около полюса эклиптики и радіусъ этого круга равенъ наклоненію экватора къ эклиптикѣ. Поэтому полюсъ экватора проходитъ чрезъ различныя точки видимой сферы небесной, и въ различныя времена по близости его будутъ находиться различныя звѣзды. Въ настоящее время звѣзда α ursae minoris есть ближайшая изъ яркихъ звѣздъ къ сѣверному полюсу экватора и потому называется полярною звѣздою (Poloris). Склоненіе α ursae minoris въ настоящее время равно приблизительно $88^\circ\ 38'$, но оно будетъ постоянно увеличиваться до тѣхъ поръ, пока прямое восхожденіе этой звѣзды, въ настоящее время равное $1^h\ 13^m$, не достигнетъ $2^h\ 30^m$; склоненіе звѣзды сдѣлается тогда наибольшимъ и будетъ приблизительно равно $89^\circ\ 32'$. Послѣ этого склоненіе теперешней полярной звѣзды будетъ уменьшаться, звѣзда будетъ удаляться отъ полюса экватора и названіе полярной звѣзды послѣдовательно будутъ получать различныя звѣзды.

Мы сказали какимъ образомъ при помощи звѣздной карты можетъ быть найдена звѣзда, которая въ извѣстное время должна называться полярной; но эта же задача можетъ быть рѣшена и на основаніи аналитическихъ соображеній. Если извѣстно мѣсто полюса для времени $1800 + t$, то найти его мѣсто для $1800 + t'$ года значитъ вычислить склоненіе и прямое восхожденіе, отнесенныя къ экватору и равноден-

ствію $1800+t$ года, той точки сферы небесной, которую будетъ занимать полюсъ въ $1800+t'$ году. Для рѣшенія этого вопроса будемъ имѣть въ виду фигуру 39. Предположимъ, какъ прежде, что въ P находится полюсъ экватора $1800+t$ года, а въ P' полюсъ экватора $1800+t'$ года. Назовемъ чрезъ α и δ прямое восхожденіе и склоненіе искомой точки сферы небесной отнесенныя къ среднему экватору $1800+t$ года, т. е. на нашемъ чертежѣ къ экватору представленному линіей AN и средней равноденственной точкѣ того же $1800+t$ года, т. е. къ точкѣ ν. Замѣтимъ прежде всего, что кругъ склоненія проведенный черезъ опредѣляемую точку P' пересѣчется съ экваторомъ въ точкѣ A, которая отстоитъ отъ точки N, считая по экватору, на 90^0 и при томъ прямое восхожденіе точки A на 90^0 менѣе прямаго восхожденія точки N; но прямое восхожденіе точки N отнесенное къ среднему равноденствію $1800+t$ года, т. е. къ точкѣ ν есть $\nu N = EN - \nu E = 90^0 - z - a$, а слѣдовательно прямое восхожденіе точки A будетъ $\alpha = -z - a$. На нашемъ чертежѣ $\delta = AP'$ или $\delta = 90^0 - \theta$. И такъ

$$\alpha = -z - a; \qquad \delta = 90^0 - \theta,$$

гдѣ a есть прецессія отъ планетъ соотвѣтствующая времени $1800+t$. Такимъ образомъ мы видимъ, что координаты α и δ будутъ найдены, если, вычисливъ для времени $1800+t$ и $1800+t'$ величины ψ, ψ', ω, ω' и a, найдемъ изъ уравненій (415) величины z и θ. Но вмѣсто этихъ точныхъ формулъ совершенно достаточно употребить слѣдующія приближенныя. Принявъ $z = z'$ и $\omega = \omega'$, изъ послѣднихъ двухъ уравненій (415) находимъ

$$\operatorname{tang} z = \operatorname{tang}\frac{\psi' - \psi}{2}\cos\omega$$

При тѣхъ же допущеніяхъ первое изъ уравненій (415) дастъ:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\psi' - \psi}{2}\sin\omega$$

Но при сдѣланныхъ нами допущеніяхъ слѣдуетъ принять $a = 0$. Тогда, помня, что

$$\alpha = -z - a; \qquad \delta = 90 - \theta$$

имѣемъ

$$\operatorname{tang}\alpha = -\operatorname{tang}\frac{\psi' - \psi}{2}\cos\omega$$

$$\sin\left(45^0 - \frac{\delta}{2}\right) = \sin\frac{\psi' - \psi}{2}\sin\omega$$

Эти уравненія и могутъ служить для опредѣленія искомыхъ α и δ. Сомнѣнія на счетъ четверти, въ которой лежитъ уголъ α устраняется тѣмъ, что $\cos\alpha$ и $\cos\frac{\psi' - \psi}{2}$ всегда имѣютъ одинакій знакъ, ибо $\cos\alpha = \cos z$, а знакъ $\cos z$ зависитъ, какъ видно изъ послѣдняго изъ уравненій (415), отъ знака $\cos\frac{\psi' - \psi}{2}$.

Предположимъ, что на основаніи этихъ теоретическихъ соображеній мы ищемъ мѣсто полюса для 14000 г. по Р. Хр., т. е. ищемъ координаты этой точки отнесен-

ныя къ среднему экватору и средней равноденственной точкѣ начала, напримѣръ, 1850 года, слѣдовательно въ нашемъ случаѣ $t=50$ и $t'=12200$. Поэтому $\psi'-\psi=165^\circ\ 33'$, послѣ чего предыдущія уравненія даютъ

$$\alpha = 277^\circ\ 52'; \qquad \delta = 43^\circ\ 28'$$

Но среднее прямое восхожденіе и склоненіе α Lyrae для начала 1850 года суть

$$\alpha = 277^\circ\ 58'; \qquad \delta = 38^\circ\ 39'$$

поэтому заключаемъ, что черезъ 12126 отъ настоящаго времени α Lyrae будетъ находиться въ разстояніи менѣе чѣмъ 5° отъ сѣвернаго полюса экватора и можетъ быть названа тогда полярною звѣздою.

62. Продолжая наблюденія приведшія къ открытію аберраціи, Брадлей убѣдился, что всѣ измѣненія въ склоненіяхъ звѣздъ рефракціей, прецессіей и аберраціей вполнѣ объяснены быть не могутъ; онъ заключилъ отсюда, что существуетъ еще другая причина измѣненій склоненій, дѣйствіе которой по величинѣ почти на половину менѣе дѣйствія аберраціи, но періодъ измѣненія значительно болѣе. Эта причина извѣстна теперь подъ именемъ *нутаціи* или *колебанія земной оси.*

Если бы земля была ограничена поверхностью сферы, то притяженіе оказываемое свѣтилами составляющими солнечную систему на землю имѣло бы вліяніе только на движеніе центра, т. е. на поступательное движеніе земли. Въ самомъ дѣлѣ, если въ C (фиг. 40) находится центръ земли, имѣющей сферическую форму, въ M ценръ притягивающаго свѣтила, то притяженіе M на C имѣло бы слѣдствіемъ только уменьшеніе разстоянія MC. Всякая точка a земнаго шара всегда имѣетъ соотвѣтствующую себѣ точку b, симметрично расположенную относительно линіи MC съ точкою a. При измѣненіи разстоянія MC отъ притяженія оказываемаго свѣтиломъ M линія ab, соединяющая каждую пару симметричныхъ относительно MC точекъ, будетъ перемѣщаться параллельно самой себѣ по направленію къ M. Ось вращенія земли PP', какое бы она не имѣла положеніе относительно линіи MC, отъ притяженія свѣтила M будемъ перемѣщаться также параллельно самой себѣ. Слѣдствіе притяженія свѣтила M на землю будетъ имѣть совершенно другой характеръ при фигурѣ земли отличной отъ фигуры сферы. Если земля имѣетъ форму эллипсоида вращенія $EPQP'$ (фиг. 41), экваторъ котораго есть EQ и малая ось, служащая вмѣстѣ съ тѣмъ осью вращенія земли, есть PP', то можно вообразить внутри земли шаръ $PP'ab$ описанный около ея центра радіусомъ равнымъ половинѣ оси вращенія, остальная часть земли будетъ покрывать этотъ шаръ слоемъ, ширина котораго будетъ возрастать по мѣрѣ приближенія къ экватору. Сегментъ $PQP'a$, представляющій половину этого слоя, будетъ болѣе притягиваться свѣтиломъ M, нежели подобный же сегментъ $PP'Eb$ составляющій вторую половину избытка эллипсоида надъ сферой. Отъ этой причины болѣе расширенная часть aQ перваго сегмента будетъ стремиться къ направленію CM, а ось PP' будетъ приближаться къ направленію pp'. Если бы земля не вращалась около оси, то экваторъ ея расположенный въ направленіи EQ со временемъ принялъ бы положеніе MM'. Если въ M находится центръ солнца, то слѣдствіемъ притяженія солнца на землю является стремленіе земнаго экватора придти къ совпаденію съ плоскостію эклиптики, но это перемѣщеніе каждой точки земнаго экватора соединяется съ

перемѣщеніемъ точки зависящимъ отъ вращенія земли около оси и при совмѣстномъ существованіи этихъ двухъ движеній происходитъ то, что стремленіе экватора совпасть съ эклиптикой преобразовывается въ отступательное движеніе равноденственной точки по эклиптикѣ и наклоненіе экватора къ эклиптикѣ подлежитъ нѣкоторымъ малымъ періодическимъ измѣненіямъ. Различныя фазы дѣйствія солнца на земной сфероидъ ежегодно повторяются въ одномъ и томъ же порядкѣ, а потому колебанія земной оси, производимыя дѣйствіемъ солнца, должно считать періодическою функцією долготы этого свѣтила. Луна также какъ и солнце дѣйствуетъ своимъ притяженіемъ на земной сфероидъ, она также какъ и солнце не движется въ плоскости экватора земнаго сфероида и стремится привести этотъ экваторъ къ совпаденіе съ плоскостію своей орбиты. Отъ такого дѣйствія луны происходитъ какъ измѣненіе въ наклоненіи земнаго экватора къ эклиптикѣ, такъ равно и своего рода перемѣщеніе равноденственныхъ точекъ по эклиптикѣ. Дѣйствіе луны на земной сфероидъ представляется въ болѣе сложной формѣ, чѣмъ дѣйствіе солнца. Это зависитъ отъ того, что сама орбита луны колеблется въ пространствѣ и линія пересѣченія орбиты съ плоскостію экватора, равно какъ и линія пересѣченія лунной орбиты съ эклиптикой движется отъ востока къ западу. Поэтому въ выраженіе вліянія луны на колебанія земной оси входятъ члены зависящіе отъ долготы восходящаго угла лунной орбиты на эклиптикѣ.

Брадлей, открывъ явленіе нутаціи посредствомъ наблюденій, объяснилъ его колебаніемъ земной оси, имѣющимъ періодъ около 18 съ половиною лѣтъ. Чтобы понять происхожденіе гипотезы сдѣланной Брадлеемъ касательно движенія полюса экватора, предположимъ, что кругъ νEQ (фиг. 42) представляетъ собою пересѣченіе сферы небесной плоскостію экватора. Пусть въ P' будетъ полюсъ эклиптики и кругъ $\nu E'Q$ пусть представляетъ эклиптику, именно ту ея часть, которая расположена надъ плоскостію экватора и въ ν пусть будетъ находиться точка весенняго равноденствія. Когда въ 1727 году Брадлей предпринялъ свои изслѣдованія, узелъ лунной орбиты или точка пересѣченія этой послѣдней съ эклиптикой совпадала съ точкой весенняго равноденствія, т. е. съ точкой, которая на нашемъ чертежѣ означена чрезъ ν, и въ это время склоненія звѣздъ расположенныхъ между P и E' полученныя изъ наблюденій были болѣе вычисленныхъ, принимая во вниманіе аберрацію и прецессію, почти на $9''$, склоненія же звѣздъ расположенныхъ между A и P были менѣе среднихъ на туже величину. Изъ этого слѣдуетъ заключить, что наклоненіе эклиптики къ экватору въ разсматриваемое время было болѣе средняго также приблизительно на $9''$. Послѣ этого Брадлей замѣтилъ, что по мѣрѣ движенія луннаго узла отъ точки ν къ точкѣ E' по эклиптикѣ склоненія звѣздъ лежащихъ между P и E' постепенно уменьшались, и въ то время какъ узелъ лунной орбиты достигъ точки E', первоначальное приращеніе склоненій звѣздъ расположенныхъ между P и E' совершенно уничтожилось, но въ то же время склоненія звѣздъ расположенныхъ между P и Q увеличилось на $9''$ противъ той величины, которую имѣли эти склоненія, когда узелъ лунной орбиты находился въ ν. Въ 1736 году узелъ лунной орбиты совпадалъ приблизительно съ точкой осенняго равноденствія, т. е. съ точкой Q и въ это время склоненія звѣздъ лежащихъ между P и E' уменьшились на $9''$ сравнительно съ той величиной, которую они имѣли, когда узелъ лунной орбиты находился въ точкѣ E'. Что касается до склоненій звѣздъ расположенныхъ между P и A, то при положеніи узла въ Q они увеличились противъ среднихъ также приблизительно на $9''$. По мѣрѣ того какъ

въ теченіи слѣдующихъ девяти лѣтъ узелъ лунной орбиты перемѣщался изъ Q черезъ A въ ν указанныя перемѣны въ склоненіяхъ звѣздъ, а слѣдовательно и въ наклоненіи эклиптики къ экватору происходили въ обратномъ порядкѣ. Разсматривая эти измѣненія склоненій, Брадлей для объясненія ихъ допустилъ: 1) что полюсъ экватора въ періодъ времени, обнимающій собою около 18 лѣтъ описываетъ кругъ $pp'qq'$ около своего средняго положенія P, 2) что діаметръ этого круга равенъ приблизительно $18''$, 3) что время обращенія истиннаго полюса по кругу около его средняго положенія равно времени обращенія узла лунной орбиты по эклиптикѣ, и наконецъ 4) что движеніе полюса происходитъ такимъ образомъ, что полюсъ на описываемомъ имъ кругѣ всегда находится на 90° впереди противъ положенія узла лунной орбиты на эклиптикѣ. Такимъ образомъ, если въ 1727 году узелъ лунной орбиты былъ въ ν, а полюсъ экватора въ точкѣ q' и уголъ $\nu Pq' = 90^\circ$, то этотъ уголъ съ вершиною при среднемъ полюсѣ P, между направленіями къ узлу лунной орбиты и къ истинному полюсу экватора всегда сохраняетъ величину 90°.

Принимая эти заключенія Брадлея, посмотримъ, въ какой зависимости отъ положенія узла лунной орбиты на эклиптикѣ должно находиться измѣненіе наклоненія экватора къ эклиптикѣ и зависящее отъ него измѣненіе положенія равноденственныхъ точекъ на эклиптикѣ. Другими словами, основываясь на гипотезѣ Брадлея, найдемъ зависимость между нутаціей наклонности и долготой узла лунной орбиты, а также между нутаціей равноденствій и той же долготой узла лунной орбиты на эклиптикѣ.

Предположимъ, что въ началѣ разсматриваемаго періода времени узелъ лунной орбиты совпадаетъ съ точкой весенняго равноденствія и что по истеченіи времени t онъ перемѣщается по эклиптикѣ въ точку K (фиг. 42); тогда дуга $K\nu$ представитъ собою долготу узла лунной орбиты въ концѣ времени t. Назовемъ эту долготу чрезъ l. Такъ какъ положеніе узла въ точкѣ ν соотвѣтствуетъ положенію истиннаго полюса экватора въ точкѣ q', то чтобы найти положеніе полюса для конца времени t, достаточно при среднемъ положеніи полюса P построить на линіи Pq' уголъ $q'Pp$ равный долготѣ l узла лунной орбиты и тогда точка пересѣченія другой стороны этого угла съ кругомъ $pp'qq'$, т. е. точка p будетъ мѣстомъ полюса соотвѣтствующимъ положенію узла въ точкѣ K. Когда полюсъ приметъ положеніе p, экваторъ будетъ имѣть положеніе $NGQ'H$. Слѣдовательно точка весенняго равноденствія перемѣстится изъ точки ν въ положеніе ν'. Среднее наклоненіе эклиптики къ экватору представляется на нашемъ чертежѣ угломъ $A\nu E'' = \omega$, а истинное, соотвѣтствующее времени t, есть $\nu\nu' H = \omega'$. Разность $\omega' - \omega$ называется, какъ мы знаемъ, нутаціею наклонности. Дуга $\nu'\nu$ представляетъ собою нутацію равноденствій. Среднее наклоненіе эклиптики къ экватору измѣряется дугою PP' большаго круга проведеннаго черезъ полюсы эклиптики и средняго экватора. Истинное наклоненіе эклиптики къ экватору, соотвѣтствующее концу времени t, измѣряется дугою $P'p$ большаго круга проведеннаго черезъ полюсы эклиптики P' и истиннаго экватора p. Сферическій треугольникъ $PP'p$, имѣетъ стороны: $PP' = \omega$, $P'p = \omega'$, $pP = a$, гдѣ чрезъ a означаемъ выраженный въ дугѣ радіусъ круга описываемаго полюсомъ экватора около его средняго положенія. По наблюдаемымъ измѣненіямъ склоненій слѣдуетъ заключить, что a приблизительно равняется девяти секундамъ дуги. Уголъ $P'Pp$ въ разсматриваемомъ треугольникѣ противуположный сторонѣ pP' равенъ $180^\circ - l$, если

подъ l разумѣемъ долготу узла лунной орбиты на эклиптикѣ, соотвѣтствующую времени t. Изъ разсматриваемаго треугольника имѣемъ

$$\cos\omega' = \cos\omega\cos a - \sin\omega\sin a\cos l$$

но a есть столь малая величина, что совершенно удовлетворительно положить $\cos a = 1$ и $\sin a = a \,.\, \sin 1''$, тогда

$$\cos\omega' - \cos\omega = - a \,.\, \sin\omega\cos l\sin 1''$$

откуда

$$2 \,.\, \sin\frac{\omega - \omega'}{2}\sin\frac{\omega + \omega'}{2} = - a \,.\, \sin\omega\cos l\sin 1''$$

Это уравненіе показываетъ, что искомая разность $\omega' - \omega$ есть величина порядка a, а потому можно принять

$$\sin\frac{\omega - \omega'}{2} = \frac{\omega - \omega'}{2}\sin 1''; \qquad \sin\frac{\omega + \omega'}{2} = \sin\omega$$

тогда предыдущее дастъ

$$\omega' - \omega = a \,.\, \cos l$$

Въ такой формѣ представляется величина нутаціи наклонности, зависящая отъ дѣйствія луны на земной сфероидъ.

Чтобы получить подобное же выраженіе для нутаціи равноденствій, обратимся къ треугольнику $N\nu'\nu$. Если по нашему означенію $E''\nu A = \omega$, то

$$\nu\nu' N = 180^\circ - \omega' = 180^\circ - (\omega + d\omega), \qquad \nu N\nu' = a$$

ибо уголъ $\nu N\nu'$ измѣряется дугою большаго круга, проведенною черезъ точки P и p, заключающеюся между среднимъ экваторомъ и истиннымъ, соотвѣтствующимъ времени t, или, что все равно, дугою Pp. Наконецъ уголъ νPN по нашему построенію равенъ l, слѣдовательно сторона $\nu N = l$. Изъ этого треугольника имѣемъ

$$\sin\nu\nu' . \sin(\omega + d\omega) = \sin a\sin l$$

Отсюда опять видимъ, что искомая величина $\nu\nu'$ есть величина порядка a, а потому

$$\nu\nu' . \sin(\omega + d\omega) = a \,.\, \sin l$$

или, ограничиваясь здѣсь величинами перваго порядка, имѣемъ

$$\nu\nu' . \sin\omega = a \,.\, \sin l$$

откуда искомая нутація равноденствій представляется въ видѣ

$$\nu\nu' = \frac{a}{\sin\omega} \cdot \sin l$$

а потому если назовемъ чрезъ $\Delta\lambda$ величину нутаціи въ долготѣ какой либо звѣзды, то будемъ имѣть

$$\Delta\lambda = -\frac{a}{\sin\omega} \cdot \sin l$$

Еще Брадлей замѣтилъ, что гипотезой движенія полюса экватора по кругу около средняго положенія не вполнѣ представляются наблюдаемыя измѣненія склоненій, за-

висящія отъ нутаціи, и потому онъ самъ еще замѣнилъ гипотезу движенія по кругу гипотезой движенія по эллипсису, полуоси котораго должны быть опредѣлены или изъ наблюденій или на основаніи механическихъ соображеній. Онъ допустилъ, что большая ось эллипсиса равна діаметру прежде принятаго круга. Посмотримъ какія выраженія получатъ въ этой гипотезѣ нутація наклонности и нутація равноденствій. Пусть, какъ прежде, въ P (фиг. 43) будетъ полюсъ средняго экватора и въ P' полюсъ эклиптики. Пусть $pp'p''$ будетъ опять кругъ, по которому въ первоначальной гипотезѣ движется полюсъ истиннаго экватора и пусть $qq'q''$ будетъ эллипсисъ, по которому движется полюсъ экватора при гипотезѣ вновь принятой. Чтобы опредѣлить мѣсто истиннаго полюса для всякаго времени при этой второй гипотезѣ, опишемъ около полюса P средняго экватора какъ центра эллипсисъ по опредѣленнымъ извѣстнымъ образомъ полуосямъ a и b. Около той же точки P опишемъ кромѣ того кругъ радіусомъ большой полуоси эллипсиса и на линіи $P'E'$ при точкѣ P построимъ уголъ $p''Pp$ равный долготѣ узла лунной орбиты для времени t. Сторона Pp этого угла, пересѣкаясь съ описаннымъ кругомъ, опредѣлитъ точку p, затѣмъ опустимъ изъ этой точки p перпендикуляръ pm на большой кругъ, соединяющій полюсы эклиптики и средняго экватора; тогда точка пересѣченія q этого перпендикуляра съ эллипсисомъ укажетъ мѣсто полюса истиннаго экватора для времени t. Чтобы опредѣлить положеніе истинной равноденственной точки, проведемъ экваторъ $H'N'$ соотвѣтствующій положенію полюса въ q, и точка ν'' пересѣченія этого положенія экватора съ эклиптикой будетъ истинной равноденственной точкой для времени t. Если уголъ qPm назовемъ чрезъ l', то уголъ $\nu PN'$ также будетъ измѣряться дугою $\nu N' = l'$. Означимъ дугу большаго круга Pq, соединяющую положенія истиннаго и средняго экватора, чрезъ a', тогда уголъ $\nu N'H'$ также будетъ измѣряться дугою a'. Назовемъ наклоненіе истиннаго экватора, опредѣляемаго положеніемъ полюса q, къ эклиптикѣ чрезъ ω'', тогда въ треугольникѣ $qP'P$ сторона $P'q = \omega''$ и кромѣ того $\nu\nu''H' = \omega''$. Изъ треугольника $P'qP$, подобно предыдущему, имѣемъ

$$\cos \omega'' = \cos \omega \cos a' - \sin a' \sin \omega \cos l'$$

откуда

$$\omega'' - \omega = a' . \cos l'$$

Точно также изъ треугольника $\nu\nu''N'$ имѣемъ

$$\nu\nu'' = \frac{a'}{\sin \omega} \cdot \sin l'$$

Но легко обѣ эти величины, т. е. $\omega'' - \omega$ и $\nu\nu''$ привести въ зависимость отъ полуосей нутаціоннаго эллипсиса и долготы луннаго узла на эклиптикѣ. Треугольники pPm и Pqm мы можемъ, по малости ихъ, разсматривать какъ прямолинейные и принять

$$Pm = qP . \cos l'; \qquad Pm = pP . \cos l$$

но такъ какъ $qP = a'$ и $pP = a$, то

$$a' . \cos l' = a . \cos l$$

слѣдовательно

(423) $$\omega'' - \omega = a . \cos l$$

Отсюда заключаемъ, что величина нутаціи наклонности, обусловливающаяся дѣйствіемъ луны, одинакова для той и другой гипотезы.

Изъ треугольника qPm имѣемъ

$$qm = Pq.\sin l' = a'.\sin l' \tag{424}$$

Но по свойству эллипсиса

$$\frac{qm}{pm} = \frac{b}{a}$$

откуда

$$qm = \frac{b}{a} \cdot pm$$

Изъ треугольника же mpP имѣемъ

$$pm = a.\sin l$$

слѣдовательно

$$qm = b.\sin l$$

Сравнивая это съ выраженіемъ (424), заключаемъ, что

$$a'.\sin l' = b.\sin l$$

И такъ нутація равноденствій при второй гипотезѣ выразится чрезъ

$$\nu\nu'' = \frac{b}{\sin\omega} \cdot \sin l$$

Слѣдовательно величина нутаціи въ долготѣ будетъ

$$\Delta\lambda = -\frac{b}{\sin\omega} \cdot \sin l \tag{425}$$

Полная теорія нутаціи можетъ быть развита только на основаніи сложныхъ механическихъ соображеній; изложеніе ея мы предполагаемъ представить въ третей части нашего трактата, а теперь должны ограничиться этими не многими замѣчаніями, которыя все таки даютъ нѣкоторое понятіе о главной части величины нутацій зависящей отъ дѣйствія луны на земной сфероидъ. Если бы земля двигалась въ плоскости постоянно сохраняющей свое положеніе въ пространствѣ, то солнце, находясь въ этой плоскости, не производило бы нутаціонныхъ движеній земной оси; но такъ какъ положеніе эклиптики непрерывно измѣняется, при этомъ узлы одной эклиптики движутся по другой, то и дѣйствіе солнца на земной сфероидъ измѣняется и отъ измѣняющагося притяженія солнца на экваторіальныя части земнаго сфероида также происходитъ нутація въ положеніи земной оси. Члены нутаціи зависящіе отъ дѣйствіе солнца малы въ сравненіи съ членами происходящими отъ дѣйствія луны, но и ими нельзя пренебрегать, разсматривая вліяніе нутаціи на координаты свѣтилъ.

Если означимъ, какъ прежде, долготу восходящаго узла лунной орбиты на эклиптикѣ чрезъ l, долготу луны чрезъ L', долготу солнца чрезъ L, долготу перигелія солнца чрезъ π и долготу перигелія лунной орбиты чрезъ π', то, какъ показываетъ теорія прецессіи и нутаціи, нутація наклонности $\Delta\omega$ и нутація въ долготѣ $\Delta\lambda$ должны быть представлены въ формѣ:

$$\Delta\omega = \quad 9'',2231 \cos l - 0'',0897 \cos 2l + 0'',0886 \cos 2L'$$
$$+ \; 0'',5510 \cos 2L + 0'',0093 \cos (L + \pi)$$

(426)
$$\Delta\lambda = -17'',2405 \sin l + 0'',2073 \sin 2l - 0'',2041 \sin 2L'$$
$$+ \; 0'',0677 \sin (L' - \pi') - 1'',2694 \sin 2L$$
$$+ \; 0'',1279 \sin (L - \pi) - 0'',0213 \sin (L + \pi)$$

Числовые коэффиціенты этихъ выраженій опредѣлены Петерсомъ и даны въ его знаменитомъ сочиненіи Numerus constans nutationis. Приведенныя здѣсь значенія коэффиціентовъ вычислены для начала 1800 года; со временемъ они подвергаются малымъ измѣненіямъ. Такъ, по опредѣленію Петерса, для начала 1900 года эти выраженія нутаціи наклонности и нутаціи долготы суть

$$\Delta\omega = \quad 9'',2240 \cos l - 0'',0896 \cos 2l + 0'',0885 \cos 2L'$$
$$+ \; 0'',5507 \cos 2L + 0'',0092 \cos (L + \pi)$$

(426_1)
$$\Delta\lambda = -17'',2577 \sin l + 0'',2073 \sin 2l - 0'',2041 \sin 2L'$$
$$+ \; 0'',0677 \sin (L' - \pi') - 1'',2695 \sin 2L$$
$$+ \; 0'',1275 \sin (L - \pi) - 0'',0213 \sin (L + \pi)$$

Въ недавнее время астрономъ пулковской обсерваторіи Магнусъ Нюренъ (M. Nyren) по наблюденіямъ В. Струве, произведеннымъ въ первомъ вертикалѣ, снова вычислилъ коэффиціенты нутаціи и результаты своей работы напечаталъ въ мемуарѣ „Bestimmung der Nutation der Erdachse". Числа найденныя Нюреномъ, хотя незначительно, но разнятся отъ предыдущихъ.

Въ большинствѣ случаевъ члены зависящіе отъ аргументовъ $L + \pi$, $L' - \pi'$ и $L - \pi$ по своей малости могутъ быть пренебрегаемы. Коэффиціентъ при $\cos l$ въ выраженіи $\Delta\omega$ называется постоянной величиной нутаціи; такимъ образомъ за эту постоянную принимается большая полуось нутаціоннаго эллипсиса.

63. Отъ нутаціи измѣняетъ свое положеніе экваторъ; на положеніе эклиптики нутація не вліяетъ, а потому отъ нутаціи измѣняются склоненія и прямыя восхожденія свѣтилъ, а также—ихъ долготы. Что касается до широтъ, то онѣ совсѣмъ не подвержены измѣненіямъ зависящимъ отъ нутаціи. Измѣненіе долготы отъ нутаціи представляется величиною $\Delta\lambda$, выраженіе которой выше приведено. Остается показать какимъ образомъ можетъ быть опредѣлено вліяніе нутаціи на склоненія и прямыя восхожденія свѣтилъ, т. е. остается показать какимъ образомъ по извѣстнымъ среднимъ склоненію и прямому восхожденію свѣтила могутъ быть найдены истинныя координаты соотвѣтствующія тому же времени. Рѣшеніе этой задачи не представляетъ ни какой трудности. Предположимъ, что даны для извѣстнаго момента среднія прямое восхожденіе α и склоненіе свѣтила δ и требуется для того же момента найти истинныя склоненіе и прямое восхожденіе свѣтила α' и δ'. Назовемъ широту и долготу свѣтила, соотвѣтствующія координатамъ α и δ, чрезъ β и λ. Тогда, на основаніи уравненій (15) и (16), имѣемъ

(427)
$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\cos (N - \omega)}{\cos N} \operatorname{tang} \lambda$$
$$\operatorname{tang} \delta = \operatorname{tang} (N - \omega) \sin \alpha$$

гдѣ

$$\text{tang}\, N = \frac{\text{tang}\, \beta}{\sin \lambda}$$

и подъ λ и ω разумѣемъ среднюю долготу свѣтила и среднее наклоненіе эклиптики къ экватору для даннаго времени. Истинная долгота и истинное наклоненіе будутъ $\lambda + \Delta\lambda$ и $\omega + \Delta\omega$, гдѣ подъ $\Delta\lambda$ и $\Delta\omega$ разумѣемъ нутацію въ долготѣ и нутацію въ наклонности. Если внесемъ въ предыдущія выраженія $\omega + \Delta\omega$ и $\lambda + \Delta\lambda$ вмѣсто ω и λ, то понятно, что эти уравненія могутъ служить для вычисленія истиннаго прямаго восхожденія α' и истиннаго склоненія δ' соотвѣтствующихъ данному времени. И такъ искомыя величины α' и δ' найдутся изъ уравненій

$$\text{tang}\, \alpha' = \frac{\cos (N' - \omega - \Delta\omega)}{\cos N'} \text{tang}\, (\lambda + \Delta\lambda) \tag{428}$$

$$\text{tang}\, \delta' = \text{tang}\, (N' - \omega - \Delta\omega) \sin \alpha'$$

гдѣ N' должно быть вычислено изъ уравненія

$$\text{tang}\, N' = \frac{\text{tang}\, \beta}{\sin (\lambda + \Delta\lambda)}$$

Слѣдовательно для рѣшенія нашего вопроса мы можемъ поступить такимъ образомъ. Прежде всего, принимая во вниманіе среднее наклоненіе эклиптики къ экватору, обратимъ данныя α и δ въ λ и β. Затѣмъ, пользуясь приведенными выраженіями (426) нутаціи въ долготѣ и нутаціи наклонности, вычислимъ суммы $\lambda + \Delta\lambda$ и $\omega + \Delta\omega$, при помощи которыхъ изъ уравненій (428) найдемъ наконецъ искомыя α' и δ'

Малость величинъ $\Delta\lambda$ и $\Delta\omega$ позволяетъ въ практикѣ пользоваться другимъ, болѣе простымъ рѣшеніемъ вопроса. По виду уравненій (427) и (428) заключаемъ, что если

$$\alpha = f(\lambda, \omega) \qquad\qquad \delta = \varphi(\lambda, \omega)$$

то

$$\alpha' = f(\lambda + \Delta\lambda, \omega + \Delta\omega)\,; \qquad \delta' = \varphi(\lambda + \Delta\lambda, \omega + \Delta\omega)$$

Что касается до β, то эту координату при рѣшеніи вопроса о вліяніи нутаціи на склоненія и прямыя восхожденія свѣтилъ мы разсматриваемъ какъ величину постоянную.

И такъ, по теоремѣ Тейлора, ограничиваясь малыми величинами втораго порядка, имѣемъ

$$\alpha' - \alpha = f(\lambda + \Delta\lambda, \omega + \Delta\omega) - f(\lambda, \omega)$$

$$= \left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right) \Delta\lambda + \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right) \Delta\omega + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}\right) \Delta\lambda^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) \Delta\omega^2 + \left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda . d\omega}\right) \Delta\lambda . \Delta\omega$$

$$\delta' - \delta = \varphi(\lambda + \Delta\lambda, \omega + \Delta\omega) - \varphi(\lambda, \omega)$$

$$= \left(\frac{d\delta}{d\lambda}\right) \Delta\lambda + \left(\frac{d\delta}{d\omega}\right) \Delta\omega + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\delta}{d\lambda^2}\right) \Delta\lambda^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\delta}{d\omega^2}\right) \Delta\omega^2 + \left(\frac{d^2\delta}{d\lambda . d\omega}\right) \Delta\lambda . \Delta\omega$$

Этими выраженіями мы можемъ пользоваться для вычисленія разностей истинныхъ и среднихъ координатъ, если только вычислимъ входящія сюда производныя функціи.

Чтобы составить выраженія этихъ производныхъ, обратимся къ сферическому треугольнику заключающемуся между полюсами эклиптики, средняго экватора и разсматриваемымъ свѣтиломъ. Изъ этого треугольника, какъ извѣстно, имѣемъ соотношенія:

$$
(429)\qquad
\begin{aligned}
\cos\delta\cos\alpha &= \cos\beta\cos\lambda \\
\cos\delta\sin\alpha &= -\sin\beta\sin\omega + \cos\beta\sin\lambda\cos\omega \\
\sin\delta &= \sin\beta\cos\omega + \cos\beta\sin\lambda\sin\omega \\
\cos\beta\sin\lambda &= \sin\delta\sin\omega + \cos\delta\sin\alpha\cos\omega \\
\sin\beta &= \sin\delta\cos\omega - \cos\delta\sin\alpha\sin\omega
\end{aligned}
$$

Взявъ въ первыхъ двухъ уравненіяхъ частныя производныя по λ, получимъ

$$
(430)\qquad
\begin{aligned}
\cos\delta\sin\alpha\left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right) + \cos\alpha\sin\delta\left(\frac{d\delta}{d\lambda}\right) &= \cos\beta\sin\lambda \\
\cos\delta\cos\alpha\left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right) - \sin\alpha\sin\delta\left(\frac{d\delta}{d\lambda}\right) &= \cos\beta\cos\lambda\cos\omega
\end{aligned}
$$

Умноживъ первое изъ этихъ уравненій на $\sin\alpha$, второе на $\cos\alpha$ и сложивъ, находимъ

$$\cos\delta\left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right) = \cos\beta\sin\lambda\sin\alpha + \cos\beta\cos\lambda\cos\alpha\cos\omega$$

исключая отсюда произведеніе $\cos\beta\sin\lambda$ и $\cos\beta\cos\lambda$ посредствомъ перваго и четвертаго изъ уравненій (429), получимъ послѣ немногихъ сокращеній

$$(431)\qquad \frac{d\alpha}{d\lambda} = \cos\omega + \operatorname{tang}\delta\sin\alpha\sin\omega$$

Умноживъ первое изъ уравненій (430) на $\cos\alpha$, второе на $\sin\alpha$ и вычтя второе произведеніе изъ перваго, имѣемъ

$$\sin\delta\left(\frac{d\delta}{d\lambda}\right) = \cos\beta\sin\lambda\cos\alpha - \cos\beta\cos\lambda\sin\alpha$$

исключимъ отсюда произведенія $\cos\beta\sin\lambda$ и $\cos\beta\cos\lambda$ и тогда найдемъ

$$(432)\qquad \left(\frac{d\delta}{d\lambda}\right) = \sin\omega\cos\alpha$$

Возьмемъ теперь отъ втораго и третьяго изъ уравненій (429) частныя производныя по ω и тогда получимъ

$$
(433)\qquad
\begin{aligned}
\cos\delta\cos\alpha\left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right) - \sin\delta\sin\alpha\left(\frac{d\delta}{d\omega}\right) &= -\cos\beta\sin\lambda\sin\omega - \sin\beta\cos\omega \\
\cos\delta\left(\frac{d\delta}{d\omega}\right) &= \cos\beta\sin\lambda\cos\omega - \sin\beta\sin\omega
\end{aligned}
$$

Исключая изъ послѣдняго изъ этихъ уравненій произведеніе $\cos\beta\sin\lambda$ и $\sin\beta$ посредствомъ четвертаго и пятаго изъ уравненій (429), получимъ послѣ легкихъ сокращеній

$$(434)\qquad \left(\frac{d\delta}{d\omega}\right) = \sin\alpha$$

Внося величину этой производной въ первое изъ уравненій (433) и исключая вмѣстѣ съ тѣмъ произведеніе $\cos\beta$, $\sin\lambda$ и $\sin\beta$, легко найдемъ

$$(435) \qquad \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right) = -\cos\alpha \operatorname{tang}\delta$$

Для опредѣленія вторыхъ производныхъ будемъ дифференцировать выраженія (431), (432), (434) и (435) и вмѣсто первыхъ производныхъ въ полученные результаты внесомъ величины взятыя изъ упомянутыхъ сейчасъ уравненій. Такимъ образомъ получимъ

$$\left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}\right) = \sin\omega \operatorname{tang}\delta \cos\alpha \left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right) + \frac{\sin\omega \sin\alpha}{\cos^2\delta}\left(\frac{d\delta}{d\lambda}\right)$$

или

$$\left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}\right) = \sin^2\omega\left[\frac{\sin 2\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\omega \cos\alpha \operatorname{tang}\delta + \sin 2\alpha \operatorname{tang}^2\delta\right]$$

Точно такимъ же образомъ найдутся:

$$\left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda\,.\,d\omega}\right) = -\sin\omega\left[\cos^2\alpha - \operatorname{cotg}\omega \sin\alpha \operatorname{tang}\delta + \cos 2\alpha \cdot \operatorname{tang}^2\delta\right]$$

$$\left(\frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) = -\left[\frac{\sin 2\alpha}{2} + \sin 2\alpha \operatorname{tang}^2\delta\right]$$

$$\left(\frac{d^2\delta}{d\lambda^2}\right) = -\sin^2\omega \sin\alpha\left[\operatorname{cotg}\omega - \sin\alpha \operatorname{tang}\delta\right]$$

$$\left(\frac{d^2\delta}{d\lambda\,.\,d\omega}\right) = \sin\omega \cos\alpha\left[\operatorname{cotg}\omega + \sin\alpha \operatorname{tang}\delta\right]$$

$$\left(\frac{d^2\delta}{d\omega^2}\right) = -\cos^2\alpha \operatorname{tang}\delta$$

Найденныя теперь частныя производныя мы должны вставить въ ряды, которыми представляются разности $\alpha' - \alpha$ и $\delta' - \delta$. Если ограничимся членами перваго порядка относительно $\Delta\lambda$ и $\Delta\omega$, то отъ этого внесенія получимъ

$$\alpha' - \alpha = \cos\omega\,.\,\Delta\lambda + \sin\omega \operatorname{tang}\delta \sin\alpha\,.\,\Delta\lambda - \cos\alpha \operatorname{tang}\delta\,.\,\Delta\omega$$
$$\delta' - \delta = \sin\omega \cos\alpha\,.\,\Delta\lambda + \sin\alpha\,.\,\Delta\omega$$

Что касается до членовъ втораго порядка относительно $\Delta\lambda$ и $\Delta\omega$, то только тѣ изъ нихъ могутъ имѣть примѣтную величину, въ которые входятъ наибольшіе члены выраженій $\Delta\lambda$ и $\Delta\omega$, т. е. члены

$$-17'',2405\,.\,\sin l \quad \text{и} \quad 9'',2231\,.\,\cos l$$

Примемъ согласно съ прежнимъ означеніемъ

$$\Delta\omega = 9'',2231\,.\,\cos l = a\,.\,\cos l$$
$$-\sin\omega.\Delta\lambda = 6'',8650\,.\,\sin l = b\,.\,\sin l \;*)$$

*) Мы принимаемъ для начала 1800 года $\omega = 23^\circ\, 27'\, 54''$.

Тогда члены втораго порядка заключающіеся въ разности $\alpha' - \alpha$ будутъ:

$$\frac{b^2}{4}\sin 2\alpha \sin^2 l + \frac{b^2}{2}\operatorname{cotg}\omega \cos\alpha \operatorname{tang}\delta \sin^2 l + \frac{b^2}{2}\sin 2\alpha \operatorname{tang}^2\delta \sin^2 l$$

$$-\frac{a^2}{4}\sin 2\alpha \cos^2 l - \frac{a^2}{2}\sin 2\alpha \operatorname{tang}^2\delta \cos^2 l$$

$$-ab\,.\cos^2\alpha \cos l \sin l + ab\,.\operatorname{cotg}\omega \sin\alpha \operatorname{tang}\delta \sin l \cos l$$

$$-ab\,.\cos 2\alpha \operatorname{tang}^2\delta \cos l \sin l$$

Но такъ какъ

$$\sin^2 l = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2l}{2}; \qquad \cos^2 l = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2l}{2}; \qquad \sin l \cos l = \frac{\sin 2l}{2}$$

то предыдущая сумма приводится къ виду

$$\frac{b^2 - a^2}{4}\left[\frac{1}{2} + \operatorname{tang}^2\delta\right]\sin 2\alpha + \frac{b^2}{4}\operatorname{cotg}\omega \cos\alpha \operatorname{tang}\delta$$

$$+\frac{ab}{2}\left[\frac{1}{2} - \operatorname{cotg}\omega \sin\alpha \operatorname{tang}\delta + \cos 2\alpha \operatorname{tang}^2\delta + \frac{\cos 2\alpha}{2}\right]\sin 2l$$

$$-\left[\frac{b^2 + a^2}{4}\sin 2\alpha \operatorname{tang}^2\delta + \frac{b^2}{4}\operatorname{cotg}\omega \cos\alpha \operatorname{tang}\delta + \frac{b^2 + a^2}{8}\sin 2\alpha\right]\cos 2l$$

Совершенно подобнымъ же образомъ найдемъ, что сумма членовъ втораго порядка относительно $\Delta\omega$ и $\Delta\lambda$ въ разности $\delta' - \delta$ будетъ имѣть видъ:

$$-\left[\frac{a^2 + b^2}{8} + \frac{a^2 - b^2}{8}\cos 2\alpha\right]\operatorname{tang}\delta - \frac{b^2}{4}\operatorname{cotg}\omega \sin\alpha$$

$$-\frac{ab}{4}\left[\sin 2\alpha \operatorname{tang}\delta + 2\operatorname{cotg}\omega \cos\alpha\right]\sin 2l$$

$$-\left[\left\{\frac{a^2 - b^2}{8} + \frac{a^2 + b^2}{8}\cos 2\alpha\right\}\operatorname{tang}\delta - \frac{b^2}{4}\operatorname{cotg}\omega \sin\alpha\right]\cos 2l$$

Разсматривая эти двѣ суммы, мы видимъ, что онѣ состоятъ изъ двухъ рядовъ членовъ. Одни члены не зависятъ отъ періодическихъ функцій $\sin 2l$ или $\cos 2l$, другіе содержатъ эти функціи множителями. Первыя представляютъ собою вѣковыя измѣненія склоненій и прямыхъ восхожденій, вторыя—періодическія. Но вѣковыя, или точнѣе пропорціональныя времени измѣненія координатъ включены въ выраженіе прецессіи, а потому всѣ члены свободные отъ множителей $\sin 2l$ и $\cos 2l$ здѣсь должны быть отвергнуты. Вошли же они потому, что опредѣляя изложеннымъ способомъ вліяніе нутаціи на координаты свѣтилъ, мы дифференцировали α и δ по λ и ω и при этомъ получили вообще всѣ измѣненія обусловливающіяся измѣненіемъ наклонности эклиптики къ экватору и движеніемъ равноденственныхъ точекъ по эклиптикѣ, не отличая измѣненій пропорціональныхъ времени отъ измѣненій періодическихъ, нутаціонныхъ.

И такъ

$$\alpha' - \alpha = \left[\cos\omega + \sin\omega\sin\alpha\ \text{tang}\,\delta\right]\Delta\lambda - \cos\alpha\ \text{tang}\,\delta\,\Delta\omega$$

$$+ \frac{ab}{2}\left[\frac{1+\cos 2\alpha}{2} - \text{cotg}\,\omega\sin\alpha\ \text{tang}\,\delta + \cos 2\alpha\ \text{tang}^2\,\delta\right]\sin 2l \sin 1''$$

$$- \left[\frac{b^2+a^2}{4}\sin 2\alpha\ \text{tang}^2\,\delta + \frac{b^2}{4}\text{cotg}\,\omega\cos\alpha\ \text{tang}\,\delta\right.$$

$$\left. + \frac{b^2+a^2}{8}\sin 2\alpha\right]\cos 2l \sin 1'' \qquad (436)$$

$$\delta' - \delta = \sin\omega\cos\alpha.\Delta\lambda + \sin\alpha.\Delta\omega$$

$$- \frac{ab}{4}\left[\sin 2\alpha\ \text{tang}\,\delta + 2\,\text{cotg}\,\omega\cos\alpha\right]\sin 2l\sin 1''$$

$$- \left[\left\{\frac{a^2-b^2}{8} + \frac{a^2+b^2}{8}\cos 2\alpha\right\}\text{tang}\,\delta - \frac{b^2}{4}\text{cotg}\,\omega\sin\alpha\right]\cos 2l\sin 1''$$

Въ эти уравненія вмѣсто $\Delta\lambda$ и $\Delta\omega$ должны быть внесены ихъ величины взятыя изъ полныхъ выраженій (426). Замѣтимъ еще, что въ члены втораго порядка мы вводимъ множителя $\sin 1''$, основываясь на слѣдующихъ соображеніяхъ. Разсмотримъ какую либо изъ производныхъ, напр. производную (432). Очевидно, что она выражена въ линейной мѣрѣ и это справедливо въ какихъ бы единицахъ не выражались $d\lambda$ и $d\delta$, лишь бы оба они были представлены однообразно. Дифференцируя выраженіе (432) во второй разъ по λ, получимъ

$$\frac{d^2\delta}{d\lambda} = -\sin\alpha\sin\omega\frac{d\alpha}{d\lambda}\cdot d\lambda$$

но чтобы вторая часть опять осталась представленною въ линейной мѣрѣ, необходимо считать $d\lambda = (d\lambda)''\sin 1''$. И такъ

$$\frac{d^2\delta}{d\lambda^2} = -\sin\alpha\sin\omega\left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right)\sin 1''$$

то же самое слѣдуетъ сказать и про всѣ другія производныя.

Вычисляя посредствомъ выраженій (436) вліяніе нутаціи на склоненія и прямыя восхожденія звѣздъ, мы убѣдимся, что наибольшая часть работы будетъ относиться къ вычисленіе членовъ перваго порядка. Что касается до членовъ втораго порядка, то ихъ придется вводить въ вычисленіе только для звѣздъ близкихъ къ полюсу. Но трудъ вычисленія членовъ перваго порядка можетъ быть значительно сокращенъ употребленіемъ особыхъ таблицъ, составленныхъ для этой цѣли Гауссомъ. Такія таблицы вычислены на основаніи слѣдующихъ соображеній. Если вычислимъ по выраженіямъ (436) разности $\alpha' - \alpha$ и $\delta' - \delta$, принимая среднее наклоненіе эклиптики къ экватору соотвѣтствующее началу 1850 года, то получимъ

$$\alpha' - \alpha = - [15'',8235 + 6'',8666 \sin\alpha \operatorname{tang}\delta] \sin l \quad - 9'',2235 \cos\alpha \operatorname{tang}\delta \cos l$$
$$+ [\ 0'',1902 + 0'',0825 \sin\alpha \operatorname{tang}\delta] \sin 2l \ + 0'',0897 \cos\alpha \operatorname{tang}\delta \cos 2l$$
$$- [\ 0'',1872 + 0'',0813 \sin\alpha \operatorname{tang}\delta] \sin 2L' - 0'',0886 \cos\alpha \operatorname{tang}\delta \cos 2L'$$
$$+ [\ 0'',0621 + 0'',0270 \sin\alpha \operatorname{tang}\delta] \sin (L' - \pi')$$
$$- [\ 1'',1644 + 0'',5055 \sin\alpha \operatorname{tang}\delta] \sin 2L - 0'',5510 \cos\alpha \operatorname{tang}\delta \cos 2L$$
$$+ [\ 0'',1173 + 0'',0509 \sin\alpha \operatorname{tang}\delta] \sin (L - \pi)$$
$$- [\ 0'',0195 + 0'',0085 \sin\alpha \operatorname{tang}\delta] \sin (L + \pi)$$
$$- 0'',0093 \cos\alpha \operatorname{tang}\delta \cos (L + \pi)$$

(437)
$$\delta' - \delta = - 6'',8666 \cos\alpha \sin l \quad + 9'',2235 \sin\alpha \cos l$$
$$+ 0'',0825 \cos\alpha \sin 2l \ - 0'',0897 \sin\alpha \cos 2l$$
$$- 0'',0813 \cos\alpha \sin 2L' + 0'',0886 \sin\alpha \cos 2L'$$
$$+ 0'',0270 \cos\alpha \sin (L' - \pi')$$
$$- 0'',5055 \cos\alpha \sin 2L + 0'',5510 \sin\alpha \cos 2L$$
$$+ 0'',0509 \cos\alpha \sin (L - \pi)$$
$$- 0'',0085 \cos\alpha \sin (L + \pi) + 0'',0093 \sin\alpha \cos (L + \pi)$$

Если положимъ

(438)
$$- 15'',8235 \sin l = c$$
$$b \,.\sin (l + B) = 6'',8066 \sin l$$
$$b \,.\cos (l + B) = 9'',2235 \cos l$$

то первая строка въ выраженіи $\alpha' - \alpha$ приведется къ виду

(α)
$$c - b \,.\cos (l + B - \alpha) \operatorname{tang}\delta$$

а первая строка въ выраженіи $\delta' - \delta$ будетъ имѣть форму

(β)
$$- b \,.\sin (l + B - \alpha)$$

Гауссъ по уравненіямъ (438) составилъ таблицу, изъ которой по аргументу l могутъ быть взяты величины c, b и B. Какъ скоро эти послѣднія найдены, то вычисленіе главныхъ членовъ нутаціи, зависящей отъ дѣйствія луны, для данныхъ значеній α и δ весьма удобно выполняется по выраженіямъ (α) и (β). Послѣднія три строки въ выраженіяхъ разностей $\alpha' - \alpha$ и $\delta' - \delta$ представляютъ собою величину солнечной нутаціи.

Полагая

(439)
$$- 1'',1644 \sin 2L = g$$
$$f.\sin (2L + F) = 0'',5055 \sin 2L$$
$$f.\cos (2L + F) = 0'',5510 \cos 2L$$

приведемъ сумму бóльшихъ членовъ солнечной нутаціи по прямому восхожденію, т. е. пятую строку выраженія разности $\alpha' - \alpha$ къ виду

(γ)
$$g - f.\cos (2L + F - \alpha) \operatorname{tang}\delta$$

подобнымъ же образомъ пятая строка выраженія разности $\delta' - \delta$ приметъ форму

(δ)
$$- f.\sin (2L + F - \alpha)$$

По уравненіямъ (439) Гауссъ составилъ таблицу, въ которой по аргументу $2L$ даются числовыя величины g, f и F. Если эти послѣднія найдены, то вычисленіе болѣе значительныхъ членовъ солнечной нутаціи въ прямомъ восхожденіи и склоненіи для данныхъ α и δ удобно выполняется по выраженіямъ (γ) и (δ).

Для вычисленія малыхъ членовъ, зависящихъ отъ $2L'$, $2l$, $L+\pi$ таблицы не составлены; но при этомъ вычисленіи можно пользоваться таблицею солнечной нутаціи, принимая вмѣсто аргумента $2L$ послѣдовательно аргументы $2L'$, $180+2l$ *) и $L+\pi$. Вычисливъ посредствомъ величинъ взятыхъ изъ таблицъ солнечной нутаціи члены зависящіе отъ аргументовъ $2L'$, $2l$, $L+\pi$, мы должны будемъ умножить члены содержащіе $2L'$ и $2l$ на $\frac{6}{37}$, а члены зависящіе отъ $L+\pi$ на $\frac{1}{60}$, ибо эти дроби приблизительно выражаютъ собою отношеніе коеффиціентовъ упомянутыхъ членовъ къ коеффиціентамъ членовъ солнечной нутаціи. Наконецъ члены нутаціи, зависящіе отъ аргументовъ $L'-\pi'$ и $L-\pi$, по формѣ подобны выраженіямъ годичной прецессіи въ склоненіи и прямомъ восхожденіи, а потому можно получить члены нутаціи содержащіе $L'-\pi'$ и $L-\pi$, если помножимъ соотвѣтствующіе члены годичной прецессіи на $\frac{1}{472}\sin\left(L'-\pi'\right)$ и $\frac{1}{394}\sin\left(L-\pi\right)$.

Таблицы нутаціи, которыми мы пользуемся теперь вычислены мангеймскимъ астрономомъ Николаи и помѣщены въ Sammlung von Hülfstafeln von Schumacher, neu herausgegeben von Warnstorff. pg. 112—113.

---

*) Ибо члены зависящіе отъ аргумента $2l$ имѣютъ знаки обратные съ членами зависящими отъ аргумента $2L$.

VIII.

Среднія и видимыя мѣста звѣздъ. Звѣздные каталоги.

64. Мы рѣшили теперь всѣ вопросы входящіе въ область сферической астрономіи:—разсмотрѣли всѣ причины обусловливающія собою для наблюдателя на поверхности земли разность видимыхъ и истинныхъ положеній свѣтилъ. Покажемъ теперь простѣйшіе пріемы вычисленія видимыхъ положеній свѣтилъ по даннымъ координатамъ среднихъ положеній.

Въ ученіи о прецессіи мы видѣли какимъ образомъ можетъ быть найдено для всякаго времени среднее положеніе звѣзды по данному среднему положенію ея, соотвѣтствующему данному, опредѣленному моменту. Зная среднее положеніе звѣзды, легко перейти отъ него къ истинному положенію, для этого стоитъ только вычислить вліяніе нутаціи на координаты средняго мѣста. Наконецъ по истинному положенію свѣтила не трудно составить себѣ точное понятіе о видимомъ его положеніи, т. е. о той точкѣ неба, которую кажущимся образомъ занимаетъ звѣзда въ данное время на сферѣ небесной. Этого достигнемъ, если къ координатамъ истиннаго положенія свѣтила придадимъ съ надлежащимъ знакомъ величины аберраціи и параллакса. Впрочемъ годичный параллаксъ для всѣхъ звѣздъ имѣетъ столь малую величину, что его прямо можно принять равнымъ нулю.

Такимъ образомъ подъ именемъ *видимаго* положенія звѣзды разумѣется та точка сферы небесной, въ которой наблюдателю находящемуся на землѣ представится эта звѣзда независимо отъ преломленія лучей свѣта въ атмосферѣ. Слѣдовательно для полученія координатъ видимаго положенія звѣзды по координатамъ средняго, придется къ этимъ послѣднимъ придать измѣненія зависящія отъ нутаціи и аберраціи.

Выраженія, на основаніи которыхъ дѣлается переходъ отъ среднихъ къ видимымъ положеніямъ звѣздъ, имѣютъ слѣдующій видъ:

$$\alpha' = \alpha + \tau[m + n.\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta] + \tau\mu$$ прецессія и собственное движеніе.

$$\left.\begin{aligned}
&-[15'',8235 + 6'',8666\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta]\sin l\\
&+[\ 0'',1902 + 0'',0825\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta]\sin 2l\\
&-[\ 0'',1872 + 0'',0813\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta]\sin 2L'\\
&+[\ 0'',0621 + 0'',0270\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta]\sin(L' - \pi')\\
&-[\ 1'',1644 + 0'',5055\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta]\sin 2L\\
&+[\ 0'',1173 + 0'',0509\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta]\sin(L - \pi)\\
&-[\ 0'',0195 + 0'',0085\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta]\sin(L + \pi)\\
&-\ 9'',2231\cos\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta\cos l\\
&+\ 0'',0897\cos\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta\cos 2l\\
&-\ 0'',0886\cos\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta\cos 2L'\\
&-\ 0'',5510\cos\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta\cos 2L\\
&-\ 0'',0093\cos\alpha\,\mathrm{tang}\,\delta\cos(L + \pi)
\end{aligned}\right\}\ \text{нутація,}$$

$$\left.\begin{aligned}
&-20'',4451\cos\omega\cos L\cos\alpha\sec\delta\\
&-20'',4451\sin L\sin\alpha\sec\delta
\end{aligned}\right\}\ \text{аберрація.}$$

$$\delta' = \delta + \tau.n.\cos\alpha + \tau\mu'$$ прецессія и собственное движеніе.

$$\left.\begin{aligned}
&-6'',8666\cos\alpha\sin l + 9'',2235\sin\alpha\cos l\\
&+0'',0825\cos\alpha\sin 2l - 0'',0897\sin\alpha\cos 2l\\
&-0'',0813\cos\alpha\sin 2L' + 0'',0886\sin\alpha\cos 2L\\
&+0'',0270\cos\alpha\sin(L' - \pi')\\
&-0'',5055\cos\alpha\sin 2L + 0'',5510\sin\alpha\cos 2L\\
&+0'',0509\cos\alpha\sin(L - \pi)\\
&-0'',0085\cos\alpha\sin(L + \pi) + 0'',0093\sin\alpha\cos(L + \pi)
\end{aligned}\right\}\ \text{нутація.}$$

$$\left.\begin{aligned}
&-20'',4451\cos\omega\cos L[\mathrm{tang}\,\omega\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta]\\
&-20'',4451\sin L\cos\alpha\sin\delta
\end{aligned}\right\}\ \text{аберрація.}$$

Здѣсь мы удержали всѣ прежнія означенія: α и δ представляютъ среднее прямое восхожденіе и склоненіе звѣзды для начала года, τ промежутокъ времени, протекшій отъ начала года до разсматриваемаго момента выраженный въ доляхъ года, μ и μ' суть собственныя движенія по прямому восхожденію и склоненію и т. д.

Для упрощенія предыдущихъ выраженій Бессель полагаетъ

$$\begin{aligned}
6'',8666 &= ni & 15'',8235 &= mi + h\\
0'',0825 &= ni_1 & 0'',1902 &= mi_1 + h_1\\
0'',0813 &= ni_2 & 0'',1872 &= mi_2 + h_2\\
0'',0270 &= ni_3 & 0'',0621 &= mi_3 + h_3\\
0'',5055 &= ni_4 & 1'',1644 &= mi_4 + h_4\\
0'',0509 &= ni_5 & 0'',1173 &= mi_5 + h_5\\
0'',0085 &= ni_6 & 0'',0195 &= mi_6 + h_6
\end{aligned}$$

гдѣ m и n суть извѣстные коэффиціенты зависящіе отъ постоянной величины прецессіи. При такомъ означеніи предыдущія выраженія α' и δ' принимаютъ видъ:

$$\alpha' = \alpha + [\tau - i \sin l + i_1 \sin 2l - i_2 \sin 2L' + i_3 \sin (L' + \pi')$$
$$- i_4 \sin 2L + i_5 \sin (L - \pi) - i_6 \sin (L + \pi)][m + n \sin \alpha \operatorname{tang} \delta]$$
$$- [\, 9'', 2235 \cos l - 0'', 0897 \cos 2l + 0'', 0886 \cos 2L'$$
$$+ \; 0'', 5510 \cos 2L + 0'', 0093 \operatorname{coc} (L + \pi)] \cos \alpha \operatorname{tang} \delta$$
$$(440) \qquad - 20'', 4451 \cos \omega \cos L \cos \alpha \operatorname{soc} \delta$$
$$- 20'', 4451 \sin L \sin \alpha \sec \delta$$
$$+ \tau\mu$$
$$- h \sin l + h_1 \sin 2l - h_2 \sin 2L' + h_3 \sin (L' - \pi')$$
$$- h_4 \sin 2L + h_5 \sin (L - \pi) - h_6 \sin (L + \pi)$$

$$\delta' = \delta + [\tau - i \sin l + i_1 \sin 2l - i_2 \sin 2L' + i_3 \sin (L' - \pi')$$
$$- i_4 \sin 2L + i_5 \sin (L - \pi) - i_6 \sin (L + \pi)] \, n \cos \alpha$$
$$+ [\, 9'', 2235 \cos l - 0'', 0897 \cos 2l + 0'',0886 \cos 2L'$$
$$(441) \qquad + \; 0'', 5510 \cos 2L + 0'', 0093 \cos (L + \pi)] \sin \alpha$$
$$- 20'', 4451 \cos \omega \cos L [\operatorname{tang} \omega \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta]$$
$$- 20'' 4451 \sin L \cos \alpha \sin \delta$$
$$+ \tau\mu'$$

Положимъ, согласно съ означеніемъ принятымъ въ Nautical Almanac:

$$A = - 20'', 4451 \cos \omega \cos L$$
$$B = - 20'' 4451 \sin L$$
$$C = \tau - i \sin l + i_1 \sin 2l - i_2 \sin 2L' + i_3 \sin (L' - \pi')$$
$$(442) \qquad - i_4 \sin 2L + i_5 \sin (L - \pi) - i_6 \sin (L + \pi)$$
$$D = - \; 9'', 2240 \cos l + 0'', 0897 \cos 2l - 0'', 0886 \cos 2L'$$
$$- \; 0'', 5510 \cos 2L - 0'', 0093 \cos (L + \pi)$$
$$E = - h \sin l + h_1 \sin 2l - h_2 \sin 2L' + h_3 \sin (L' - \pi')$$
$$- h_4 \sin 2L + h_5 \sin (L - \pi) - h_6 \sin (L + \pi)$$

и кромѣ того

$$(443) \qquad \begin{array}{ll} a = \cos \alpha \sec \delta & a' = \operatorname{tang} \omega \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta \\ b = \sin \alpha \sec \delta & b' = \cos \alpha \sin \delta \\ c = m + n \sin \alpha \operatorname{tang} \delta & c' = n \cos \alpha \\ d = \cos \alpha \operatorname{tang} \delta & d' = - \sin \alpha \end{array}$$

тогда видимое положеніе звѣзды опредѣлится изъ выраженій

$$(444) \qquad \begin{array}{l} \alpha' = \alpha + Aa + Bb + Cc + Dd + E - \tau\mu \\ \delta' = \delta + Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + \tau\mu' \end{array}$$

Эти выраженія представляютъ то большое удобство при вычисленіи, что въ нихъ величины зависящія отъ положенія звѣзды совершенно отдѣлены отъ тѣхъ величинъ, которыя суть функціи времени и общи для всѣхъ звѣздъ. Величины a, b, c, d, a', b', c', d' зависятъ отъ положенія звѣзды и по большей части могутъ быть взяты изъ тѣхъ

каталоговъ, въ которыхъ дано среднее положеніе звѣзды для извѣстной эпохи. Величины A, B, C, D зависятъ главнымъ образомъ отъ l и L, и потому суть функціи времени; вычисленіе ихъ можетъ быть приведено въ зависимость отъ таблицъ расположенныхъ по аргументу времени. Числовыя значенія величинъ A, B, C, D даются между прочимъ въ Nautical Almanac для гринвичской полуночи каждаго дня года. Тамъ же даны величина τ подъ рубрикой fraction of the Year и средняя долгота восходящаго угла луны подъ рубрикой Mean Longitude of the moon's ascending Node. Имѣя эти величины, легко вычислить E; но эта послѣдняя, по своей малости, при вычисленіи видимаго положенія по среднему можетъ быть принята равною нулю.

Величины m и n, входящія въ коеффиціенты c и c', могутъ считаться равными:

$$\text{для 1800 г.} \dots\dots m = 46'',0623, \quad n = 20'',0607$$
$$\text{для 1900 г.} \dots\dots m = 46'',0908, \quad n = 20'',0521$$

принимая это, находимъ для 1850 г.

$$i = 0{,}34236, \qquad i_1 = 0{,}00411, \qquad i_2 = 0{,}00405$$
$$i_3 = 0{,}00135, \qquad i_4 = 0{,}02521, \qquad i_5 = 0{,}00254$$
$$i_6 = 0{,}00042, \qquad h = +0'',049$$

что касается до остальныхъ значеній h, то они совершенно ничтожны.

Члены выраженія C, содержащіе множителей i_5 и i_6, могутъ быть соединены въ одинъ. Въ самомъ дѣлѣ

$$i_5 \sin(L-\pi) - i_6 \sin(L+\pi) = i_5 \sin L \cos\pi - i_5 \cos L \sin\pi$$
$$- i_6 \sin L \cos\pi - i_6 \cos L \sin\pi$$

положимъ здѣсь

$$(i_5 - i_6)\cos\pi = j\cos J$$
$$-(i_5 + i_6)\sin\pi = j\sin J$$

тогда

$$i_5 \sin(L-\pi) - i_6 \sin(L+\pi) = j\sin(L+J)$$

$$\text{для начала 1800 года } \pi = 279^\circ\ 30'\ \ 8''$$
$$\text{для начала 1900 года } \pi = 281^\circ\ 12'\ 42'',$$

а потому

$$\text{для 1800 года} \dots\dots j = +0{,}00294; \qquad J = 83^\circ\ 10'$$
$$\text{для 1900 года} \dots\dots j = +0{,}00293; \qquad J = 81^\circ\ 55'$$

Слѣдовательно для конца XIX-го и начала XX-го столѣтія при вычисленіи коеффиціентовъ C, D, E можно пользоваться выраженіями

$$C = \tau - 0'',34252 \sin l - 0'',02520 \sin 2L$$
$$+ 0'',00293 \sin(L + 81^\circ 55') + 0'',00411 \sin 2l$$
$$- 0'',00405 \sin 2L' + 0'',00135 \sin(L' - \pi')$$
$$D = -9'',2235 \cos l - 0'',5510 \cos 2L - 0'',0093 \cos(L + 281^\circ 13')$$
$$+ 0'',0897 \cos 2l - 0'',0886 \cos 2L'$$
$$E = -0'',045 \sin l - 0'',003 \sin 2L$$

Изложенный способъ вычисленія видимаго положенія особенно удобенъ въ томъ случаѣ, когда имѣется въ виду опредѣлить большой рядъ видимыхъ положеній одной и той же звѣзды, тогда коеффиціенты a, b, c, d, a', b', c', d' сохраняютъ свою величину для всего ряда видимыхъ положеній, и для каждаго отдѣльнаго положенія придется только взять изъ Nautical Almanac величины $\log A$, $\log B$, $\log C$, $\log D$. Если же хотимъ сдѣлать приведеніе средняго положенія извѣстной звѣзды къ видимому только для одного или для очень немногихъ дней, тогда, совершенно избѣгая вычисленія коеффиціентовъ a, b, c и т. д., выгодно употребить слѣдующій пріемъ

Удержимъ означенія (442) и представимъ уравненія (440) и (441) въ видѣ

$$\alpha' = \alpha + C[m + n \sin\alpha \operatorname{tang}\delta] + D\cos\alpha \operatorname{tang}\delta$$
$$+ A\cos\alpha \sec\delta + B\sin\alpha \sec\delta + E + \tau\mu$$
$$\delta' = \delta + Cn\cos\alpha + D\sin\alpha + A[\operatorname{tang}\omega\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta]$$
$$+ B\cos\alpha\sin\delta + \tau\mu'$$

Полагая здѣсь

$$(445)\qquad \begin{array}{ll} mC + E = f; & A.\operatorname{tang}\omega = i \\ nC = g\cos G; & B = h\cos H \\ D = g\sin G; & A = h\sin H \end{array}$$

приведемъ предыдущія уравненія къ виду:

$$(446)\qquad \begin{array}{l} \alpha' = \alpha + f + \tau\mu + g\sin(G+\alpha)\operatorname{tang}\delta + h\sin(H+\alpha)\sec\delta \\ \delta' = \delta + i\cos\delta + \tau\mu' + g\cos(G+\alpha) + h\cos(H+\alpha) \end{array}$$

Величины f, $\log g$, G, $\log h$, H и $\log i$ для каждой гринвической полуночи, для каждаго дня года даны въ Nautical Almanac, а потому этими выраженіями весьма удобно пользоваться для вычисленія видимыхъ положеній звѣздъ.

Какъ выраженія (444), такъ равно и выраженія (446) не заключаютъ въ себѣ ни членовъ суточной аберраціи, ни членовъ годичнаго параллакса. Причина этого состоитъ въ слѣдующемъ. Выраженіе вліянія суточной аберраціи на склоненіе и прямое восхожденіе свѣтила зависитъ отъ широты мѣста наблюденія и потому нельзя составить общихъ таблицъ для вычисленія членовъ суточной аберраціи. Кромѣ того для времени кульминаціи свѣтила въ данномъ мѣстѣ на земной поверхности суточная аберрація склоненія равна нулю, а вліяніе суточной аберраціи на прямое восхожденіе кульминирующаго свѣтила, какъ увидимъ ниже въ теоріи астрономическихъ инструментовъ, имѣетъ форму совершенно подобную формѣ поправки наблюденій отъ коллимаціонной ошибки инструмента, поэтому поправку отъ суточной аберраціи и поправку отъ коллимаціонной погрѣшности весьма удобно будетъ соединить въ одинъ членъ.

Что касается до годичнаго параллакса то, заботясь о большой точности, можно ввести его въ вычисленіе. Но слѣдуетъ сознаться, что многіе изъ найденныхъ до сихъ поръ параллаксовъ неподвижныхъ звѣздъ нельзя разсматривать иначе, какъ результаты накопившихся ошибокъ инструментовъ, съ которыми производились наблюденія, если не ошибокъ самыхъ наблюденій. Во всякомъ случаѣ, если есть основаніе предполагать, что та или другая величина параллакса неподвижной звѣзды заслуживаетъ довѣрія и если при вычисленіи видимаго положенія хотимъ принять во вниманіе параллаксъ звѣзды, то при этомъ будемъ руководствоваться тѣми выраженіями, которыя

представляютъ вліяніе годичнаго параллакса на склоненіе и прямое восхожденіе свѣтила. Если примемъ $R = 1$, то выраженія, о которыхъ мы теперь говоримъ, будутъ имѣть видъ

$$\alpha' - \alpha = -\pi [\cos L \sin \alpha - \sin L \cos \omega \cos \alpha] \sec \delta$$
$$\delta' - \delta = -\pi [\cos \omega \sin \alpha \sin \delta - \sin \omega \cos \delta] \sin L - \pi \cos L \cos \alpha \sin \delta$$

Пусть

$$k \cos K = -\sin \alpha$$
$$k \sin K = -\cos \alpha \cos \omega$$
$$p \cos P = -\cos \alpha \sin \delta$$
$$p \sin P = \sin \alpha \sin \delta \cos \omega - \cos \delta \sin \omega$$

тогда

$$\alpha' - \alpha = \pi . k \cos (L + K) \sec \delta$$
$$\delta' - \delta = \pi . p \cos (L + P)$$

Для того чтобы ввести въ вычисленіе видимаго положенія вліяніе годичнаго параллакса, мы должны будемъ прибавить ко вторымъ частямъ уравненій (444) или (446) найденныя сейчасъ величины разностей.

Такимъ образомъ результатомъ рѣшенія главныхъ вопросовъ сферической астрономіи являются уравненія вида:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + A.a + B.b + C.c + D.d + E + \tau\mu + \pi k \cos (L + K) \sec \delta \\ \delta' &= \delta + A.a' + B.b' + C.c' + D.d' + \tau\mu' + \pi p \cos (L + P) \end{aligned} \qquad (447)$$

или уравненія:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + f + \tau\mu + g \sin (G + \alpha) \tang \delta + h \sin (H + \alpha) \sec \delta + \pi.k \cos (L + K) \sec \delta \\ \delta' &= \delta + i \cos \delta + \tau\mu' + g \cos (G + \alpha) + h \cos (H + \alpha) + \pi.p \cos (L + P) \end{aligned} \qquad (448)$$

Если хотимъ рѣшить обратный вопросъ, т. е. если хотимъ по видимому положенію звѣзды, соотвѣтствующему извѣстному времени, опредѣлить ея среднее мѣсто для начала разсматриваемаго года, то вычисливъ разности $\alpha' - \alpha$ и $\delta' - \delta$ по тѣмъ же уравненіямъ (447) или (448), придадимъ эти разности взятыя съ противуположными знаками къ даннымъ видимымъ координатамъ α' и δ'.

65. Въ заключеніе считаемъ не лишнимъ сказать нѣсколько словъ о тѣхъ звѣздныхъ росписяхъ или каталогахъ, которыми располагаютъ астрономы въ настоящее время.

Всѣ главнѣйшія работы касающіяся составленія звѣздныхъ каталоговъ предпринятыя до XVIII столѣтія изданы астрономомъ Бальи (Baily) подъ заглавіемъ Catalogues of Ptolemy, Ulugh-Beigh, Tycho-Brahe, Halley, Howelius deduced from the best Authorities. London 1843. Но наблюденія всѣхъ упомянутыхъ въ этомъ собраніи астрономовъ заключаютъ въ себѣ значительныя погрѣшности, и каталоги составленные на основаніи этихъ наблюденій едвали могутъ имѣть какое либо практическое значеніе въ настоящее время.

Первыя болѣе точныя опредѣленія положеній звѣздъ (съ точностію приблизительно 10'') сдѣланы первымъ директоромъ гриничской обсерваторіи Флемстидомъ

(Flamsteed). Результаты своихъ работъ Флемстидъ изложилъ въ сочиненіи Historia Britanica coelestis, гдѣ онъ даетъ склоненія и прямыя восхожденія, широты и долготы 3000 различныхъ звѣздъ. Нѣкоторыя изъ наблюденій Флемстида позже были редуцированы еще разъ Брюсторомъ (Brewster) и Бальи. Эти работы изданы подъ заглавіями „The Britisch Catalogue inserted in my Account of the Rev. Iolm Flamtdeed" и „Catalogue of the positions (in 1690) of 564 stars observed by Flamsteed". За главнаго наблюдателя всего 18-го столѣтія слѣдуетъ считать Джемса Брадлея. Наблюденія этого астронома были обработаны нѣсколько разъ. Первоначально этимъ занимался Ф. В. Бессель; результаты редукцій сдѣланныхъ имъ помѣщены въ сочиненіи Fundamenta astronomiae pro anno *MDCCLV* deducta ex observationibus viri incomparabilis James Bradley in specula astr. Grenovicensi per 1750—1762 institutis. Auctore F. W. Bessel, 1818. Въ недавнее время разработкой наблюденій Брадлея занимались Леверье, Петерсъ и Ауверсъ.

Къ XVIII вѣку относятся также наблюденія Лакайля, Табіаса Мейера и Маскелейна. Обработка большаго числа наблюденій Маскелейна (около 90000 отдѣльныхъ опредѣленій) была предпринята Олуфсеномъ, но къ сожалѣнію наблюденія Маскелейна не представляютъ такой точности какъ наблюденія Брадлея, а потому едвали могутъ быть полезны въ настоящее время. Небольшой зодіакальный каталогъ Мейера, изданный подъ заглавіемъ „*Mayer*. Catalogue of 998 stars reduced to 1756" *), имѣетъ значительныя преимущества передъ работой Маскелейна.

Что касается до Лакайля, то его наблюденія произведенныя въ Парижѣ заслуживаютъ большаго вниманія. На основаніи этихъ наблюденій составленъ не большой каталогъ изданный подъ заглавіемъ „*Lacaile*. Catalogue of 398 principal stars for the year 1750 **). Замѣчательна также работа Лакайля предпринятая на мысѣ Доброй Надежды; результатомъ ея является опредѣленіе 9766 южныхъ звѣздъ. Эти наблюденія Лакайля обработаны Бальи и изданы въ видѣ каталога подъ заглавіемъ „A New catalogue of 9766 southern stars reduced to 1750".

Говоря о работахъ французскихъ астрономовъ XVIII вѣка слѣдуетъ упомянуть о большой работѣ Лаланда (*Lalande*. Histeire céleste). Производя съ своими помощниками наблюденія на обсерваторіи Ecole militaire, Лаландъ опредѣлилъ положенія 52000 звѣздъ. Большая часть наблюденій Лаланда окончательно обработана британской ассоціацей и издана въ формѣ большаго каталога 47398 звѣздъ подъ заглавіемъ: Catalogue of stars deduced from the observations recorded in the Histoire celeste Francaise reduced to 1800. Хотя опредѣленія Лаланда по точности много уступаютъ новѣйшимъ наблюденіямъ, но все таки каталогъ Лаланда можетъ быть еще и теперь съ пользою употребляемъ, особенно если принять во вниманіе изслѣдованія В. Струве, по которымъ выходитъ, что къ прямымъ восхожденіямъ звѣздъ каталога Лаланда должна быть придана поправка

$$+1''.53+1''.92 \tan\delta$$

и что поправка склоненій равна

$$+4''.4-6''.35\cos(\delta+7^\circ 14')$$

*) Memoirs of the Royal Astronomical Society. Vol. IV.

**) Memoirs of the R. A. Society. Vol. V.

Наблюденія Лаланда и его помощниковъ первоначально напечатаны въ запискахъ парижской академіи наукъ и, какъ мы видимъ, не всѣ опредѣленія вошли въ англійское изданіе каталога. Наблюденія околополярныхъ звѣздъ въ послѣднее время обработаны профессоромъ Федоренко и изданы имъ подъ заглавіемъ: „Positions moyennes pour l'epoque 1790 des etoiles circompolaires dont les observations out été publiées par I. Lalande dans los Memoires de l'Academie de Paris 1789 et 1790. Petersb. 1854". Остальныя наблюденія Лаланда обработаны Гульдомъ (Gould).

Наконецъ къ XVIII столѣтію относятся работы Волластона и Цаха, изданныя подъ заглавіемъ: „*Wollaston.* Fasciculus Astronomicus. London. 1800" и „*Zach.* MCCL— stellarum zodiacalium catalogi novi ex observationibus virorum de la—Land et Barry".

Въ концѣ XVIII-го и въ началѣ текущаго столѣтія успѣхи звѣздной астрономіи много обязаны трудамъ Піацци, который въ 1780 г. былъ назначенъ директоромъ палермской обсерваторіи. Здѣсь онъ съ помощію пассажнаго инструмента и меридіаннаго круга работы Рамздена предпринялъ опредѣленіе положеній всѣхъ звѣздъ до седьмой и даже восьмой величины. Результатомъ этой большой работы явились два каталога; одинъ былъ изданъ въ 1803 году подъ заглавіемъ: Praecipuarum stellarum inerrantium positiones mediae ineunte seculo XIX, ex observationibus habitis in specula Panomitana. Этотъ каталогъ основанъ на произведенныхъ Маскелейномъ опредѣленіяхъ прямыхъ восхожденій 36 фундаментальныхъ звѣздъ, но въ послѣдствіи обнаружена ошибочность наблюденій Маскелейна и потому Піацци самъ тщательно пронаблюдалъ 220 свѣтлыхъ звѣзъ и эти новыя опредѣленія принялъ въ основаніе при изысканіи прямыхъ восхожденій другихъ звѣздъ. Послѣ этого въ 1814 году было сдѣлано второе изданіе каталога подъ заглавіемъ: „*Piazzi.* Praecipuarum stellarum inerrantium positiones mediae ineunte seculo XIX. Panormi 1814". Тщательнымъ изслѣдованіемъ этого каталога 7646 звѣздъ занимались Бессель, Струве и Аргеландеръ. Они нашли, что поправка прямыхъ восхожденій должна быть представлена въ формѣ

$$+1''.98+2''.15 \tan\delta$$

и что поправка склоненій измѣняется отъ $+0''.6$ до $-2''$.

Съ начала текущаго столѣтія дѣятельное участіе въ составленіи звѣздныхъ росписей принимаютъ многочисленныя англійскія обсерваторіи. Прежде другихъ, именно съ 1806 по 1814 годъ, Грумбриджъ опредѣлилъ 4300 околополярныхъ звѣздъ, въ числѣ которыхъ находится и звѣзда съ замѣчательно большимъ собственнымъ движеніемъ (1830 Gr.). Каталогъ основанный на опредѣленіяхъ Грумбриджа изданъ директоромъ гринвичской обсерваторіи Эйри подъ заглавіемъ: „*Groombridge.* Catalogue of circumpolar stars, reduced to 1810, edited by Airy. London 1838". Наиболѣе важныя работы относящіяся къ составленію звѣздныхъ каталоговъ принадлежатъ обсерваторіямъ: Гринвичской, Оксфордской, Кембриджской, Эдинбургской и др. Къ каталогамъ составленнымъ въ настоящемъ столѣтіи по наблюденіямъ гринвичской обсерваторіи относятся: каталогъ изданный Пондомъ (Pond) подъ заглавіемъ: Catalogue of 1112 stars. London 1833. Затѣмъ слѣдуетъ цѣлый рядъ звѣздныхъ росписей изданныхъ директоромъ гринвичской обсерваторіи Эйри. Эти каталоги носятъ слѣдующія заглавія: 1) Catalogue of the places of 1439 stars refered to 1 Jan. 1840, deduced from the observations mad at Greenwich from 1836 to 1841. 2) Catalogue of 2156 stars formed from the observations made during twelve years from 1836 to 1847 at Grenwich.

3) Catalogue of 1576 stars formed from the observations during six years from 1848 to 1853 at Greenwich and reduced to the epoch 1850. 4) Seven year Catalogue of 2022 stars deduced from observations made at Grenwich from 1854 to 1860 and reduced to the epoch 1860. и 5) New seven year Catalogue of 2760 stars, deduced from observations made at Grenwich from 1861 to 1867 and reduced to the epoch 1864. Кромѣ этого Эйри издалъ малый каталогъ: Catalogue of 726 stars deduced from the observations made the Cambridge observatory, reduced to 1830, помѣщенный въ запискахъ Королевскаго Астрономическаго Общества (Memoirs of the Royal Astronomical Society).

Значительное участіе въ составленіи звѣздныхъ росписей принимали также и другія англійскія обсерваторіи; такъ директоръ Оксфордской обсерваторіи Джонсонъ составилъ каталогъ изданный подъ заглавіемъ „*Johson.* The Radcliffe catalogue of 6317 stars chiefly circumpolar, reduced to the epoch 1845". Наблюденія послѣдняго времени производимыя на Оксфордской обсерваторіи обработываются Мэномъ (Main) и издаются имъ при запискахъ этой обсерваторіи въ формѣ отдѣльныхъ каталоговъ подъ заглавіемъ Radcliffe catalogues of stars.

Изъ англійскихъ каталоговъ замѣчательны также слѣдующіе:

Armagh Catalogue of *Robinson.* Places of 5345 stars observed from 1828—1854.

Taylor. Result of astronomical observations made at Madras. 5 vol. 1832—1839.

Brisbane. Catalog of 7385 stars chiefly in the southern hemisphere. 1835.

Johnson. A Catalogue of 606 stars in the southern hemisphere. 1835.

Henderson. On the Deleinations of the principal fixed stars (reduect to 1833).

Fallows. Catalogues of nearly all the principal fixed stars between the zenith of the Cape of Good Hope, and the south pole reduced to 1824.

Cooper. Catalogue of stars near the ecliptic. Dublin 1853.

Koller. Catalogue of 208 fixed stars.

Весьма полезенъ также въ практическомъ отношеніи англійскій каталогъ изданный подъ заглавіемъ „The Catalogue of the British Association of the advancement of science. By Francis Baily. London. 1845. Положенія звѣздъ данныя въ этомъ каталогѣ опредѣлены по наблюденіямъ различныхъ астрономовъ, поэтому и точность координатъ не одинакова для всѣхъ звѣздъ каталога.

Обращаясь къ работамъ нѣмецкихъ астрономовъ текущаго столѣтія, прежде всего слѣдуетъ указать на обширныя изслѣдованія директора Кенигсбергской обсерваторіи Ф. В. Бесселя. Въ періодъ времени отъ 1821 до 1825 года Бессель опредѣлилъ положенія 31085 звѣздъ расположенныхъ въ зонахъ отъ $+15^\circ$ до -15° склоненія. Послѣ того, продолжая свою работу, онъ опредѣлилъ положенія еще 31000 звѣздъ, склоненія которыхъ заключаются въ предѣлахъ $+15^\circ$ и $+45^\circ$. Наблюденія Бесселя редуцированы Вейсомъ (Weisse) и редукціи изданы Петербургскою Академіею Наукъ въ видѣ двухъ большихъ каталоговъ подъ заглавіемъ: „Positiones mediae stellarum in zonis Regiomontanis a Besselio inter -15° et $+50^\circ$ observatarum ad annum 1825 reductae. Auctore M. Weisse. 1846. Второй томъ подъ подобнымъ же заглавіемъ былъ изданъ въ 1863 году. Онъ содержитъ въ себѣ среднія положенія звѣздъ, склоненія которыхъ заключаются въ предѣлахъ $+15^\circ$ и $+45^\circ$.

Говоря о трудахъ Бесселя, нельзя не упомянуть о его превосходномъ изслѣдованіи группы Плеядъ; результатомъ этой работы явился превосходный каталогъ 53 звѣздъ

этой группы, помѣщенный въ Astronomische Untersuchungen въ концѣ мемуара „Beobachtungen verschiedener Sterne der Plejaden".

Работу Бесселя наблюденія звѣздъ зонами продолжалъ Аргеландеръ въ Боннѣ и въ полосѣ неба между + 45° и + 80° склоненія опредѣлилъ около 22000 звѣздъ. Редукціи этихъ наблюденій сдѣланы потомъ Эльтценомъ (Oeltzen) и изданы въ Вѣнѣ подъ заглавіемъ: „Argelander's Zonen Beobachtungen von 45° bis 80° Decl. In mittleren Positionen für 1842,0. Von W. Oeltzen. Wien 1851, 1852. Кромѣ того Аргеландеръ наблюдалъ около 17000 южныхъ звѣздъ расположенныхъ въ зонахъ между 15° и 31° южнаго склоненія. Результаты этихъ наблюденій изданы подъ заглавіемъ: Zonen Beobachtungen am Südhimmel.

Аргеландеру принадлежитъ также изданіе семи томовъ наблюденій Бонской обсерваторіи (Astronomische Beobachtungen auf der Sternwarte zu Bonn). Большая часть этого изданія, именно съ третьяго до шестаго тома включительно, содержитъ въ себѣ пересмотръ сѣверной полусферы небеснаго свода. Въ этихъ четырехъ томахъ даны, приведенныя къ началу 1855 года, положенія всѣхъ звѣздъ до 9,5 величины включительно. Прямыя восхожденія звѣздъ этой росписи показаны до секундъ времени, а склоненія до десятыхъ долей минуты дуги. Наблюденія звѣздъ зонами были предприняты также на Мюнхенской обсерваторіи Ламономъ, но результаты ихъ всѣхъ еще не приведены въ форму каталога.

Говоря о нѣмецкихъ ученыхъ, предпринимавшихъ звѣздныя наблюденія съ цѣлію составленія каталоговъ, слѣдуетъ упомянуть еще о Рюмкерѣ (Rümker), составившемъ каталогъ 12000 звѣздъ изданный подъ заглавіемъ: „Mittlere Oerter von 12000 Fixsternen für den Anfang von 1836. Hamburg 1843." и Швердѣ, наблюденія котораго изданы подъ заглавіемъ: „Schwerd's Beobachtungen von Circumpolar Sternen in mittleren Positionen für 1828. Wien 1856".

Въ Россіи еще до основанія Пулковской обсерваторіи предпринимались работы съ цѣлію изученія звѣзднаго неба; изъ нихъ особенно заслуживаютъ вниманія работы обсерваторій въ Дерптѣ и Або. По дерптскимъ наблюденіямъ произведеннымъ В. Струве, Прейсомъ и Делленомъ составленъ знаменитый каталогъ, заключающій въ себѣ среднія положенія по преимуществу двойныхъ звѣздъ и изданный В. Струве подъ заглавіемъ: „Stellarum fixarum, imprimis duplicium et multiplicium positiones mediae pro epocha 1830". Кромѣ того въ Дерптѣ былъ произведенъ В. Струве большой рядъ микрометрическихъ измѣреній двойныхъ звѣздъ изданный потомъ подъ заглавіемъ: „Stellarum duplicium et multiplicium mensurae micrometricae".

На обсерваторіи въ Або при помощи меридіаннаго круга наблюдалъ Аргеландеръ съ цѣлію изслѣдованія собственнаго движенія 560 звѣздъ, каталогъ которыхъ издалъ подъ заглавіемъ: „DLX stellarum fixarum positiones mediae pro anno 1830. Helsingforsiae. 1835.

Астрономическая дѣятельность въ Россія приняла болѣе значительные размѣры со времени открытія Пулковской обсерваторіи. Большая часть работъ этой обсерваторіи имѣла цѣлію составленія каталога всѣхъ звѣздъ до 6 величины включительно. Эти превосходныя по точности наблюденія тщательно обработываются въ настоящее время и, какъ надо надѣятся, скоро будутъ изданы въ формѣ фундаментальнаго каталога.

Изслѣдованія двойныхъ звѣздъ В. Струве продолжалъ и на Пулковской обсерваторіи. Результатомъ этихъ его работъ явились два каталога, изданные подъ загла-

віемъ: „Catalogue de 514 etoiles doubles et multiples decouverts a Poulkowa" и „Catalogue de 256 etoiles doubles principales où la distance est de 32 scç. à 2 min, et qui se trouvent sur l'hemisphèro boreal".

На Московской обсорваторіи по илапу проф. Швейцера было предпринято точное опредѣленіе положеній звѣздъ 7-й и 8-й величины. Въ точеніи 12 лѣтъ, съ 1858 по 1870 годъ опредѣлено болѣе 3000 звѣздъ расположенныхъ въ зонѣ между экваторомъ и параллелью соотвѣтствующею 16° сѣвернаго склоненія. Первоначально въ работѣ принимали участіе профессора Швейцеръ и Бредихинъ, по съ 1862 года по 1870 годъ этими опредѣленіями занимался одинъ я. Наблюдая каждую звѣзду не менѣе четырехъ разъ, я успѣлъ опредѣлить положенія двухъ съ половиною тысячъ звѣздъ. Около 800 звѣздъ опредѣлены гг. Швейцеромъ и Бредихинымъ вмѣстѣ. Нѣкоторая часть нашихъ наблюденій обработана астрономомъ Громадзкимъ подъ руководствомъ Швейцера. Результаты этихъ редукцій составляютъ содержаніе изданнаго Швейцеромъ перваго тома анналовъ Московской обсерваторіи (Annales de l'observatoire de Moscou. Volume I).

Изъ работъ предпринятыхъ въ Италіи и Испаніи съ цѣлію составленія звѣздныхъ росписей заслуживаютъ вниманія работы астрономовъ Сантини (Santini) и Монтойо (Saturnino Montojo). По наблюденіямъ перваго изъ нихъ составленъ каталогъ 1677 звѣздъ напечатанный въ 12-мъ томѣ записокъ Королевскаго Астрономическаго Общества подъ заглавіемъ: „Catalogue of 1677 stars between 0° and 10° north declination".

Кромѣ того Сантини издалъ еще сочиненіе подъ заглавіемъ: „Descrizione del circolo meridiano dell oservatorio di Padova, seguita da un catalogo di stelle fisse per l'anno 1840. Padova 1840. Въ томъ же 12 томѣ записокъ Королевскаго Астрономическаго Общества напечатаны и результаты наблюденій Монтойо въ видѣ каталога подъ заглавіемъ: „Mean position of Certain stars".

Изъ этого обзора мы видимъ, что въ существующихъ въ настоящее время каталогахъ описано около полумиліона звѣздъ; но достаточно точно и окончательно опредѣленными можно считать положенія не болѣе 50000 звѣздъ. Что же касается до рѣшенія одного изъ главныхъ вопросовъ звѣздной астрономіи, до изслѣдованія собственнаго движенія такъ называемыхъ неподвижныхъ звѣздъ, то работы по этому предмету слѣдуетъ считать едва только начатыми.

КОНЕЦЪ ПЕРВОЙ ЧАСТИ.

Оглавленіе.

V. Затмѣнія.

VI. Аберрація и годичный параллаксъ.


VII. Прецессія и нутація.

VIII. Среднія и видимыя мѣста звѣздъ. Звѣздные каталоги.

ОПЕЧАТКИ.


НА СТРАН:	СТРОКА:	НАПЕЧАТАНО:	ДОЛЖНО БЫТЬ:
8	20 сверху	инструментъ	инструментъ
10	19 снизу	законy	закону
15	9 снизу	$P,\ Z,\ S,$	$P,\ Z,\ S_1,$
28	5 сверху	неудобство,	неудобство
32	3 снизу	гринвича	Гринвича
36	18 сверху	Разстояніе	Разстоянія
40	18 сверху	α_0	a_0
54	4 сверху	$1 + \frac{1+\rho}{1+\rho_0}$	$1 + \frac{1+c\rho}{1+c\rho_0}$
113	6 снизу	можетъ	можемъ
117	2 снизу	$dF_2^{n,2}$	$\frac{dF_2^{n,2}}{dg}$
124	6 снизу	$2g,$	$2g$
127	8 сверху	$\cos (s \quad z)$	$\cos (s - z)$
130	18 снизу	ними	нимъ
161	5 снизу	AB	AB_1
173	15 сверху	до оси u	до оси y
320	1 снизу	$\cos \frac{B+C}{2}$	$\sin \frac{B+C}{2}$
328	5 снизу	$PP'p,$	$PP'p$

Фиг. 20



Фиг. 21.

K'
N
b''
h₁
B
a'
h
N'
b
H₁
c'
k
a
H
c
H'
F
A
O
w
C
G
N'



фиг. 1
фиг. 2
фиг. 3
фиг. 4
фиг. 5
фиг. 6
фиг. 7
фиг. 8
фиг. 9
фиг. 10
фиг. 11
фиг. 12
фиг. 13
фиг. 14
фиг. 15
фиг. 16
фиг. 17
фиг. 18
фиг. 19
фиг. 21
фиг. 22
фиг. 23
фиг. 24
фиг. 25
фиг. 26
фиг. 27
фиг. 29
фиг. 30
фиг. 31
фиг. 32
фиг. 33
фиг. 34
фиг. 35
фиг. 36
фиг. 37
фиг. 38
фиг. 39
фиг. 40
фиг. 41
фиг. 42
фиг. 43

ПУТЬ ЛУННОЙ ТѢНИ И ПОЛУТѢНИ ПО ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВО ВРЕМЯ ПОЛНАГО ЗАТМѢНІЯ СОЛНЦА 18 АВГУСТА 1887 Г.

